БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. А. Леваков
М. М. Васьковский
Д. А. Новичкова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В трех частях

Часть 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по специальностям «информатика»,
«прикладная математика», «кибербезопасность»,
«прикладная информатика»

МИНСК
БГУ
2024

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73-1
Л34

Рецензенты:
кафедра фундаментальной и прикладной математики
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *Е. А. Ровба*);
доктор физико-математических наук,
профессор *А. И. Астровский*

Леваков, А. А.
Л34 Математический анализ : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной / А. А. Леваков, М. М. Васьковский, Д. А. Новичкова. — Минск : БГУ, 2024. — 199 с.
ISBN 978-985-881-646-9.

В первой части учебного пособия изложены разделы математического анализа, а именно действительные числа, предел, функции, непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Все приведенные утверждения снабжены полными доказательствами.

Предназначено для студентов, обучающихся в учреждениях высшего образования по специальностям «информатика», «прикладная математика», «кибербезопасность», «прикладная информатика».

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73-1

ISBN 978-985-881-646-9 (ч. 1)
ISBN 978-985-881-645-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое образование играет важную роль в подготовке высококвалифицированных современных специалистов, а математический анализ составляет его основу. Математический анализ – это раздел математики, изучающий функциональные зависимости с помощью методов дифференциального и интегрального исчисления.

При написании учебного пособия авторы опирались на свой многолетний опыт преподавания данной дисциплины на факультете прикладной математики и информатики БГУ, а также на следующие учебные пособия: «Лекции по математическому анализу» Ю. С. Богданова (Минск, 1974, 1978) и «Математический анализ» А. А. Левакова (Минск, 2014). Предлагаемое издание предназначено в первую очередь для студентов факультета прикладной математики и информатики БГУ, но может представлять интерес и для студентов других факультетов и университетов с углубленным изучением математики.

Курс математического анализа тесно связан с такими дисциплинами фундаментальной математики, как геометрия и алгебра, которые читаются студентам факультета прикладной математики и информатики параллельно, и сопровождается практическими и лабораторными занятиями, что было учтено при написании настоящего издания. От студентов, приступающих к изучению математического анализа с помощью данного учебного пособия, требуется знание математики лишь в объеме средней школы. Авторы стремились соединить доступность, строгость и полноту изложения материала с краткостью, свойственной лекциям.

Первая часть издания посвящена изложению тех разделов математического анализа, которые студенты первого курса факультета прикладной математики и информатики традиционно изучают в первом семестре первого курса: действительные числа, предел, функции, непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Наряду с основным теоретическим материалом в учебном пособии содержатся рекомендации по решению задач.

1. ЧИСЛА

Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ будем обозначать множества натуральных, целых и рациональных чисел соответственно.

Напомним, что под множеством рациональных чисел понимают множество обыкновенных дробей $\dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Каждое рациональное число α можно представить в виде десятичной дроби, которая является либо конечной, либо бесконечной периодической дробью. При этом каждая конечная десятичная дробь, не равная нулю, имеет два представления в виде бесконечной десятичной дроби:

$$0,5 = 0,500\ldots = 0,5(0),$$

$$0,5 = 0,499\ldots = 0,4(9)$$

(далее будем предполагать, что студентам из курса средней школы известны операции над рациональными числами и их свойства).

Два отрезка будем называть соизмеримыми, если отношение длин этих отрезков является рациональным числом. Покажем, что существуют несоизмеримые отрезки.

Лемма 1.1. *Диагональ квадрата и его сторона являются несоизмеримыми отрезками.*

Действительно, допустим, что отношение $\dfrac{a}{l}$ длины a стороны квадрата и длины l его диагонали является рациональным числом $\dfrac{m}{n}$. Можно считать, что числа m и n не имеют общих делителей, кроме 1 (в противном случае сократим дробь $\dfrac{m}{n}$ на общий делитель числителя и знаменателя). Используя теорему Пифагора, имеем $n^2 = 2m^2$. Отсюда следует, что n – четное число, т. е. $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тогда из равенства $2k^2 = m^2$ получим, что число m также четное, но это противоречит предположению о том, что числа n и m не имеют общих делителей, отличных от 1.

Для точного измерения длин всех отрезков и других скалярных величин используют множество положительных действительных (вещественных) чисел (обозначается $\mathbb{R}_0$), состоящее из всех возможных бесконечных десятичных дробей

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ $\forall k \geqslant 1$, причем хотя бы одно из чисел $a_i, i = 0, 1, \dots,$ не равно нулю (здесь и далее символ $\forall$ используем для замены слов «для любого»). Приписывая элементам множества $\mathbb{R}_0$ знак «минус», получаем множество отрицательных действительных чисел. Дополняя множество положительных действительных чисел отрицательными действительными числами и нулем, получаем множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. При этом когда говорят о нуле как о действительном числе, то имеют в виду десятичную дробь $0,(0)$. Непериодические десятичные дроби относят к иррациональным числам. Множество чисел $\mathbb{R}_0 \cup \{0\}$ образует множество неотрицательных чисел и обозначается $\mathbb{R}_+$.

Определение 1.1. Приближением по недостатку порядка $n \geqslant 0$ неотрицательного действительного числа $\alpha = a_0, a_1 \dots a_n \dots$ называют рациональное число $\alpha_n = a_0, a_1 \dots a_n$.

Приближением по недостатку порядка $n \geqslant 0$ отрицательного действительного числа $\alpha = -a_0, a_1 \dots a_n \dots$ называют рациональное число $\alpha_n = -a_0, a_1 \dots a_n - 10^{-n}$.

Определение 1.2. Приближением по избытку порядка $n \geqslant 0$ неотрицательного действительного числа $\alpha = a_0, a_1 \dots a_n \dots$ называют рациональное число $\alpha'_n = a_0, a_1 \dots a_n + 10^{-n}$. Приближением по избытку порядка $n \geqslant 0$ отрицательного действительного числа $\alpha = -a_0, a_1 \dots a_n \dots$ называют рациональное число $\alpha'_n = -a_0, a_1 \dots a_n$.

Приведем основные свойства приближений по недостатку, которые следуют из определения 1.1 и свойств рациональных чисел:

1) $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ (свойство монотонности приближений);

2) $\alpha_{n+1} - \alpha_n < 10^{-n}$;

3) если для некоторых действительных чисел α, β и некоторого n приближения по недостатку порядка n этих чисел равны $\alpha_n = \beta_n$, то $\alpha_i = \beta_i$ $\forall i \leqslant n$;

4) если $\alpha_n < \beta_n$, то $\alpha_n + 10^{-n} \leqslant \beta_n$ и $\alpha_k < \beta_k$ $\forall k \geqslant n$.

Определение 1.3. Говорят, что число α равно β, пишут $\alpha = \beta$, если $|\alpha_i - \beta_i| \leqslant 10^{-i}$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$.

Замечание 1.1. Отметим, что иррациональное число α может равняться числу β лишь в случае, когда $\alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Рациональное число α равно β, если или $\alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, или существует такой номер n, что $\alpha_i = \beta_i$ для любого $i < n$ и $|\alpha_i - \beta_i| = 10^{-i}$ для любого $i \geqslant n$ (во втором случае α и β – два представления одной и той же конечной десятичной дроби: одно имеет нуль в периоде, другое – девять).

Определение 1.4. Будем говорить, что выполняется нестрогое неравенство двух действительных чисел $\alpha \leqslant \beta$, если $\alpha_n \leqslant \beta_n$ $\forall n \geqslant 0$ или $\alpha = \beta$. Будем говорить, что имеет место строгое неравенство двух действительных чисел $\alpha < \beta$, если $\alpha_n \leqslant \beta_n \quad \forall n \geqslant 0$ и $\alpha \neq \beta$.

