Лекция 6

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ: определить числовые характеристики положения и моменты непрерывных и дискретных случайных величин.

Числовые характеристики положения

Закон распределения полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Но часто достаточно указать только отдельные числовые параметры, которые позволяют в сжатой форме выразить наиболее существенные черты распределения. Такие параметры называются числовыми характеристиками случайной величины.

Среди числовых характеристик можно выделить характеристики положения, т. е. некие средние, ориентировочные значения случайной величины, около которых группируются ее возможные значения.

Математическое ожидание. Из характеристик положения наибольшую роль играет математическое ожидание, которое иногда называют просто средним значением.

Определим математическое ожидание исходя из механической интерпретации распределения случайной величины. Если считать, что единичная масса распределена между точками на оси абсцисс $x_1, x_2, \ldots, x_n$ со значениями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (см. рис. 4.2), то центр масс такой системы материальных точек будет иметь координату $M[X]$:

$$M[X] = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \text{ но } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

тогда

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m_X. \qquad (4.12)$$

Это среднее взвешенное значение случайной величины X, в которое координата каждой точки x_i входит с "весом", равным соответствующей вероятности, и называется математическим ожиданием.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всевозможных ее значений на вероятности этих значений.

В том случае, когда $n \to \infty$,

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Но бесконечная сумма может и расходиться, т. е. соответствующая случайная величина X не будет иметь математического ожидания.

Пример. Случайная величина X , заданная рядом распределения

$$X: \begin{array}{c|cccccc} x_i & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^i & \dots \\ \hline p_i & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots & 1/2^i & \dots \end{array},$$

имеет расходящееся математическое ожидание, так как

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty ,$$

и, значит, у такой случайной величины математического ожидания не существует.

При переходе к непрерывной случайной величине необходимо в формуле (4.12) заменить суммирование интегрированием, а вероятность – элементом вероятности:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \qquad (4.13)$$

Область интегрирования определяется областью существования функции $f(x)$.

Для смешанной случайной величины можно записать, что

$$M[X] = \int_{(H)} x f(x) dx + \sum_i x_i p_i ,$$

где сумма распространяется на все значения x_i, имеющие отличные от нуля вероятности, а интеграл на все участки, где функция распределения $F(x)$ непрерывна; множество участков непрерывности $F(x)$ обозначено через (H).

Пользуясь интегралом Стилтьеса, можно записать выражение для математического ожидания любой случайной величины X через ее функцию распределения в виде

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

<u>Мода</u>. Следующая характеристика положения – это мода. Модой случайной величины X называют ее наиболее вероятное значение, т. е. то, для которого вероятность p_i или плотность распределения $f(x)$ достигают максимума. Моду обычно обозначают через M_x. Если многоугольник вероятности или плотность распределения достигают максимума в нескольких точках, то такие распределения называют полимодальными (см. рис. 4.16).

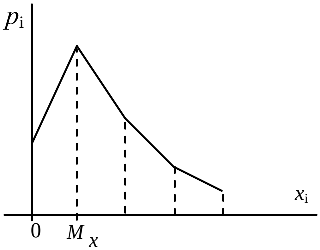

Рис. 4.15. Мода дискретной случайной величины

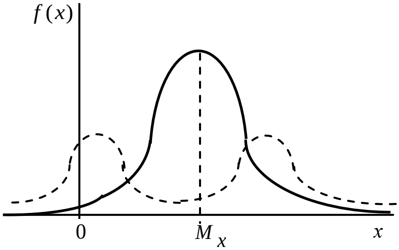

Рис. 4.16. Мода непрерывной случайной величины

<u>Медиана</u>. Еще одна характеристика положения непрерывных случайных величин. Медианой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение x_m, для которого

$$P\{X < x_m\} = P\{X > x_m\} = 1/2,$$

т. е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина X меньше x_m или больше x_m.

Геометрически медиана – это координата той точки на оси $0x$, для которой площади, лежащие слева и справа от нее, одинаковы и равны по $1/2$ (см. рис. 4.17). *Для симметричных распределений математическое ожидание, мода и медиана совпадают.*

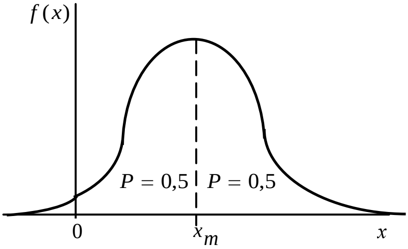

Рис. 4.17. Медиана непрерывного распределения

Моменты. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение

Другие числовые параметры случайных величин характеризуют различные особенности распределения. Особое значение имеют начальные и центральные моменты.

Начальным моментом s-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание s-й степени этой величины:

$$\alpha_s = M[X^s].$$

Для дискретной случайной величины X начальный момент s-го порядка определяется суммой

$$\alpha_s[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \,,$$

где x_i – возможные значения случайной величины X, p_i – соответствующие вероятности.

Для непрерывной случайной величины по аналогии имеем

$$\alpha_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x)dx \,,$$

где $f(x)$ – плотность распределения.

Необходимо отметить, что ранее введенная характеристика положения – математическое ожидание случайной величины – есть не что иное, как первый начальный момент, т. е. $M[X] = m_X = \alpha_1[X]$.

Центрированной случайной величиной называется отклонение случайной величины от ее математического ожидания

$$\dot{X} = X - M[X].$$

Очевидно, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю:

$$M[\dot{X}] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) m_X = 0.$$

Аналогично и для непрерывной случайной величины.

