ЧАСТЬ 4

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Лекция 5

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ: ввести понятие случайной величины и закона распределения; для дискретной случайной величины определить ряд распределения; ввести понятие функции распределения и плотности распределения вероятностей и определить их свойства.

Под случайной величиной понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение. Возможные значения случайной величины образуют множество Ξ, которое называют <u>множеством возможных значений</u> случайной величины.

<u>Пример 1</u>. Для игральной кости случайной величиной X будет число выпавших очков. Множество возможных значений $\Xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

<u>Пример 2</u>. Тестирование изделия до появления первого исправного. Случайная величина Y – число тестов, которое будет произведено. Множество возможных значений $\Xi = \{1, 2, \ldots\}$ бесконечное, но счетное.

Впредь случайную величину будем обозначать большими буквами, например X, а их возможные значения – малыми; в приведенных примерах – x и y.

Случайные величины могут быть дискретными и недискретными. В теоретико-множественной трактовке основных понятий теории вероятностей случайная величина X есть функция элементарного события $X = \varphi(\omega)$, где ω – элементарное событие, принадлежащее пространству Ω $(\omega \in \Omega)$. При этом множество Ξ возможных значений случайной величины состоит из тех значений, которые принимает функция $\varphi(\omega)$. *Если множество Ξ счетное или конечное, то случайная величина X называется дискретной, если несчетное – недискретной.* При этом случайные величины могут иметь различные распределения.

Закон распределения. Ряд распределения дискретной случайной величины

Законом распределения случайной величины называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в верхней строке которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины $X: x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, а в нижней – вероятности этих значений: $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$. При этом $p_i = P\{X = x_i\}$ – вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение x_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$.

Ряд распределения записывается в виде таблицы

$$X: \begin{array}{|ccccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ \hline p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{array} \;. \tag{4.1}$$

События $\{X = x_1\}$; $\{X = x_2\}$; … несовместны и образуют полную группу, поэтому сумма всех вероятностей p_i в (4.1) будет равна единице:

$$\sum_i p_i = 1. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что единица распределена между возможными значениями случайной величины.

Пример. Ряд распределения случайной величины X

$$X: \begin{array}{|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}24 & 0{,}46 & 0{,}26 & 0{,}04 \end{array} \;. \tag{4.3}$$

Графическое изображение ряда распределения называется многоугольником распределения.

Строится он так: для каждого возможного значения случайной величины восстанавливается перпендикуляр к оси абсцисс, на котором откладывается вероятность данного значения случайной величины. Полученные точки для наглядности соединяются отрезками прямых (см. рис. 4.1).

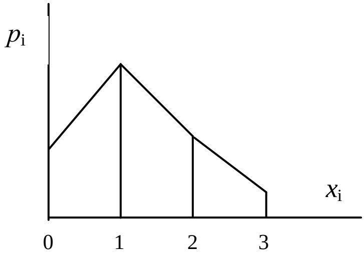

Рис. 4.1. Многоугольник распределения

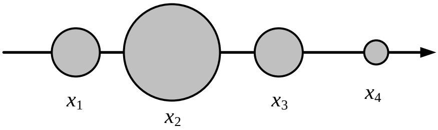

Рис. 4.2. Механическая интерпретация ряда распределения

Кроме этой геометрической интерпретации, часто полезна механическая интерпретация, при которой ряд распределения рассматривается как ряд материальных точек на оси абсцисс, имеющих значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, и соответственно массы $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ в сумме составляющие единицу (см. рис. 4.2).

Функция распределения

Наиболее общей формой закона распределения, пригодной как для дискретных, так и недискретных случайных величин, является функция распределения.

<u>Функцией распределения</u> случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем заданное x (аргумент функции)

$$F(x) = P\{X < x\} . \tag{4.4}$$

Геометрически определение (4.4) интерпретируется как вероятность того, что случайная точка попадает левее заданной точки (см. рис. 4.3).

. Свойства функции распределения выводятся из геометрической интерпретации (см. рис. 4.3–4.4):

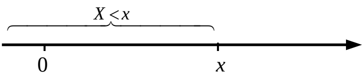

Рис. 4.3. Геометрическая интерпретация функции распределения

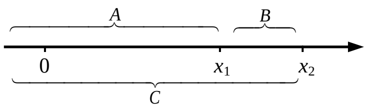

Рис. 4.4. Свойства функции распределения

1. $F(x)$ – неубывающая функция своего аргумента, т. е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Для доказательства представим событие $C = \{X < x_2\}$ как сумму двух несовместных событий (см. рис. 4.4)

$$C = A + B,$$

где

$$A = \{X < x_1\}; \quad B = \{x_1 \leq X < x_2\}.$$

По правилу сложения вероятностей

$$P(C) = P(A) + P(B);$$

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2).$$

Учитывая выражение (4.4), получаем

$$F(x_2) = F(x_1) + P\{x_1 \leq X < x_2\}, \qquad (4.5)$$

но так как $P\{x_1 \leq X < x_2\} \geq 0$, то окончательно имеем, что

$$F(x_2) \geq F(x_1).$$

2. $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Перемещая x до бесконечности влево (при $x \to -\infty$) или вправо (при $x \to +\infty$), можно убедиться, что событие становится либо невозможным $F(-\infty) = 0$, либо достоверным $F(+\infty) = 1$.