Теорема 1.1 (критерий (необходимое и достаточное условие) различия чисел). *Пусть* α, β *– два действительных числа. Для выполнения неравенства* $\alpha < \beta$ *необходимо и достаточно существование такого индекса* $k \in \mathbb{N}_0$, *что выполняется неравенство*

$$\alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \beta_k. \tag{1.1}$$

$\diamondsuit$

Необходимость. Дано $\alpha < \beta$. Из неравенства чисел следует, что $\alpha_n \leqslant \beta_n \quad \forall n \geqslant 0$ и при этом $\alpha \neq \beta$. Если бы для любого n имело место равенство $\alpha_n = \beta_n$, то получили бы $\alpha = \beta$, что противоречит неравенству $\alpha < \beta$, поэтому найдется такой индекс $i \in \mathbb{N}_0$, что $\alpha_i < \beta_i$. Пусть i – наименьшее значение индекса, при котором выполняется данное неравенство. Используя третье и четвертое свойства приближений по недостатку, имеем

$$\alpha_n = \beta_n \quad \forall n < i;$$

$$\alpha_n < \beta_n \quad \forall n \geqslant i.$$

Если окажется, что $\alpha_i + 2 \cdot 10^{-i} \leqslant \beta_i$, то искомое число k равно i. В случае $\alpha_i + 10^{-i} = \beta_i$ перейдем к рассмотрению приближений по недостатку $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ порядка $i+1$. Если $\alpha_{i+1} + 2 \cdot 10^{-i+1} \leqslant \beta_{i+1}$, то искомое k равно $i+1$. В случае $\alpha_{i+1}+10^{-(i+1)} = \beta_{i+1}$ перейдем к рассмотрению $\alpha_{i+2}, \beta_{i+2}$ и т. д. На некотором шаге должно выполняться нужное неравенство (1.1), так как в противном случае имеет место $|\alpha_i - \beta_i| \leqslant 10^{-i}$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$, но тогда $\alpha = \beta$ — противоречие.

Достаточность. Пусть для некоторого индекса $k \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство (1.1). Равенство $\alpha = \beta$ невозможно, так как тогда выполняется $|\alpha_n - \beta_n| \leqslant 10^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, что противоречит неравенству (1.1). Затем докажем, что $\alpha_n \leqslant \beta_n$ для любого $n \geqslant 0$. Предположим, что нашелся такой номер $m \geqslant 0$, что $\alpha_m > > \beta_m$. Последнее неравенство выполняется либо для $m < k$, либо для $m > k$.

Рассмотрим первый случай $m < k$. По первому, второму и четвертому свойствам приближений по недостатку имеем

$$\alpha_{m+1} \geqslant \alpha_m \geqslant \beta_m + 10^{-m} > \beta_{m+1}.$$

Аналогичным образом покажем, что $\alpha_{m+2} > \beta_{m+2}$ и т. д. Следовательно, $\alpha_k > \beta_k$, что противоречит неравенству (1.1).

Перейдем ко второму случаю $m > k$. Из неравенства (1.1) получаем, что $\beta_k > \alpha_k$. Тогда, используя рассуждения из первого случая, получим $\beta_{k+1} > \alpha_{k+1}$, $\beta_{k+2} > \alpha_{k+2}$ и т. д. Таким образом, $\beta_m > \alpha_m$ – противоречие.

$\square$

Замечание 1.2. Неравенство (1.1) нельзя заменить более слабым неравенством

$$\alpha_k + 10^{-k} \leqslant \beta_k,$$

так как возможен случай, когда α и β – два представления одной и той же конечной десятичной дроби, что влечет равенство чисел α и β.

Замечание 1.3. Если приближения по недостатку порядка k удовлетворяют неравенству (1.1), то для приближений по недостатку порядка $k+1$ имеет место неравенство

$$\alpha_{k+1} + 10 \cdot 10^{-(k+1)} \leqslant \beta_{k+1}.$$

Пример 1.1. Критерий различия чисел дает конструктивный способ проверки строгого неравенства двух чисел в отличие от определения, требующего сравнения всех приближений двух чисел.

Рассмотрим числа $\alpha = -2,17801...$, $\beta = -2,17799...$. Построим цепочку приближений по недостатку этих чисел:

$$\alpha_0 = -3,\ \beta_0 = -3;$$

$$\alpha_1 = -2,2,\ \beta_1 = -2,2;$$

$$\alpha_2 = -2,18,\ \beta_2 = -2,18;$$

$$\alpha_3 = -2,179,\ \beta_3 = -2,178;$$

$$\alpha_4 = -2,1781,\ \beta_4 = -2,1780;$$

$$\alpha_5 = -2,17802, \beta_5 = -2,17800.$$

Поскольку $\alpha_5 + 2 \cdot 10^{-5} \leqslant \beta_5$, то $\alpha < \beta$.

Теорема 1.2 (о плотности множества действительных чисел). *Если* $\alpha < \beta$ *, то существует рациональное число* r, *удовлетворяющее неравенствам* $\alpha < r < \beta$.

$\diamondsuit$

Поскольку $\alpha < \beta$, то согласно критерию различия чисел найдется такой индекс k, что

$$\alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \beta_k.$$

Докажем, что рациональное число

$$r = \alpha_k + 10^{-k} + 5 \cdot 10^{-(k+1)}$$

удовлетворяет условию теоремы.

Действительно,

$$\alpha_{k+1} + 2 \cdot 10^{-(k+1)} < \alpha_k + 10^{-k} + 2 \cdot 10^{-(k+1)} < r - 10^{-(k+1)} \leqslant r_{k+1},$$

откуда, используя критерий различия чисел, имеем $\alpha < r$.

Аналогичным образом убедимся, что

$$r_{k+1} + 2 \cdot 10^{-(k+1)} \leqslant r + 2 \cdot 10^{-(k+1)} = \alpha_k + 10^{-k} + 7 \cdot 10^{-(k+1)} <$$

$$< \alpha_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \beta_k \leqslant \beta_{k+1},$$

откуда согласно критерию различия чисел $r < \beta$.

$\square$

2. ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

В п. 1 были введены отношения равенства, нестрогого и строгого неравенств действительных чисел, что позволяет определить интервал (α, β) и отрезок $[a, b]$ следующим образом:

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\};$$

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}.$$

Аналогичным образом можно определить полуинтервалы $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$. Через $|\alpha, \beta|$ будем обозначать любой из промежутков (α, β), $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$.

Любое подмножество X множества $\mathbb{R}$ будем называть *числовым множеством.*

Числовое множество X называется *ограниченным сверху*, если существует такое число $\beta \in \mathbb{R}$ (*верхняя грань* множества X), что $x \leqslant \beta$ для любого $x \in X$. Числовое множество X называется *ограниченным снизу*, если найдется такое число $\alpha \in \mathbb{R}$ (*нижняя грань* множества X), что $x \geqslant \alpha$ для любого $x \in X$. Числовое множество X называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 2.1. Точной верхней гранью (супремумом) множества $X \subset \mathbb{R}$ называют наименьшую из верхних граней множества X, т. е. такое число $\beta \in \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in X \Rightarrow x \leqslant \beta;$$

$$\forall \gamma < \beta \ \exists \bar{x} \in X : \bar{x} > \gamma.$$

Определение 2.2. Точной нижней гранью (инфимумом) множества $X \subset \mathbb{R}$ называют наибольшую из нижних граней множества X, т. е. такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in X \Rightarrow x \geqslant \alpha;$$

$$\forall \gamma > \alpha \ \exists \bar{x} \in X : \bar{x} < \gamma.$$

Супремум множества X обозначают через $\sup X$, а инфимум – через $\inf X$.

Пример 2.1. Для конечного промежутка $|\alpha, \beta|$ имеем $\sup|\alpha, \beta| = \beta$, $\inf|\alpha, \beta| = \alpha$.

Пример 2.2. Для любого множества $X \subset \mathbb{R}$, состоящего из конечного числа элементов, супремум совпадает с максимальным элементом множества X, а инфимум — с его минимальным элементом.

Целой частью действительного числа α называют наибольшее целое число, не превосходящее α (обозначают $[\alpha]$). Если множество ограничено сверху, то множество целых частей неотрицательных чисел из этого множества состоит из конечного числа элементов.

Модулем неотрицательного действительного числа $\alpha = a_0, a_1 \dots a_n \dots$ называют само это число, а модулем отрицательного числа $\alpha' = -a_0, a_1 \dots a_n \dots$ – число $a_0, a_1 \dots a_n \dots$. Модуль числа α обозначают символом $|\alpha|$, и всегда $|\alpha|$ — неотрицательное действительное число.

Теорема 2.1 (о гранях). *Любое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а любое непустое ограниченное снизу множество X – точную нижнюю грань.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для ограниченного сверху непустого числового множества X. Возможны два случая:

1) множество X содержит неотрицательные элементы;

2) все элементы множества X отрицательны.

Рассмотрим первый случай. Без ограничения общности можем удалить из множества X все отрицательные элементы. Оставшееся непустое множество, состоящее из неотрицательных элементов, также будем обозначать через X. Множество целых частей чисел из X ограничено сверху, следовательно, в этом множестве существует максимальный элемент b_0. Пусть Y – множество чисел из X, целые части которых равны b_0. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через Y_n множество приближений по недостатку порядка n чисел из множества Y.

