Лекция 3

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ТЕОРЕМА БАЙЕСА

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ: определить понятия условной вероятности и независимости событий; построить правило умножения вероятностей; вывести формулу полной вероятности и доказать теорему гипотез.

Условная вероятность события

Условной вероятностью события B при наличии A называется величина

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{2.4}$$

в предположении, что $P(A)\neq 0$. Значит можно трактовать условную вероятность $P(B/A)$ как вероятность события B, вычисленную при условии, что событие A произошло.

Записав формулу (2.4) в другом порядке, получаем

$$P(AB)=P(A)P(B/A), \tag{2.5}$$

что вероятность произведения (пересечения, совмещения) двух событий равна вероятности одного из них, умноженная на условную вероятность второго, при наличии первого. Это так называемое правило (теорема) умножения вероятностей.

Другая запись этого правила имеет вид

$$P(AB)=P(B)P(A/B). \tag{2.6}$$

Правило умножения вероятностей легко обобщается на случай произвольного числа событий:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots$$

$$\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}), \tag{2.7}$$

т. е. вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого последующего события вычисляется при условии, что все предыдущие произошли.

Пример. В урне пять пронумерованных шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Из урны один за другим вынимаются все 5 шаров. Найти вероятность того, что их номера будут идти в возрастающем порядке.

Р е ш е н и е. Событие $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. По формуле (2.7) получаем

$$P(A) = (1/5)(1/4)(1/3)(1/2) \cdot 1 = 1/120 .$$

Независимость событий

Событие A называется независимым от события B, если вероятность $P(A)$ не зависит от того, произошло B или нет, т. е.

$$P(A/B) = P(A) .$$

Зависимость и независимость событий всегда взаимны: если A зависит от B, то и B зависит от A, и если A не зависит от B, то и B не зависит от A.

Доказательство. Пусть событие A не зависит от B: $P(A/B) = P(A)$. Правило умножения запишем в двух формах:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) .$$

Если заменить условную вероятность $P(A/B)$ на "безусловную" $P(A)$, то получим

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A) .$$

Так как считаем, что $P(A) \neq 0$, то

$$P(B/A) = P(B) .$$

Полученный результат позволяет дать новое определение независимости событий: два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого.

Правило умножения вероятностей для независимых событий имеет вид

$$P(AB) = P(A)P(B), \qquad (2.8)$$

т. е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми, если любое из них не зависит от любой комбинации (произведения) любого числа других. Для этого случая

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad (2.9)$$

т. е. вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Заметим, что попарная независимость событий еще не означает их независимости в совокупности. Надо помнить, что в основе независимости событий лежит их физическая независимость.

Рекомендации и примеры использования основных правил теории вероятностей

Для решения задач по тории вероятностей можно дать простые рекомендации по использованию правил сложения и умножения вероятностей и привести примеры применения этих правил:

1. Правило сложения и правило умножения вероятностей обычно применяются вместе.

2. Если в задаче противоположное событие $\overline{A}$ распадается на меньшее число вариантов, чем событие A, то при вычислении вероятности переходят к противоположному событию.

Пример 1. Требуется определить число дублирующих $(n-1)$ приборов с надежностью p (как у основного прибора), чтобы надежность системы, состоящей из n приборов, была не меньше заданной величины P.

Р е ш е н и е. Вероятность безотказной работы такой системы

$$P(B) = 1-(1-p)^n$$

должна быть не меньше заданной

$$1-(1-p)^n \geq P \text{ или } (1-p)^n \leq 1-P.$$

После логарифмирования имеем

$$n\log(1-p) \leq \log(1-P).$$

Разделив левую и правую части неравенства на отрицательную величину $\log(1-p)$, окончательно получаем

$$n \geq \frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}.$$

Пример 2. Производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Найти вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз.

Р е ш е н и е. Искомая вероятность равна

$$R_1 = 1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

Если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, то вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз, будет равна

$$R_1 = 1-(1-p)^n.$$

Формула полной вероятности

Пример. Имеется три одинаковые урны: в первой урне два белых и один черный шар; во второй – три белых и один черный; в третьей – два белых и два черных. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар белый?