Функция распределения $F(x)$ любой случайной величины есть неубывающая функция своего аргумента, значения которой заключены между нулем и единицей; причем $F(-\infty) = 0$, а $F(+\infty) = 1$. В отдельных точках эта функция может иметь скачки (разрывы первого рода), на некоторых участках она может быть постоянной, на других – монотонно возрастать (см. рис. 4.5).

С помощью функции распределения можно вычислить вероятность попадания случайной точки на участок от α до β. Для определенности левый конец участка будем включать в него, а правый – нет.

Искомую вероятность получаем из выражения (4.5), положив $x_1 = \alpha$ и $x_2 = \beta$,

$$F(\beta) = F(\alpha) + P\{\alpha \leq X < \beta\},$$

откуда

$$P\{\alpha \leq X < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (4.6)$$

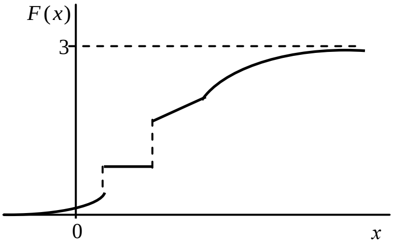

Рис. 4.5. Функция распределения

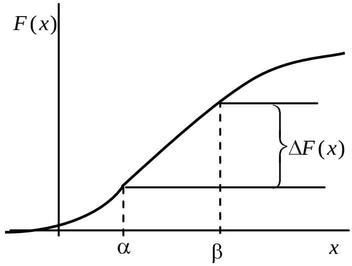

Рис. 4.6. Вероятность попадания на участок $[\alpha, \beta)$

Таким образом, вероятность того, что случайная величина X в результате опыта попадет на участок от α до β (включая α), равна приращению функции распределения на этом участке (см. рис. 4.6). Другая запись выражения (4.6)

$$P\{X \in [\alpha, \beta)\} = F(\beta) - F(\alpha),$$

где квадратная скобка означает, что данный конец включается в участок, а круглая – что не включается.

<u>Вероятность отдельного значения случайной величины</u>. Если взять любую точку α и примыкающий к ней участок $[\alpha, \beta)$, то, приближая β к α, в пределе получаем

$$P\{X = \alpha\} = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]. \tag{4.7}$$

Значение этого предела зависит от того, непрерывна ли функция $F(x)$ в точке α или терпит разрыв. Если функция в точке α совершает скачок, то предел (4.7) равен величине этого скачка. Если же $F(x)$ везде непрерывна, то вероятность каждого отдельного значения случайной величины X равна нулю. Последнее утверждение не означает, что событие $\{X = \alpha\}$ невозможно; оно возможно, но с нулевой вероятностью.

Функция распределения дискретной случайной величины

Для случайной величины X, представленной рядом распределения

$$X:\begin{array}{|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}24 & 0{,}46 & 0{,}26 & 0{,}04 \end{array}\ ,$$

можно, задаваясь различными значениями x, вычислить функцию распределения $F(x) = P(X < x\}$:

$x \le 0,\ F(x) = 0$;

$0 < x \le 1,\ F(x) = P\{X = 0\} = 0{,}24$;

$1 < x \le 2,\ F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = 0{,}7$;

$2 < x \le 3,\ F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0{,}96$;

$x > 3,\ F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = 1$.

На рис. 4.7 приведена рассчитанная функция распределения $F(x)$. Жирными точками отмечены значения в точках разрыва; функция $F(x)$ при подходе к точке разрыва слева сохраняет свое значение (функция "непрерывна слева"). Заметим, что между скачками функция $F(x)$ постоянна.

Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции распределения равна единице.

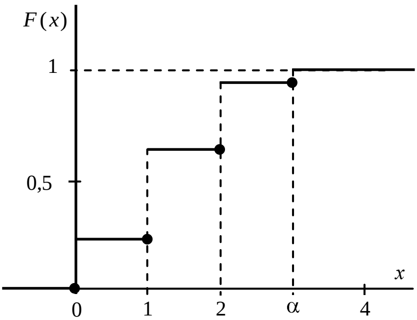

Рис. 4.7. Функция распределения дискретной случайной величины

Индикатор события. Индикатором события A называется случайная величина U, равная единице, если в результате опыта событие A произошло, и – нулю, если не произошло:

$$U = \begin{cases} 1, \text{ если } A \text{ произошло}; \\ 0, \text{ если } A \text{ не произошло}. \end{cases}$$

Ряд распределения случайной величины U с вероятностью события A, равной p, имеет вид

$$U: \begin{array}{|cc} 0 & 1 \\ \hline 1-p & p \end{array} .$$

Многоугольник распределения случайной величины U приведен на рис. 4.9, а функция распределения – на рис. 4.10.