Отметим, что каждое из множеств Y_n является конечным, поскольку каждое число этого множества имеет фиксированную первую цифру b_0 и n цифр после запятой, поэтому каждое множество Y_n имеет максимальный элемент β_n. Пусть $\max Y_n = \beta_n = b_0, b_1 \dots b_n$. Десятичная дробь $\beta_{n+1} = \max Y_{n+1}$ отличается от β_n только наличием дополнительной цифры b_{n+1} на $n+1$ месте после запятой. Таким образом, для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ можно найти цифру b_n. Построим действительное число

$$\beta = b_0, b_1 \dots b_n \dots$$

(выражение «построим или зададим действительное число α» означает, что существует правило, по которому для любого натурального числа n за конечное число операций можно построить приближение по недостатку α_n порядка n этого числа).

Докажем, что $\beta = \sup X$. Для этого достаточно проверить, что $\beta = \sup Y$. Возьмем произвольный элемент $y \in Y$. Из построения числа β следует, что его приближение по недостатку порядка n удовлетворяет неравенству

$$y_n \leqslant \beta_n.$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при любом n, то $y \leqslant \beta$.

Затем возьмем произвольное действительное число $\gamma < \beta$. Из критерия различия чисел вытекает существование такого индекса k, что

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \beta_k.$$

Из определения множества Y_k следует, что существует элемент $\bar{y} \in Y$, у которого приближение по недостатку порядка k равно β_k, поэтому имеет место неравенство

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \bar{y}_k.$$

Следовательно, по критерию различия чисел имеем $\gamma < \bar{y}$. Таким образом, доказали, что $\beta = \sup Y = \sup X$.

Рассмотрим второй случай. В отличие от первого случая будем рассматривать приближения по избытку.

На первом шаге аналогично первому случаю сформируем множество Y, состоящее из тех чисел множества X, у которых приближение по недостатку нулевого порядка максимально (пусть оно равно $\bar{b}_0$). Ясно, что $\bar{b}_0 \leqslant -1$. Через Y'_n обозначим множество приближений по избытку порядка $n \geqslant 1$ чисел из множества Y. Каждое множество Y'_n имеет максимальный элемент β'_n. Существует такая последовательность цифр $b_1, \ldots, b_n, \ldots,$ каждая из которых является натуральным числом от 0 до 9 и

$$\beta'_1 = -b_0, b_1;$$

$$\beta'_2 = -b_0, b_1 b_2;$$

$$\ldots;$$

$$\beta'_n = -b_0, b_1 \ldots b_n;$$

$$\ldots,$$

где $b_0 = -\bar{b}_0 - 1$. Ясно, что $b_0 \geqslant 0$, а $-b_0$ – максимальное из приближений по избытку порядка 0 чисел множества X. Построим действительное число

$$\beta = -b_0, b_1 \ldots b_n \ldots .$$

Убедимся, что $\beta = \sup Y$. Возьмем произвольный элемент $y \in Y$. Для его приближения по избытку порядка n выполнено

$$y'_n \leqslant \beta'_n.$$

Поскольку $y'_n = y_n + 10^{-n}$, $\beta'_n = \beta_n + 10^{-n}$, то аналогичное неравенство выполняется и для приближений по недостатку чисел y и β, т. е.

$$y_n \leqslant \beta_n.$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при любом n, то $y \leqslant \beta$.

Возьмем произвольное действительное число $\gamma < \beta$. Из критерия различия чисел вытекает существование такого индекса k, что

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \beta_k.$$

Из определения множества Y'_k вытекает, что существует такой элемент $\bar{y} \in Y$, что для его приближения по избытку порядка k выполняется неравенство $\bar{y}'_k = \beta'_k$. Тогда $\bar{y}_k = \beta_k$, т. е.

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \bar{y}_k.$$

Следовательно, по критерию различия чисел имеем $\gamma < \bar{y}$. Таким образом, $\beta = \sup Y = \sup X$.

Доказательство теоремы для ограниченного снизу непустого множества X проводится аналогичным образом.

□

Замечание 2.1. Если множество X не ограничено сверху, то полагают $\sup X = +\infty$. Если множество X не ограничено снизу, то полагают $\inf X = -\infty$.

Теорема 2.2 (правило сравнения действительных чисел). *Любые два действительных числа* α *и* β *связаны между собой только одним из трех знаков: «меньше»,«равно», «больше».*

◊

Любое отрицательное число строго меньше любого неотрицательного числа. Действительно, если $\beta = b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$ – неотрицательное действительное число, а $\alpha = -a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ – отрицательное число и первая отличная от нуля цифра в записи числа α имеет индекс n, т. е. $a_i = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, $a_n \geqslant 1$, тогда $\alpha_n = -a_0, a_1 \ldots (a_n + 1)$, $a_n + 1 \geqslant 2$ и, следовательно, $\alpha_n + 2 \cdot 10^{-n} \leqslant \beta_n$. По критерию различия чисел $\alpha < \beta$.

Если все приближения по недостатку чисел α и β совпадают, то числа равны. Если знаки чисел совпадают и в представлениях чисел есть различные цифры, то находим наименьший порядок приближений по недостатку этих чисел, у которых последние цифры различны, а все предыдущие – совпадают. Далее рассмотрим случай двух неотрицательных чисел (для двух отрицательных чисел дальнейшие рассуждения аналогичны). Пусть $\alpha = a_0, a_1 \ldots a_{n-1} a_n$, $\beta = a_0, a_1 \ldots a_{n-1} b_n$, $a_n \neq b_n$. Если $a_n < b_n$, то из определений 1.3, 1.4 и свойств приближений по недостатку следует, что $\alpha_i < \beta_i$ $\forall i > n$ и, следовательно, $\alpha \leqslant \beta$. Далее определяем, на сколько единиц отличаются цифры a_n и b_n. Если окажется, что $b_n \geqslant a_n + 2$, то $\alpha_n + 2 \cdot 10^{-n} \leqslant \beta_n$ и из критерия различия чисел вытекает $\alpha < \beta$. В случае $\alpha_n + 10^{-n} = \beta_n$ переходим к рассмотрению приближений по недостатку $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ порядка $n+1$. Если $\alpha_{n+1} + 2 \cdot 10^{-n+1} \leqslant \beta_{n+1}$, то $\alpha < \beta$. В случае $\alpha_{n+1} + {}$ $+10^{-(n+1)} = \beta_{n+1}$ переходим к рассмотрению $\alpha_{n+2}, \beta_{n+2}$ и т. д. Если на некотором шаге выполняется неравенство (1.1), то $\alpha < \beta$. В противном случае получаем $|\alpha_i - \beta_i| \leqslant 10^{-i}$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$, и в этом случае по определению 1.3 $\alpha = \beta$.

□

Определим арифметические операции над действительными числами.

1. *Сумма действительных чисел.* Пусть α и β — два действительных числа. Существуют такие рациональные числа r, r', s, s', что

$$r \leqslant \alpha \leqslant s, \quad r' \leqslant \beta \leqslant s'. \tag{2.1}$$

Суммой двух действительных чисел α и β называют такое действительное число γ, что выполняются неравенства

$$r + r' \leqslant \gamma \leqslant s + s' \tag{2.2}$$

для любых рациональных чисел r, r', s, s', удовлетворяющих неравенствам (2.1). Сумма чисел α и β обозначается $\alpha + \beta$.

Теорема 2.3. *Для любых действительных чисел их сумма существует и единственна.*

◇

Для любых рациональных чисел r, r', s, s', удовлетворяющих неравенствам (2.1), имеем $r + r' \leqslant s + s'$. Множество X сумм $r + r'$ ограничено сверху, и согласно теореме о гранях существует точная верхняя грань $\sup X = \gamma$. Убедимся, что γ удовлетворяет неравенствам (2.2). Левое неравенство выполняется, так как все числа из X не могут превосходить верхней грани. Правое неравенство также выполняется, так как $\sup X$ не может быть больше ни одной из верхних граней этого множества. Таким образом, γ – сумма чисел.