Центрирование случайной величины равносильно переносу начала отсчета в точку m_X. Моменты центрированной случайной величины называются центральными моментами. Они аналогичны моментам относительно центра масс в механике.

Центральным моментом s -го порядка случайной величины X называют математическое ожидание s -й степени центрированной случайной величины:

$$\mu_s[X] = M[\dot{X}^s] = M[(X - m_X)^s].$$

При этом для дискретной случайной величины получаем

$$\mu_s[X] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)^s p_i,$$

а для непрерывной

$$\mu_s[X] = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_X)^s f(x)dx.$$

Для любой случайной величины X центральный момент 1-го порядка равен нулю:

$$\mu_1 = M[\dot{X}] = M[X - m_X] = 0.$$

Центральные и начальные моменты связаны между собой. Так, для моментов второго порядка

$$\mu_2 = M[\dot{X}^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_X \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_X^2 \sum_{i=1}^{n} p_i =$$

$$= \alpha_2 - 2m_X^2 + m_X^2 = \alpha_2 - m_X^2.$$

Аналогично для третьего порядка

$$\mu_3 = M[\dot{X}^3] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^3 p_i = \alpha_3 - 3\alpha_2 m_X + 2m_X^3 .$$

Особое значение имеет второй центральный момент μ_2, который называется дисперсией случайной величины:

$$\mu_2 = D[X] = D_X ;\ D_X = M[\dot{X}^2] = M[(x - m_X)^2] .$$

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной величины. Для вычисления дисперсии служат формулы:

$$D_X = D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i ;$$

$$D_X = D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx ;$$

$$D_X = \alpha_2 - m_X^2 = M[X^2] - M[X]^2 .$$

Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию ее квадрата минус квадрат математического ожидания.

Дисперсия случайной величины характеризует рассеяние, разбросанность случайной величины около ее математического ожидания. Само слово дисперсия означает "рассеяние".

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, и поэтому часто используется <u>среднее квадратичное отклонение</u>

$$\sigma[X] = \sigma_X = \sqrt{D[X]} = \sqrt{D_X} .$$

Для неотрицательной случайной величины X в качестве характеристики "степени ее случайности" иногда применяют <u>коэффициент вариации</u>

$$V = \sigma / m_X .$$

Таким образом, основные числовые характеристики случайной величины X – математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение. Они характеризуют как положение случайной величины, так и степень ее разбросанности. Для них очевидны следующие свойства:

1. Математическое ожидание неслучайной величины C равно самой неслучайной величине C:

$$M[C] = C.$$

2. Дисперсия неслучайной величины C равна нулю, так как у такой величины нулевое рассеивание

$$D[C] = 0.$$

3. При прибавлении к случайной величине X неслучайной величины C к ее математическому ожиданию прибавляется та же величина:

$$M[X + C] = M[X] + C.$$

4. При прибавлении к случайной величине X неслучайной величины C ее дисперсия не изменяется:

$$D[X + C] = D[X].$$

5. При умножении случайной величины X на неслучайную величину C на ту же величину умножается ее математическое ожидание:

$$M[CX] = CM[X].$$

6. При умножении случайной величины X на неслучайную величину C ее дисперсия умножается на C^2:

$$D[CX] = C^2 D[X].$$

7. При умножении случайной величины X на неслучайную величину C ее среднее квадратичное отклонение умножается на модуль C:

$$\sigma_X[CX] = |C| \sigma_X[X].$$

Третий центральный момент μ_3 служит для характеристики асимметрии ("скошенности") распределения. Для симметричных относительно математического ожидания распределений все нечетные центральные моменты равны нулю:

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^s p_i = 0,$$

так как каждому положительному слагаемому соответствует равное по модулю отрицательное.

Третий центральный момент μ_3 имеет размерность куба случайной величины, и для получения безразмерной характеристики – коэффициента асимметрии – делят μ_3 на σ_X^3 :

$$S_X = {\mu_3}/{\sigma_x^3}$$, show – "косой".

На рис. 4.17 приведены две плотности распределения: у $f_1(x)$ положительный коэффициент асимметрии, а у $f_2(x)$ – отрицательный.

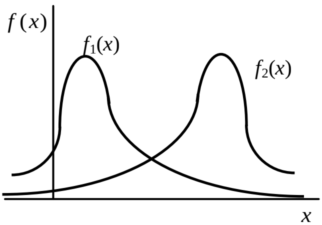

Рис. 4.17. Плотности распределения с различными коэффициентами асимметрии

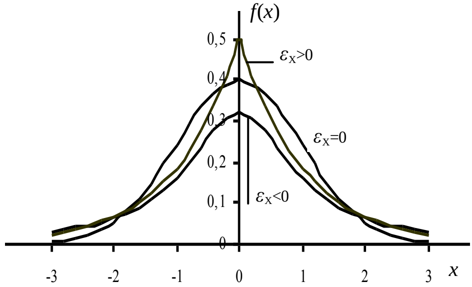

Рис. 4.18. Плотности распределения с различными эксцессами

Четвертый центральный момент характеризует островершинность ("крутость") распределения. Это свойство определяется с помощью так называемого эксцесса

$$\varepsilon_X = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3.$$

За норму выбирается нормальное распределение, у которого отношение ${\mu_4}/{\sigma_X^4} = 3$ и соответственно эксцесс ε_X равен нулю. Поэтому распределения более островерхие, чем нормальное, имеют положительный эксцесс, а менее островерхие (плосковерхие) – отрицательный (см. рис. 4.18).