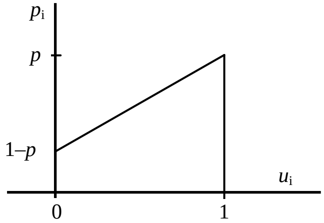

Рис. 4.9. Многоугольник распределения индикатора событий

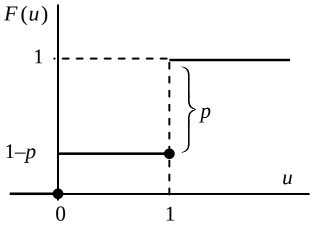

Рис. 4.10. Функция распределения индикатора событий

Непрерывная случайная величина. Плотность распределения

Случайная величина X называется <u>непрерывной</u>, если функция распределения не только непрерывна в любой точке, но и дифференцируема всюду, кроме, может быть, отдельных точек, где она терпит излом (см. рис. 4.11). Так как скачков эта функция не имеет, то вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю, т. е.

$$P\{X = \alpha\} = 0 \text{ для всех } \alpha.$$

Поэтому говорить о распределении вероятностей отдельных значений не имеет смысла. В качестве закона распределения <u>непрерывных случайных величин</u> вводится понятие <u>плотности распределения вероятностей</u> или <u>плотности распределения</u>.

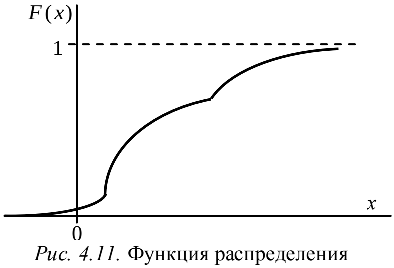

Рис. 4.11. Функция распределения непрерывной случайной величины

Исходим из механической интерпретации распределения вероятностей. Для дискретной случайной величины X в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сосредоточены массы $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, сумма которых равна единице. Для непрерывной случайной величины масса, равная 1, "размазана" по числовой оси с непрерывной в общем случае плотностью (см. рис. 4.12). Вероятность попадания случайной величины X на любой участок Δx может быть интерпретирована как масса, приходящаяся на этот участок, а средняя плотность на этом участке – как отношение массы к его длине. Для участка $[x, x+\Delta x]$

$$\frac{P\{x \le X \le x+\Delta x\}}{\Delta x}.$$

Но вероятность $P\{x \le X \le x+\Delta x\}$ определяется как приращение функции распределения на этом участке

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x},$$

и, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем плотность в точке x

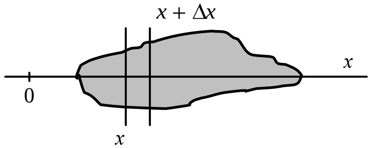

Рис. 4.12. Плотность распределения вероятностей

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = F'(x),$$

т. е. производную функции распределения.

Плотностью распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{4.8}$$

Плотность распределения $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм закона распределения, но она существует только для непрерывных случайных величин. График плотности распределения $f(x)$ называется кривой распределения (см. рис. 4.13).

Вероятность попадания случайной величины X на участок dx с точностью до бесконечно малых высших порядков равна $f(x)dx$. Эта величина $f(x)dx$ называется элементом вероятности и геометрически равна (приближенно) площади элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок длиной dx и примыкающего к точке x (см. рис. 4.13).

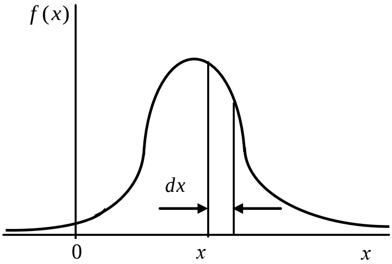

Рис. 4.13. Кривая распределения

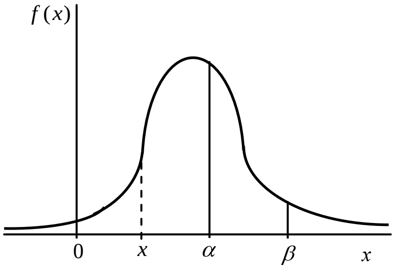

Рис. 4.14. Вероятность попадания на участок $[\alpha, \beta]$

Вероятность попадания случайной величины X на участок от α до β равна сумме элементов вероятности на всем этом участке, т. е. интегралу вида

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{4.9}$$

В геометрической интерпретации эта вероятность равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения и опирающейся на участок $[\alpha, \beta]$ (см. рис. 4.14). Функция распределения теперь может быть вычислена следующим образом:

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{4.10}$$

Геометрически (см. рис. 4.14) – это площадь, ограниченная сверху кривой распределения и лежащая левее точки x.

Свойства плотности распределения.

1. Плотность распределения – неотрицательная функция

$$f(x) \geq 0,$$

как производная от неубывающей функции, и еще потому, что плотность, как физическая величина, не может быть отрицательной.

2. Интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \quad (4.11)$$

Это свойство вытекает из выражения (4.10), если верхний предел будет ∞ и если учесть, что $F(\infty) = 1$.