Покажем единственность суммы. Пусть существуют две суммы $\gamma, \bar{\gamma}$ и $\gamma < \bar{\gamma}$. По критерию различия действительных чисел существует такое натуральное число k, что

$$\gamma_k + 2 \cdot 10^{-k} \leqslant \bar{\gamma}_k, \tag{2.3}$$

где $\gamma_k, \bar{\gamma}_k$ — приближения по недостатку порядка k чисел $\gamma, \bar{\gamma}$. Возьмем приближения по избытку $\alpha'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \gamma'_{k+1}, \bar{\gamma}'_{k+1}$ и по недостатку $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \gamma_{k+1}, \bar{\gamma}_{k+1}$ порядка $k+1$ чисел $\alpha, \beta, \gamma, \bar{\gamma}$:

$$\alpha_{k+1} \leqslant \alpha \leqslant \alpha'_{k+1}, \quad \beta_{k+1} \leqslant \beta \leqslant \beta'_{k+1}.$$

Поскольку сумма чисел существует, то, используя свойства приближений по недостатку и избытку и неравенство (2.3), получим неравенства

$$\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \leqslant \gamma < \bar{\gamma} \leqslant \alpha'_{k+1} + \beta'_{k+1} = \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} + 2 \cdot 10^{-(k+1)};$$

$$\bar{\gamma}_{k+1} - \gamma_{k+1} \geqslant 10 \cdot 10^{-(k+1)};$$

$$\gamma \leqslant \gamma_{k+1} + 10^{-(k+1)}, \quad \bar{\gamma}_{k+1} \leqslant \bar{\gamma},$$

из которых следует противоречивое соотношение $2 \cdot 10^{-(k+1)} \geqslant 9 \cdot 10^{-(k+1)}$, что доказывает единственность суммы двух действительных чисел.

□

2. *Умножение действительных чисел.* Пусть α и β — два положительных действительных числа. Существуют такие рациональные числа r, r', s, s', что

$$0 < r \leqslant \alpha \leqslant s, \quad 0 < r' \leqslant \beta \leqslant s'. \tag{2.4}$$

Произведением двух действительных чисел α и β называют такое действительное число γ, что выполняются неравенства

$$rr' \leqslant \gamma \leqslant ss' \tag{2.5}$$

для любых рациональных чисел r, r', s, s', удовлетворяющих неравенствам (2.4). Произведение чисел α и β обозначается $\alpha\beta$.

Теорема 2.4. *Для любых положительных действительных чисел их произведение существует и единственно.*

Доказательство теоремы проводится так же, как доказательство существования и единственности суммы действительных чисел.

Произведение любых двух действительных чисел α, β определяется следующим образом:

1) если $\alpha = 0$, то $\alpha\beta = 0\ \forall\beta \in \mathbb{R}$;

2) если $\alpha < 0$, $\beta < 0$, то $\alpha\beta = |\alpha||\beta|$;

3) если $\alpha > 0$, $\beta < 0$ или $\alpha < 0, \beta > 0$, то $\alpha\beta = -|\alpha||\beta|$.

Операции сложения и умножения действительных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции для рациональных чисел.

Приведем основные свойства действительных чисел:

1) из $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$ вытекает, что $\alpha > \gamma$ – свойство транзитивности знака «больше»; из $\alpha = \beta$ и $\beta = \gamma$ вытекает, что $\alpha = \gamma$ – свойство транзитивности знака «равно»;

2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ – свойство коммутативности сложения;

3) $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$ – свойство ассоциативности сложения;

4) $\alpha\beta = \beta\alpha$ – свойство коммутативности умножения;

5) $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$ – свойство ассоциативности умножения;

6) $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ – свойство дистрибутивности сложения и умножения;

7) $\alpha + 0 = \alpha\ \ \forall\alpha \in \mathbb{R}$;

8) $\alpha\cdot 1 = \alpha\ \ \forall\alpha \in \mathbb{R}$;

9) для любого действительного числа α существует такое противоположное число α', что $\alpha + \alpha' = 0$;

10) для любого действительного числа $\alpha \neq 0$ существует такое обратное число α', что $\alpha\alpha' = 1$;

11) из $\alpha > \beta$ вытекает, что $\alpha+\gamma > \beta+\gamma\ \ \forall\gamma \in \mathbb{R}$;

12) из $\alpha > \beta$ и $\gamma > 0$ вытекает, что $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

Докажем первую часть первого свойства. Согласно критерию различия чисел найдутся такие натуральные числа k и m, что для соответствующих приближений по недостатку имеем $\alpha_k \geqslant \beta_k + 2\cdot 10^{-k}$, $\beta_m \geqslant \gamma_m + 2\cdot 10^{-m}$. Рассмотрим случай, когда оба числа неотрицательны и $k > m$. Другие случаи рассматриваются аналогичным образом. Из четвертого свойства приближений по недостатку следует, что $\beta_k > \gamma_k$. Таким образом, $\alpha_k \geqslant \gamma_k + 2\cdot 10^{-k}$. По критерию различия $\alpha > \gamma$.

Из второго – шестого свойств проверим лишь свойство ассоциативности сложения.

Обозначим $a = \alpha + (\beta + \gamma)$, $b = (\alpha + \beta) + \gamma$ и покажем, что $a = b$. Предположим противное: $a \neq b$, и пусть $a < b$. Согласно критерию различия чисел существует такое $k \in \mathbb{N}_0$, что $a_k \leqslant b_k - 2 \cdot 10^{-k}$, отсюда $a_{k+1} \leqslant b_{k+1} - 10 \cdot 10^{-(k+1)}$, где $a_k, b_k, a_{k+1}, b_{k+1}$ – приближения по недостатку порядка k и $k+1$ чисел a, b соответственно. Возьмем приближения по избытку $\alpha'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \gamma'_{k+1}$ и по недостатку $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \gamma_{k+1}$ порядка $k+1$ чисел α, β, γ :

$$\alpha_{k+1} \leqslant \alpha \leqslant \alpha'_{k+1}; \quad \beta_{k+1} \leqslant \beta \leqslant \beta'_{k+1}; \quad \gamma_{k+1} \leqslant \gamma \leqslant \gamma'_{k+1}.$$

Из определения суммы получаем

$$\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} \leqslant \alpha + \beta \leqslant \alpha'_{k+1} + \beta'_{k+1};$$

$$\gamma_{k+1} + \beta_{k+1} \leqslant \gamma + \beta \leqslant \gamma'_{k+1} + \beta'_{k+1}.$$

Отсюда следует

$$(\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}) + \gamma_{k+1} \leqslant (\alpha + \beta) + \gamma \leqslant (\alpha'_{k+1} + \beta'_{k+1}) + \gamma'_{k+1};$$

$$\alpha_{k+1} + (\beta_{k+1} + \gamma_{k+1}) \leqslant \alpha + (\beta + \gamma) \leqslant \alpha'_{k+1} + (\beta'_{k+1} + \gamma'_{k+1}).$$

В силу ассоциативности сложения рациональных чисел левые части последних двух неравенств равны числу $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} + \gamma_{k+1} = c$, а правые – числу $\alpha'_{k+1} + \beta'_{k+1} + \gamma'_{k+1} = d$. Таким образом, $c \leqslant a < b \leqslant d$, $d - c = 3 \cdot 10^{-(k+1)}$, $a_{k+1} + 10 \cdot 10^{-(k+1)} \leqslant b_{k+1}$, $a \leqslant a_{k+1} + 10^{-(k+1)}$. Из приведенных выше цепочек неравенств вытекает противоречивое неравенство $3 \cdot 10^{-(k+1)} \geqslant 9 \cdot 10^{-(k+1)}$. Следовательно, $a = b$.

□

Перед тем как продолжить проверку свойств действительных чисел, докажем лемму и две теоремы, позволяющие ввести на множестве действительных чисел операции вычитания и деления.

Лемма 2.1. *Если X и Y — такие непустые множества действительных чисел, что для любых $x \in X, y \in Y$ справедливо неравенство $x \leqslant y$, то существуют конечные* $\sup X$, $\inf Y$ *и* $\sup X \leqslant \inf Y$.

$\diamondsuit$

Поскольку X — непустое множество, ограниченное сверху любым элементом множества Y, то по теореме о гранях существует конечная точная верхняя грань $\sup X$. Из ограниченности снизу множества Y любым элементом множества X следует существование конечной $\inf Y$. Любой элемент множества Y является верхней гранью множества X. Точная верхняя грань – это наименьшая из верхних граней. Значит, $\forall y \in Y \Rightarrow \sup X \leqslant y$. Из последнего неравенства следут, что $\sup X$ — нижняя грань множества Y, а $\inf Y$ — наибольшая из нижних граней множества Y. Значит, $\sup X \leqslant \inf Y$.

