

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

15 июня 2024 г.

Регистрационный №УД-13463/уч.



ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02-2021 и учебных планов №G31-1-029/уч. и №G31-1-029/уч.- СИБД от 30.06.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

В.Г.Кротов – профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Е.В.Громак – доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Н.В.Бровка – заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А.П.Шилин – доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.

С.И.Василец – доцент кафедры математики и методики преподавания математики физико-математического факультета учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории функций БГУ
(протокол № 13 от 30.05.2024);

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024).

Заведующий
кафедрой теории функций



Н.В. Бровка

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Интегральные уравнения» относится к числу базовых дисциплин, составляющих основу математического образования по специальности «Механика и математическое моделирование». Теория интегральных преобразований имеет многочисленные применения в самых различных областях математики и естествознания.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – повышение уровня профессиональной компетентности студентов, формирование умений использования технических возможностей теории интегральных уравнений и самостоятельного построения и исследования математических моделей, описываемых интегральными уравнениями.

Задачи учебной дисциплины:

1. Изучение классификации интегральных уравнений.
2. Изучение уравнений Фредгольма, уравнений Вольтерра и уравнений типа свертки.
3. Изучение основных свойств симметричных и самосопряженных операторов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Интегральные уравнения» относится к модулю «Математические методы» компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами

Учебная дисциплина «Интегральные уравнения» связана с дисциплинами «Математический анализ», «Теория функций комплексного переменного», «Дифференциальные уравнения». Полученные при изучении учебной дисциплины знания и умения позволят студентам овладеть методами решения рассматриваемых интегральных уравнений.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Интегральные уравнения» должно обеспечить формирование следующих базовых профессиональных и специализированных компетенций:

базовые профессиональные компетенции:

БПК. Применять основные законы и методы естественнонаучных дисциплин для решения теоретических и практических задач в профессиональной деятельности;

БПК. Применять теоретические знания и навыки в самостоятельной исследовательской деятельности

специализированные компетенции:

СК. Применять математический аппарат при исследовании задач механики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:
знать:

- основные понятия и результаты теории интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра;
 - методы доказательств и алгоритмы решения линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра;
 - свойства симметричных и самосопряженных операторов;
- уметь:**
- решать задачи, связанные с интегральными уравнениями
 - доказывать основные теоремы о свойствах интегральных уравнений
 - строить резольвенту уравнений Фредгольма и Вольтерра.
- владеть:**
- основными понятиями теории интегральных уравнений и алгоритмами решения линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Интегральные уравнения» отведено:

- для очной формы получения высшего образования: 90 часов, в том числе 34 аудиторных часа, из них: лекции – 16 часов, практические занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

ТЕМА 1. Введение в интегральные уравнения

Исторический очерк развития теории интегральных уравнений. Задачи механики, приводящие к интегральным уравнениям. Примеры составления интегральных уравнений. Классификация интегральных уравнений.

Связь между интегральными уравнениями Вольтерра и линейными дифференциальными уравнениями. Составление интегрального уравнения или системы интегральных уравнений, эквивалентных задаче Коши.

ТЕМА 2. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра

Метод определителей Фредгольма. Определитель Фредгольма и минор Фредгольма, их свойства.

Вырожденные ядра. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами.

Интегральный оператор Фредгольма и его свойства. Применение принципа сжимающих отображений к уравнениям Фредгольма второго рода и Вольтерра.

Уравнение Фредгольма. Характеристические числа и собственные функции. Первая теорема Фредгольма. Союзное (транспонированное) интегральное уравнение Фредгольма. Вторая и третья теоремы Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.

ТЕМА 3. Интегральные уравнения с симметрическими ядрами

Метод итерированных ядер решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода и Вольтерра. Ряд Неймана.

Ортогональные и ортонормированные системы функций. Примеры ортогональных и ортонормированных систем. Симметричные ядра.

Разложение симметричного ядра по собственным функциям. Функции, представимые через ядро. Решение интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром через характеристические значения и собственные функции.

ТЕМА 4. Интегральные уравнения Абеля

Преобразование Лапласа и его простейшие свойства. Понятие об интегральных уравнениях Абеля первого рода и их особенностях.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Введение в интегральные уравнения	2						
2	Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра	8	8				2	Контрольная работа
3	Интегральные уравнения с симметрическими ядрами	4	4				1	Контрольная работа
4	Интегральные уравнения Абеля	2	2				1	Опрос
	Итого	16	14				4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Васильева, А. Б. Интегральные уравнения / Васильева А. Б., Тихонов Н. А. – 3-е изд. стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 160 с.
URL: <https://e.lanbook.com/book/210230>.
2. Берёзкина, Н. С. Дифференциальные и интегральные уравнения. Тесты: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим и физическим специальностям: в 2 ч. / Н. С. Берёзкина, А. А. Гринь, В. С. Немец. – Минск: РИВШ, 2021. – Ч.1. – 307 с.
3. Берёзкина, Н. С. Дифференциальные и интегральные уравнения. Тесты: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим и физическим специальностям: в 2 ч. / Н. С. Берёзкина, А. А. Гринь, В. С. Немец. – Минск: РИВШ, 2021. – Ч.2. – 322 с.