Проведение опыта возможно только в условиях исключающих друг друга гипотез (в нашем примере это случайный выбор любой из трех урн):

$$H_1, H_2, \ldots, H_n; \; (H_i H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j). \qquad (2.10)$$

Гипотезы составляют полную группу несовместных событий с известными вероятностями появления

$$P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n).$$

Рассматривается некоторое событие A, которое может появиться только вместе с одной из гипотез (2.10). Условные вероятности события A по каждой из гипотез заданы:

$$P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n).$$

Задача состоит в том, чтобы вычислить вероятность события A. Для этого представим A как сумму n несовместных вариантов:

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA = \sum_{i=1}^{n} H_iA.$$

По правилу сложения вероятностей несовместных событий получаем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i A),$$

а по правилу умножения

$$P(H_i A)=P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда окончательно имеем

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i). \qquad (2.11)$$

Таким образом, безусловная вероятность события A в опыте с гипотетическими условиями вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события при этой гипотезе.

Выражение (2.11) называется формулой полной вероятности. Она применяется во всех случаях, когда опыт со случайным исходом распадается на два этапа: на первом учитываются условия опыта, а на втором – его результат.

В рассматриваемом примере с урнами есть три гипотезы: H_1 – выбор первой урны с шарами; H_2 – второй урны; H_3 – третьей. Гипотезы представляют собой полную группу несовместных событий. Вероятности гипотез одинаковы и равны

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$$

Событие $A=\{$появление белого шара$\}$. Условные вероятности события A по каждой из гипотез соответственно равны

$$P(A/H_1)=2/3;\; P(A/H_2)=3/4;\; P(A/H_3)=1/2.$$

По формуле (2.11) получаем, что вероятность вынуть белый шар равна

$$P(A)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{23}{36}.$$

Теорема гипотез (формула Байеса)

Пример. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна $p_1=0{,}8$, а второго – $p_2=0{,}4$. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.

До опыта о его возможных результатах можно сделать ряд гипотез (предположений) $H_1, H_2, \dots, H_n$, представляющих собой полную группу несовместных событий:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega;\ H_i H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j\,.$$

Вероятности гипотез до опыта – априорные (до опытные) вероятности – заданы и равны:

$$P(H_1),\, P(H_2), \dots, P(H_n); \quad \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1\,.$$

Если же опыт произведен и в результате появилось некоторое событие A, то вероятности гипотез меняются. Задача состоит в том, чтобы найти апостериорные (после опытные) вероятности гипотез при условии, что опыт дал результат – появилось событие A:

$$P(H_1 / A);\ P(H_2 / A);\ \dots,\ P(H_n / A)\,.$$

Для решения задачи возьмем любую гипотезу H_i и вычислим вероятность произведения событий $H_i A$ по правилу умножения в двух формах:

$$P(H_i A) = P(H_i) P(A / H_i) = P(A) P(H_i / A)\,.$$

Отсюда имеем

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) P(A / H_i)}{P(A)}\,.$$

Но так как по формуле полной вероятности $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i)$, то окончательно получаем

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i)}\,. \qquad (2.12)$$

Выражение (2.12) называется формулой Байеса. Она позволяет пересчитать вероятности гипотез в свете новой информации, состоящей в том, что опыт дал результат – событие A.

В рассматриваемом примере до стрельбы о результатах стрельб можно высказать четыре несовместные гипотезы:

$H_1 = \{$ оба стрелка не попадут в мишень $\}$;
$H_2 = \{$ попадет только первый стрелок $\}$;
$H_3 = \{$ попадет только второй стрелок $\}$;
$H_4 = \{$ оба стрелка попадут в мишень $\}$.

Вероятности этих гипотез соответственно равны:

$$P(H_1) = \bar{p}_1 \bar{p}_2 = 0{,}12;\ P(H_2) = p_1 \bar{p}_2 = 0{,}48;$$
$$P(H_3) = \bar{p}_1 p_2 = 0{,}08;\ P(H_4) = p_1 p_2 = 0{,}32\,.$$

Сумма этих вероятностей $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1$. Условные вероятности события A – в мишени одна пробоина – по всем четырем гипотезам:

$$P(A/H_1) = 0;\ P(A/H_2) = 1;\ P(A/H_3) = 1;\ P(A/H_4) = 0.$$

После подстановки полученных вероятностей в формулу (2.11) получаем апостериорную вероятность второй гипотезы

$$P(H_2 / A) = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}12 \cdot 0 + 0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1 + 0{,}32 \cdot 0} = \frac{6}{7}\,.$$