$\square$

Теорема 2.5. *Для любых действительных чисел* α *и* β *уравнение* $\alpha + x = \beta$ *имеет единственное решение.*

$\diamondsuit$

Пусть $\alpha_n, \beta_n, \alpha_n^{'}, \beta_n^{'}$ — приближения с недостатком и с избытком чисел α, β. Рассмотрим два множества рациональных чисел $X = \{\beta_n^{'} - \alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{\beta_n - \alpha_n^{'}, n \in \mathbb{N}\}$. Из свойств приближений чисел по недостатку и по избытку имеем $x \leqslant y \quad \forall x \in X, \forall y \in \in Y$. Из леммы 2.1 вытекает существование такого действительного числа x, что $\beta_n - \alpha_n^{'} \leqslant x \leqslant \beta_n^{'} - \alpha_n$. Из определения сложения имеем $\beta_n - \alpha_n^{'} + \alpha_n \leqslant \alpha + x \leqslant \beta_n^{'} - \alpha_n + \alpha_n^{'}$. Отсюда

$$\beta_n - 2 \cdot 10^{-n} \leqslant (\alpha + x)_n \leqslant \beta_n + 2 \cdot 10^{-n} \quad \forall n, \tag{2.6}$$

где $(\alpha + x)_n$ — приближение по недостатку порядка n числа $\alpha + x$. Предположим, что $\beta \neq \alpha + x$. Пусть $\alpha + x < \beta$. По критерию различия чисел существует такой индекс k, что $\beta_k - (\alpha + x)_k \geqslant 2 \cdot 10^{-k}$. Отсюда

$$\beta_{(k+1)} - (\alpha + x)_{k+1} \geqslant 10 \cdot 10^{-(k+1)}. \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.6) при $n = k + 1$ имеем

$$\beta_{(k+1)} - (\alpha + x)_{k+1} \leqslant 2 \cdot 10^{-(k+1)}. \tag{2.8}$$

Неравенство (2.8) противоречит неравенству (2.7). Следовательно, $\alpha + x = \beta$. Существование решения уравнения доказано, а доказательство его единственности предоставляется читателям. $\square$

Пусть α и β – произвольные действительные числа. Согласно теореме 2.5 уравнение $\alpha + x = \beta$ имеет единственное решение. Это решение называется разностью чисел β и α и обозначается $\beta - \alpha$.

Теорема 2.6. *Пусть* α, β *— два действительных числа,* $\alpha \neq \neq 0$, *тогда уравнение* $\alpha x = \beta$ *имеет единственное решение.*

$\diamondsuit$

Рассмотрим сначала случай $\alpha > 0, \beta = 1$. Пусть $\alpha_n, \alpha_n^{'}$ — приближения числа α с недостатком и избытком соответственно. Поскольку $\alpha > 0$, то найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $\alpha_m > 10^{-m}$. Зафиксируем m и рассмотрим множества рациональных чисел вида

$$\frac{1}{\alpha_{n+m}^{'}}, \quad \frac{1}{\alpha_{n+m}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первое множество обозначим через X, а второе – через Y. Для любых $x \in X, y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$. Из предыдущей теоремы следует, что $\sup X \leqslant \inf Y$. Существует такое действительное число x, что $\sup X \leqslant x \leqslant \inf Y$. Число x удовлетворяет условию

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_{n+m}^{'}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\alpha_{n+m}}.$$

Поскольку $\alpha_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha_n^{'}$, то из определения произведения действительных чисел следует, что для любых $n \in \mathbb{N}$

$$1 - 10^{-n} \leqslant \frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_{n+m}^{'}} \leqslant \alpha x \leqslant \frac{\alpha_{n+m}^{'}}{\alpha_{n+m}} \leqslant 1 + 10^{-n}.$$

Отсюда вытекает

$$|1 - \alpha x| \leqslant 10^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Следовательно, $|1 - \alpha x| = 0$. Таким образом, $\alpha x = 1$, т. е. $x = \dfrac{1}{\alpha}$.

Если $\alpha < 0$, то полагаем $\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{1}{|\alpha|}$.

Пусть α и β – произвольные действительные числа и $\alpha \neq 0$. Пользуясь свойствами умножения, легко увидеть, что число $x = = \beta \dfrac{1}{\alpha}$ является решением уравнения $\alpha x = 1$. Покажем, что это решение единственно. Если $\alpha x = 1, \alpha y = 1$, то $\alpha(x - y) = 0$. Так как $\alpha \neq 0$, то $x = y$.

$\square$

Пусть α и β – произвольные действительные числа. Согласно теореме 2.6 уравнение $\alpha x = \beta$ при $\alpha \neq 0$ имеет единственное решение. Это решение называется частным от деления чисел β и α и обозначается $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Возвратимся к доказательству свойств действительных чисел. Седьмое – десятое свойства вытекают из теорем 2.5, 2.6, отметим лишь, что противоположным числу α является число $\alpha' = 0 - -\alpha$, которое обозначается $-\alpha$, обратным числу α является число $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$.

Из одиннадцатого и двенадцатого свойст проверим одиннадцатое свойство. Двенадцатое свойство доказывается аналогичным образом. Поскольку $\alpha > \beta$, то существует такое натуральное число k, что $\alpha_k > \beta_k + 2 \cdot 10^{-k}$. Отсюда $\alpha_{k+1} > \beta_{k+1} + 10 \cdot 10^{-(k+1)}$. Приближения по недостатку и избытку $\gamma_{k+1}, \gamma'_{k+1}$ числа γ удовлетворяют неравенствам $\gamma_{k+1} \leqslant \gamma \leqslant \gamma'_{k+1} = \gamma_{k+1} + 10^{-(k+1)}$. Из последних двух цепочек неравенств и определения суммы двух действительных чисел имеем

$$\alpha+\gamma > \alpha_{k+1}+\gamma_{k+1}-2\cdot 10^{-(k+1)} > \beta_{k+1}+\gamma_{k+1}+7\cdot 10^{-(k+1)} > \beta+\gamma.$$

Из свойства транзитивности знака «больше» вытекает требуемое неравенство: $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Замечание 2.2. Введенные операции сравнения, сложения и умножения на множестве действительных чисел и установленные свойства действительных чисел показывают, что множество $\mathbb{R}$ является упорядоченным полем (подробное изучение полей будет дано в курсе «Алгебра», который читается студентам параллельно с курсом «Математический анализ»).

Вывод. Действительные числа обладают всеми основными свойствами рациональных чисел. Следовательно, для действительных чисел верны все правила, относящиеся к арифметическим действиям и операциям с неравенствами над рациональными числами.

3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Числовой последовательностью называют пронумерованную бесконечную совокупность чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

(далее будем обозначать такую последовательность через (a_n)).

Последовательность (a_n) называется *ограниченной*, если множество $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ является ограниченным.

Удалим из последовательности (a_n) k первых членов. Полученную бесконечную совокупность чисел

$$a_{k+1}, a_{k+2},\ \ldots$$

называют *остатком последовательности* (a_n).

Очевидно, что из ограниченности некоторого остатка следует ограниченность всей последовательности, и наоборот, из ограниченности последовательности вытекает ограниченность любого остатка этой последовательности.

Определение 3.1. Последовательность (a_n) называется сходящейся, если существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \varepsilon.$$

В противном случае последовательность (a_n) называется *расходящейся.* Если последовательность (a_n) сходится, то число a называется *пределом последовательности* (a_n), пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Приведем геометрическую интерпретацию предела последовательности.

Геометрически выражение «a предел последовательности (a_n)» означает, что, какая бы ε-окрестность $U_\varepsilon(a) = \{x : |x - a| \leqslant \varepsilon\}$ точки a ни была выбрана, все члены некоторого остатка последовательности попадут в эту окрестность $U_\varepsilon(a)$ (рис. 1).

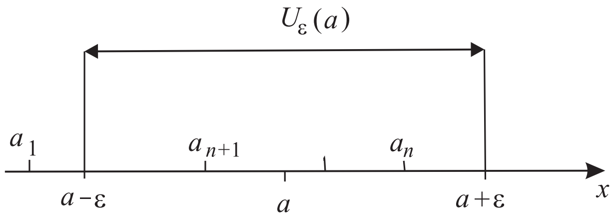

Рис. 1. Предел последовательности

Сформулируем отрицание к утверждению P: последовательность a_n сходится к a, $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

При построении отрицания к математическому утверждению применяют *правило Де Моргана*:

1) каждый квантор $\forall$ заменяется на квантор $\exists$;

2) каждый квантор $\exists$ заменяется на квантор $\forall$;

3) заключение P утверждения заменяется на его отрицание $\urcorner P$.

Формальная запись отрицания к утверждению P, сформулированному перед правилом Де Моргана, выглядит следующим образом:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \geqslant n \Rightarrow |a_{n_0} - a| > \varepsilon_0.$$

Для удобства чтения формальных записей здесь и далее в аналогичных ситуациях будем наделять нулевым индексом символы, относящиеся к кванторам существования.

Далее проиллюстрируем исследование сходимости последовательности на основе определения.