Дополнительная литература

- 1 Краснов, М.Л. Интегральные уравнения (Введение в теорию) /М.Л. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
- 2 Погребков А.В. Введение в теорию интегральных уравнений. / А.В. Погребков. – М.: Высшая школа экономики, 2021. – 82 с.
- 3 Ворошилов, А.А. Интегральные уравнения: практикум для студентов мех.-мат. фак. спец. 1-31 03 02 «Механика» / А.А. Ворошилов. Минск: БГУ, 2011. – 65 с.
- 4 Волков Т.В., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. – М.: МГУ, 2020. – 95 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания и умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос и контрольная работа.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине учебным планом предусмотрен зачет в 7 семестре.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 2. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра (2 часа)

Метод определителей Фредгольма. Определитель Фредгольма и минор Фредгольма, их свойства. Вырожденные ядра. Решение интегральных уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами. Интегральный оператор Фредгольма и его свойства. Применение принципа сжимающих отображений к уравнениям Фредгольма второго рода и Вольтерра. Уравнение Фредгольма. Характеристические числа и собственные функции. Первая теорема Фредгольма. Союзное (транспонированное) интегральное уравнение Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.

1. Доказать свойства определителя и минора Фредгольма.
 2. Решить интегральные уравнения с вырожденными ядрами.
 3. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения.
 4. Доказать первую теорему Фредгольма.
 5. Найти союзное уравнение Фредгольма.
- Форма контроля – контрольная работа.*

Тема 3. Интегральные уравнения с симметрическими ядрами (1 час)

Метод итерированных ядер решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода и Вольтерра. Ряд Неймана. Ортогональные и ортонормированные системы функций. Примеры ортогональных и ортонормированных систем. Симметричные ядра. Разложение симметричного ядра по собственным функциям. Функции, представимые через ядро. Решение интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром через характеристические значения и собственные функции.

1. Решить интегральные уравнения с итерированными ядрами.
 2. Доказать свойства ряда Неймана.
 3. Привести примеры ортогональных и ортонормированных систем.
 4. Разложить симметричное ядро по собственным функциям.
 5. Решить интегральные уравнения с симметричными ядрами.
- Форма контроля – контрольная работа.*

Тема 4. Интегральные уравнения Абеля (1 час)

Преобразование Лапласа и его простейшие свойства. Понятие об интегральных уравнениях Абеля первого рода и их особенностях.

1. Доказать свойства преобразования Лапласа.
 2. Интегральные уравнения Абеля и их особенности.
- Форма контроля – опрос.*

Примерный перечень заданий к контрольным работам

Контрольная работа №1

1 Проверить, является ли функция $\varphi(x)$ решением интегрального уравнения:

$$\varphi(x) - 3 \int_0^{\pi} (x-t)\varphi(t)dt = \sin x + 3\pi; \quad \varphi(x) = \sin x.$$

2 Составить интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши:

$$y'' + \sin x \cdot y' + \cos x \cdot y = x$$

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

3 Составить систему интегральных уравнений, соответствующую задаче Коши:

$$y''' + xy'' + y' + x = 0$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

4 Решить интегральное уравнение методом дифференцирования

$$\varphi(x) = \int_0^x (2t - 2x + 3)\varphi(t)dt + 2 - 3x$$

5 Найти резольвенту интегрального уравнения двумя способами: методом определителей Фредгольма и с помощью рекуррентных формул. С помощью резольвенты решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = - \int_0^1 e^{x^2-t^2} \varphi(t)dt + 2x$$

Контрольная работа №2

1 Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром:

$$\varphi(x) - \frac{1}{10} \int_0^2 xe^t \varphi(t)dt = x$$

2 Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения. Найти решение уравнения при всех значениях параметра:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x+t)\varphi(t)dt = 0$$

3 Решить уравнения методом последовательных приближений:

$$a). \quad \varphi(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t \varphi(t)dt = 1$$

$$б). \quad \varphi(x) = 1 + \int_0^x t \varphi(t)dt$$

4 Решить уравнения методом итерированных ядер

$$a). \quad \varphi(x) - \frac{1}{9} \int_1^2 te^x \varphi(t)dt = e^x$$

$$б). \varphi(x) = \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt + e^x$$

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

При составлении заданий УСР по учебной дисциплине задания располагаются в порядке возрастания их сложности: задания, формирующие достаточные знания по изученному учебному материалу на уровне узнавания; задания, формирующие компетенции на уровне воспроизведения; задания, формирующие компетенции на уровне применения полученных знаний.

Примерный перечень вопросов к зачету

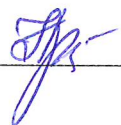
1. Пример составления интегральных уравнений по дифференциальным уравнениям.
2. Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтера.
3. Особые интегралы и особые интегральные уравнения с ядром Коши.
4. Уравнения с разностными ядрами и интегральных преобразований. Нелинейные уравнения.

5. Решения уравнений интегральных преобразований.
6. Ортогональные системы функций. Примеры полных ортонормированных систем.
7. Итерированные ядра. Резольвента.
8. Решение интегрального уравнения Фредгольма методом последовательных приближений. Теоремы существования и единственности.
9. Решение интегральных уравнений Вольтера второго рода.
10. Преобразование Лапласа и решение интегральных уравнений Вольтерра с разностным ядром.
11. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода.
12. Решение интегрального уравнения Абеля первого рода.
13. Решение интегрального уравнения Абеля второго рода.
14. Определитель Фредгольма. Свойства функций $D(\lambda)$ и $D(x, t, \lambda)$.
15. Уравнение Фредгольма при любом λ . Первая теорема Фредгольма.
16. Союзное (транспонированное) интегральное уравнение.
17. Случай характеристического значения.
18. Вторая и третья теоремы Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
19. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.
20. Обобщение полученных результатов.
21. Интегральные уравнения с полярным ядром.
22. Интегральные уравнения Фредгольма в L_2 .
23. Симметричные ядра.
24. Разложение симметричного ядра по характеристическим значениям и собственным функциям.
25. Функции, представление через ядро.
26. Решение интегрального уравнения с симметричным ядром через характеристические значения и собственные функции.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой,
доктор пед.наук, профессор



Н.В.Бровка

« 30 » 05 2024 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
____ (протокол № ____ от ____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)