Пример 3.1. Докажем, что $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство

$$|\sqrt[n]{n} - 1| \leqslant \varepsilon.$$

Данное неравенство можно переписать в следующем виде:

$$n \leqslant (1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n.$$

Для выполнения последнего неравенства достаточно, чтобы имело место неравенство

$$n \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2,$$

откуда находим $n \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon^2} + 1 := n_0(\varepsilon)$.

Пример 3.2. Докажем, что $(-1)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 1$.

Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$ (например $\varepsilon_0 = 1/2$), что для любого натурального числа n существует n_0, например первое нечетное число, не меньшее, чем n. При таком выборе чисел ε и n_0 имеем

$$|(-1)^{n_0} - 1| = 2 > \varepsilon_0.$$

Отсюда следут требуемое утверждение.

Лемма 3.1 (M-лемма). *Если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leqslant M\varepsilon$ *, где* M *— некоторая положительная постоянная, не зависящая от* ε *и* n*, то* $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. Пусть $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{M}$. Из условия леммы находим такое число $n_0(\varepsilon_1/M)$, что при всех $n \geqslant n_0(\varepsilon_1/M)$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| \leqslant M\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Отсюда вытекает, что в качестве числа n_0 из определения сходимости можно выбрать число $n_0(\varepsilon_1/M)$.

$\square$

Говорят, что последовательность (a_n) *бесконечно малая*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Свойство 3.1. Сходящаяся последовательность имеет лишь один предел.

$\diamondsuit$

Предположим, что у последовательности (a_n) есть два различных предела: a и b. Тогда последовательности (α_n), (β_n) являются бесконечно малыми, где

$$\alpha_n = a_n - a,\ \ \beta_n = a_n - b.$$

Для любых n имеем

$$|a-b| = |\alpha_n - \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Поскольку последовательности (α_n), (β_n) бесконечно малые, то можно найти такой номер n_0, для которого

$$|\alpha_n| \leqslant \frac{|a-b|}{4},\ \ |\beta_n| \leqslant \frac{|a-b|}{4}$$

при всех $n \geqslant n_0$.

Тогда при всех $n \geqslant n_0$ получим

$$|a-b| \leqslant \frac{|a-b|}{2},$$

что невозможно для $a \neq b$.

$\square$

Свойство 3.2. Сходящаяся последовательность ограничена.

$\diamondsuit$

Возьмем $\varepsilon = 1$ в определении предела, получаем

$$a - 1 \leqslant a_n \leqslant a + 1$$

для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Таким образом, нашелся остаток последовательности, который ограничен, поэтому ограничена вся последовательность.

$\square$

Свойство 3.3 (арифметические действия со сходящимися последовательностями). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ в предположении, что $b_n \neq 0\ \ \forall n$, $b \neq 0$.

$\diamondsuit$

Докажем первое утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0'(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0'(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \varepsilon;$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0''(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0''(\varepsilon) \Rightarrow |b_n - b| \leqslant \varepsilon,$$

тогда для любых $n \geqslant \max\{n_0'(\varepsilon), n_0''(\varepsilon)\}$ имеем

$$|a_n + b_n - a - b| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \leqslant 2\varepsilon.$$

Затем, применяя M-лемму, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Докажем второе утверждение.

Из сходимости последовательностей (a_n), (b_n) вытекает их ограниченность:

$$|a_n| \leqslant M,\ |b_n| \leqslant M\ \forall n.$$

Для любых $n \geqslant \max\{n_0'(\varepsilon), n_0''(\varepsilon)\}$ имеем

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leqslant (M + b)\varepsilon.$$

Согласно M-лемме получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

Докажем третье утверждение.

Найдется такое число $n_0''(|b|/2)$, что для любого $n \geqslant n_0''(|b|/2)$ имеем

$$|b_n - b| \leqslant \frac{|b|}{2}.$$

Отсюда получаем, что для таких n выполнено

$$||b_n| - |b|| \leqslant |b_n - b| \leqslant \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{|b|}{2} \leqslant |b_n| \leqslant \frac{3|b_n|}{2}.$$

Затем для всех $n \geqslant \max\{n_0'(\varepsilon), n_0''(\varepsilon), n_0''(|b|/2)\}$ получаем

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{b} + \frac{a_n}{b} - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{|a_n||b_n - b|}{|bb_n|} + \frac{|a_n - a|}{|b|} \leqslant \left(\frac{2M}{|b|^2} + \frac{1}{|b|}\right)\varepsilon.$$

Требуемое утверждение вытекает из M-леммы.

$\square$

Свойство 3.4. Если $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $b_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ и $a_n \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $a \leqslant b$.

$\diamondsuit$

Предположим противное: $a > b$. Найдется такое $\varepsilon > 0$, что $a - \varepsilon > b + \varepsilon$. Для достаточно больших n $a_n \geqslant a - \varepsilon$ и $b_n \leqslant b + \varepsilon$, поэтому $a_n > b_n$, что противоречит условию.

$\square$

Свойство 3.5. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

$\diamondsuit$

Пусть $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и $|b_n| \leqslant M \quad \forall n$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |a_n b_n| \leqslant M\varepsilon.$$

$\square$

Свойство 3.6 (лемма о зажатой последовательности). Пусть $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n \quad \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = d$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = d$.

$\diamondsuit$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = d$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0'(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0'(\varepsilon) \Rightarrow d - \varepsilon \leqslant b_n \leqslant d + \varepsilon;$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0''(\varepsilon) > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0''(\varepsilon) \Rightarrow d - \varepsilon \leqslant c_n \leqslant d + \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что для всех $n \geqslant \max\{n_0'(\varepsilon), n_0''(\varepsilon)\}$ выполняется неравенство

$$d - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant d + \varepsilon.$$

$\square$

4. СХОДИМОСТЬ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность (a_n) называется *строго возрастающей*, если

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots .$$

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots .$$

Аналогичным образом определяются строго убывающие и убывающие последовательности.

Возрастающие и убывающие последовательности относят к *монотонным*, а строго возрастающие и строго убывающие – к *строго монотонным*.

Теорема 4.1 (о сходимости монотонной ограниченной последовательности). *Каждая монотонная и ограниченная последовательность сходится.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для возрастающей последовательности (a_n). По теореме о гранях

$$\exists \sup\{a_n\} = a \in \mathbb{R}.$$

Из определения точной верхней грани вытекает, что

$$a_n \leqslant a \ \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon.$$

Отсюда и из монотонности последовательности (a_n) вытекает, что

$$a_n > a - \varepsilon \ \forall n \geqslant n_\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) = n_\varepsilon : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leqslant a < a + \varepsilon,$$

т. е. $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\square$

Замечание 4.1. Из доказательства теоремы вытекает, что для сходимости возрастающей последовательности достаточно ее ограниченности сверху, а для сходимости убывающей последовательности – ограниченности снизу, причем для возрастающей последовательности (a_n) имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$, а для убывающей – $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf a_n$.

Замечание 4.2. Пусть α — неотрицательное действительное число. Для числа $\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ построим последовательности приближений по недостатку $(\alpha_n) = (a_0, a_1 a_2 ... a_n)$ и по избытку $(\alpha_n^{'}) = (a_0, a_1 a_2 ... a_n + 10^{-n})$, $\alpha_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha_n^{'}$. Последовательность (α_n) является монотонно возрастающей и ограниченной сверху, например приближением по избытку нулевого порядка $a_0 + 1$, а последовательность $(\alpha_n^{'})$ — монотонно убывающей, ограниченной снизу, например приближением по недостатку нулевого порядка a_0. По теореме о монотонной ограниченной последовательности $\exists \beta \in \mathbb{R} : \beta = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \sup \alpha_n$; $\exists \gamma \in \mathbb{R} : \gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n^{'} = \inf \alpha_n^{'}$. Отсюда, используя свойство 3.4 последовательностей, получаем неравенства

$$\alpha_n \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \gamma \leqslant \alpha_n^{'}.$$

Поскольку $|\alpha_n^{'} - \alpha_n| = 10^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то $\beta = \alpha = \gamma$.

Последовательность (a_n) называется *бесконечно большой*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| \geqslant \varepsilon.$$

В таком случае говорят, что последовательность a_n имеет *бесконечный предел*: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (однако такие последовательности не относятся к сходящимся!). Другими словами, последовательность бесконечно большая, если, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни было выбрано, найдется такое число $n_0(\varepsilon) > 0$, что все члены последовательности с номерами, большими $n_0(\varepsilon)$, находятся вне ε-окрестности нуля (рис. 2).

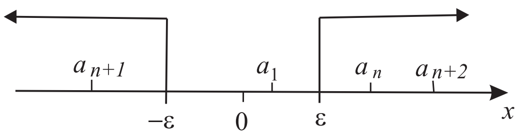

Рис. 2. Бесконечно большая последовательность

Выделяют два типа бесконечно больших последовательностей:

1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow a_n \geqslant \varepsilon$;

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow a_n \leqslant -\varepsilon$.

В первом случае говорят, что (a_n) имеет предел $+\infty$, а во втором случае – предел $-\infty$.

Пусть (a_n) – последовательность, члены которой отличны от нуля. Из определения предела имеем: чтобы последовательность (a_n) была бесконечно большой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ была бесконечно малой.

Свойство 4.1 (арифметические действия с бесконечно большими и сходящимися последовательностями).

1. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty$, тогда

$$а) \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \infty;$$

$$б) \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \infty,\ \text{если } a \neq 0;$$

$$в) \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,\ \text{если } b_n \neq 0\ \forall n;$$

$$г) \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty,\ \text{если } a_n \neq 0\ \forall n.$$

2. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, тогда

$$а) \lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty;$$

$$б) \lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = +\infty.$$

$\diamondsuit$

Докажем только свойство 1,б. Доказательство остальных свойств проводится аналогичным образом. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a >$ > 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \infty$, то

$$\varepsilon = a/2 \ \exists n_0(a/2) : \forall n \geqslant n_0(a/2) \Rightarrow a/2 \leqslant a_n \leqslant \frac{3a}{2};$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |b_n| > \varepsilon.$$

Отсюда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}_0(\varepsilon) = \max\{n_0(a/2), n_0(\varepsilon)\} : \forall n \geqslant \bar{n}_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n b_n| \geqslant \varepsilon a/2,$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = \infty$.

$\square$

Замечание 4.3. Если последовательность (a_n) возрастающая и неограниченная сверху, то, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы о сходимости монотонной ограниченной последовательности, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

если последовательность (a_n) убывающая и неограниченная снизу, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Таким образом, любая монотонная последовательность имеет предел (который может быть бесконечным определенного знака).

Рассмотрим последовательность (a_n). Если из нее удалим часть элементов так, чтобы осталось бесконечно много членов, то получим подпоследовательность исходной последовательности:

$$a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, \ldots, \text{где } n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots .$$

Теорема 4.2 (о выборе монотонной подпоследовательности). *Из любой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.*

$\diamondsuit$

Любая последовательность обладает одним из двух свойств:

1) каждый остаток последовательности имеет наибольший элемент;

2) существует остаток последовательности, не имеющий наибольшего элемента.

В первом случае можно выбрать монотонно убывающую подпоследовательность. Пусть a_{n_1} – максимальный элемент всей последовательности, a_{n_2} – максимальный элемент остатка

$$a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots,$$

a_{n_3} – максимальный элемент остатка

$$a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \dots$$

и т. д. Поскольку максимальный элемент последовательности не меньше, чем максимальный элемент ее остатка, то

$$a_{n_1} \geqslant a_{n_2} \geqslant a_{n_3} \geqslant \dots .$$

Таким образом, выбрана убывающая подпоследовательность.

Во втором случае можно выбрать возрастающую подпоследовательность. Рассмотрим остаток последовательности, не имеющий максимального элемента:

$$a_m, a_{m+1}, \dots .$$

Тогда и все последующие остатки не имеют максимального элемента. Положим $a_{n_1} = a_m$. В остатке $a_m, a_{m+1}, \dots$ нет максимального элемента, поэтому в нем найдется элемент a_{n_2} больший, чем a_{n_1}. Затем рассмотрим остаток, начинающийся с номера n_2, и в нем выберем $a_{n_3} > a_{n_2}$ и т. д. Таким образом, выберем возрастающую подпоследовательность

$$a_{n_1} < a_{n_2} < \dots .$$

$\square$

Теорема 4.3 (принцип выбора). *Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

$\diamondsuit$

Пусть (a_n) – ограниченная последовательность. На основании теоремы о выборе монотонной подпоследовательности найдется монотонная подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n). Очевидно, что (a_{n_k}) также является ограниченной. Тогда на основании теоремы о сходимости монотонной ограниченной последовательности выбранная подпоследовательность (a_{n_k}) сходится.

$\square$

Рассмотрим последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что последовательность (a_n) является возрастающей. Используя формулу бинома Ньютона, получим

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^{n-1} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!} \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогичным образом получим

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 \frac{1}{n+1} + C_{n+1}^2 \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots +$$

$$+ C_{n+1}^n \frac{1}{(n+1)^n} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Сравнивая первые $n+1$ слагаемых в правых частях равенств для a_n, a_{n+1}, видим, что каждое слагаемое для a_n не превосходит соответствующего слагаемого для a_{n+1}. Кроме того, a_{n+1} содержит дополнительное положительное слагаемое, стоящее на последнем месте. Отсюда можно сделать вывод, что $a_n < a_{n+1}$.

Докажем, что последовательность (a_n) ограничена сверху. Действительно,

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Таким образом, по теореме о сходимости монотонной ограниченной последовательности последовательность (a_n) имеет конечный предел, который обозначают через e.

Число e является иррациональным: $e = 2,71828\ldots$.

5. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КРИТЕРИЙ КОШИ

Определение 5.1. Последовательность (a_n) называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 5.1 (критерий Коши сходимости последовательности). *Для сходимости последовательности (a_n) необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

$\Diamond$

Необходимость. Пусть $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon/2) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon/2), \forall m \geqslant n_0(\varepsilon/2) \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ |a_m - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда с помощью неравенства треугольника получаем, что для всех n, $m \geqslant n_0(\varepsilon/2)$ выполняется

$$|a_n - a_m| = |a_n - a - a_m + a| \leqslant \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть (a_n) – фундаментальная последовательность, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| \leqslant \varepsilon.$$

Зафиксируем ε и $m \geqslant n_0(\varepsilon)$. Для любых $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ выполняется двойное неравенство

$$a_m - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant a_m + \varepsilon.$$

Таким образом, остаток последовательности (a_n), начинающийся с номера большего $n_0(\varepsilon)$, ограничен. Тогда и ограничена вся последовательность (a_n).

На основании принципа выбора существует сходящаяся подпоследовательность (a_{n_k}) последовательности (a_n). Пусть $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} a$.

Из условия фундаментальности последовательности (a_n) имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n, n_k \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a_{n_k}| \leqslant \varepsilon.$$

При каждом фиксированном $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$a_{n_k} - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant a_{n_k} + \varepsilon,$$

получаем

$$a - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant a + \varepsilon \ \forall n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

что означает сходимость $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

□

Замечание 5.1. Определение фундаментальной последовательности (a_n) можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \geqslant n_0(\varepsilon), \ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| \leqslant \varepsilon.$$

Сформулируем определение нефундаментальной последовательности: последовательность (a_n) нефундаментальна, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \geqslant n, \ \exists p_0 \in \mathbb{N} \ \Rightarrow |a_{n_0} - a_{n_0+p_0}| > \varepsilon_0.$$

Пример 5.1. Докажем, что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \ldots + \frac{\cos n}{2^n}$$

является сходящейся.

Убедимся, что последовательность (a_n) фундаментальная. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство

$$|a_n - a_{n+p}| = \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Увеличим левую часть неравенства, заменив модуль суммы на сумму модулей, а каждый из косинусов – на единицу. Приходим к неравенству

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} \leqslant \varepsilon,$$

из которого вытекает предыдущее неравенство. Дополним левую часть последнего неравенства до бесконечной геометрической прогрессии и найдем ее сумму. Получим неравенство

$$\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon,$$

из которого вытекает предыдущее неравенство. Из приведенных выше неравенств следует, что для любых $n \geqslant n_0(\varepsilon) = [\log_2(1/\varepsilon)] + 1$, $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|a_n - a_{n+p}| \leqslant \varepsilon,$$

что влечет фундаментальность последовательности (a_n), а следовательно, и ее сходимость.

Пример 5.2. Докажем, что последовательность

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

является расходящейся.

В силу критерия Коши достаточно показать, что последовательность (a_n) не является фундаментальной.

Пусть $\varepsilon_0 = 1/4$. Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и подберем такие номера $n_0 \geqslant n$, $p_0 \geqslant 1$, что выполняется неравенство

$$|a_{n_0} - a_{n_0+p_0}| = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n_0+p_0} > \varepsilon_0.$$

Положим $n_0 = n$, $p_0 = n$ и оценим

$$\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \ldots + \frac{1}{n_0+p_0} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Таким образом, рассматриваемая последовательность не является фундаментальной и, следовательно, расходится.

Рассмотрим произвольную последовательность (a_n). Частичным пределом последовательности (a_n) называется предел a (конечный или бесконечный определенного знака) некоторой ее подпоследовательности (a_{n_k}). Обозначим через L множество всех частичных пределов последовательности (a_n), включая $+\infty$ и $-\infty$, если они являются частичными пределами. Если последовательность не ограничена сверху, то из нее можно выбрать подпоследовательность (a_{n_k}), имеющую предел $+\infty$. Действительно, у не ограниченной сверху последовательности любой остаток не ограничен сверху. Существует такой член последовательности, что $a_{n_1} \geqslant 1$. У остатка, начинающегося с номера $n_1 + 1$, найдется элемент a_{n_2} со свойствами $a_{n_2} \geqslant a_{n_1}$, $a_{n_2} \geqslant 2$ и т. д. В результате построим монотонно возрастающую не ограниченную сверху подпоследовательность (a_{n_k}). Ее предел равен $+\infty$. Если множество L не содержит элемент $+\infty$, то последовательность ограничена сверху. Если ограниченная сверху последовательность не ограничена снизу, то множество L содержит элемент $-\infty$. Если же множество L, соответствующее этой последовательности, не содержит $-\infty$, то последовательность ограничена снизу и, следовательно, является ограниченной. Если последовательность ограничена, то из принципа выбора вытекает, что множество L является непустым и ограниченным. В этом случае согласно теореме о гранях существуют конечные точная верхняя и точная нижняя грани множества L.

Верхним пределом последовательности (a_n) называют $\sup L$ – точную верхнюю грань множества L, если множество $L \setminus \{-\infty\}$

непусто и ограничено сверху; символ $+\infty$, если множество L содержит элемент $+\infty$. *Нижним пределом* последовательности (a_n) называют $\inf L$, если множество $L \setminus \{+\infty\}$ непусто и ограничено снизу; символ $-\infty$, если множество L содержит $-\infty$. Верхний и нижний пределы обозначают через $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Если множество L состоит из одного элемента $+\infty$, то по определению полагают $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$. Если множество состоит из одного элемента $-\infty$, то по определению полагают $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$.

Из определения верхнего и нижнего пределов последовательности следует, что любая последовательность (a_n) имеет верхний и нижний пределы. Например, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-1)^n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-1)^n = -1$.

Теорема 5.2 (критерий равенства верхнего и нижнего пределов). *Нижний и верхний пределы последовательности конечны и равны тогда и только тогда, когда последовательность является сходящейся, причем в этом случае*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$\diamondsuit$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n) = a \in \mathbb{R}$, тогда любая подпоследовательность последовательности (a_n) стремится к a. Следовательно, множество частичных пределов последовательности состоит из одного элемента a. Отсюда вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = a$.

Необходимость. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = a \in \mathbb{R}$. Предположим, что последовательность (a_n) не стремится к a. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ можно найти такой номер $n_0(k) \geqslant k$, что член последовательности $a_{n_0(k)}$ лежит за пределами ε_0-окрестности точки a. При этом индексы $n_0(k)$ можно выбрать так, чтобы $n_0(1) < n_0(2) < \dots$. Любой частичный предел подпоследовательности $(a_{n_0(k)})$ отличен от a, что противоречит совпадению верхнего и нижнего пределов последовательности. $\square$

6. ФУНКЦИЯ

Пусть заданы два непустых множества X, Y. Функцией, определенной на множестве X со значениями в Y, называют соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Пишут $f : X \to Y$ или $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$. При этом множество X называется множеством определения функции f (обозначают D_f), а Y – множеством, в котором находятся значения функции f.

Множеством значений функции $f : X \to Y$ называется множество

$$E_f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Вообще говоря, множество значений E_f может не совпадать с Y. Всегда $E_f \subseteq Y$.

Прообразом элемента $y \in Y$ при отображении $f : X \to Y$ называется множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Прообраз элемента $y \in Y$ может быть пустым множеством (если y не принадлежит E_f).

Если X и Y – числовые множества, то функция f называется вещественной (здесь и далее будем рассматривать вещественные функции). При этом будем считать, что $Y = \mathbb{R}$, если не сказано иное.

Графиком вещественной функции $f : X \to Y$ называется множество

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Функция $f : X \to Y$ называется сюръективной, если для любого $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ является непустым. Иными словами, сюръективность функции f означает, что множество значений E_f совпадает с Y.

Функция $f : X \to Y$ называется инъективной, если для любого $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ состоит не более чем из одного элемента. Иными словами, инъективность функции f означает, что она отображает различные элементы x_1, x_2 множества X в различные элементы y_1, y_2 множества Y.

Функция f называется биективной (или взаимно однозначной), если для любого $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ состоит ровно из одного элемента. Биективная функция является сюръективной и инъективной.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ является биективной. Тогда можно определить функцию $x = g(y)$, $y \in Y$, $x \in X$, где $g(y)$ совпадает с прообразом $f^{-1}(y)$. Такая функция $x = g(y)$ называется обратной к функции $y = f(x)$ и обозначается f^{-1}. Обратная функция $f^{-1} : Y \to X$ также является биективной. Отметим, что графики прямой и обратной вещественных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Пусть X, Y, Z – некоторые непустые числовые множества и заданы две функции $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Композицией функций (или сложной функцией) g и f называют функцию $h : X \to Z$, действующую по правилу

$$h(x) = g(f(x)),\ x \in X.$$

Композицию функций обозначают $h = g \circ f$. В частности, композиция биективной функции f и обратной функции f^{-1} является тождественной функцией.

Если $X = Y = Z$, то можно определить композиции $f \circ g$ и $g \circ f$, которые, вообще говоря, являются различными функциями.

Приведем примеры функций и их графики, которые известны из школьного курса математики.

1. *Линейная функция*: $y = kx + b$, $k, b \in \mathbb{R}$. Графиком линейной функции служит прямая (рис. 3), образующая такой угол φ с положительной частью оси $0x$, что $\mathrm{tg}\varphi = k$, и проходящая через точку $(0, b)$.

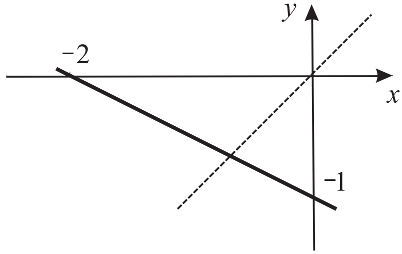

Рис. 3. Графики функций $y = x$ (пунктирная прямая) и $y = -x/2 - 1$

2. *Квадратичная функция*: $y = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq$ $\neq 0$. График квадратичной функции — парабола (рис. 4), вершина которой находится в точке $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$, пересекающаяся с осью $0y$ в точке $(0, c)$.

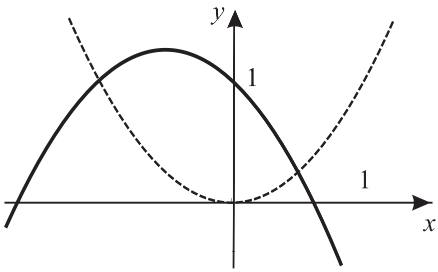

Рис. 4. Графики функций $y = x^2$ (пунктирная кривая) и $y = -x^2 - x + 1$

3. *Многочлен степени* n: $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_i \in$ $\in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ (рис. 5).

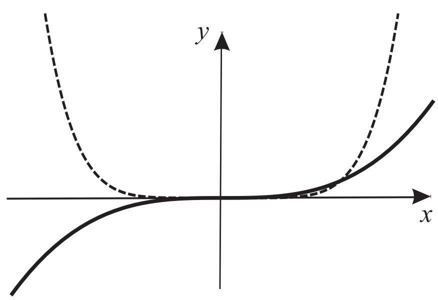

Рис. 5. Графики функций $y = x^3$ и $y = x^4$ (пунктирная кривая)

4. *Рациональная функция*: $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m, $m \neq 0$ (рис. 6).

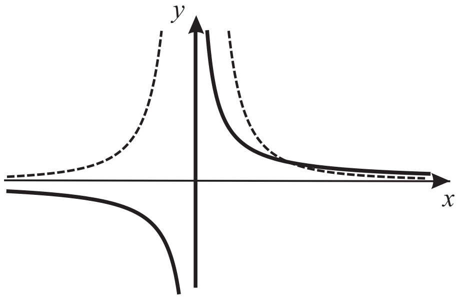

Рис. 6. Графики функций $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$ (пунктирная кривая)

5. *Тригонометрические функции*: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 7—10).

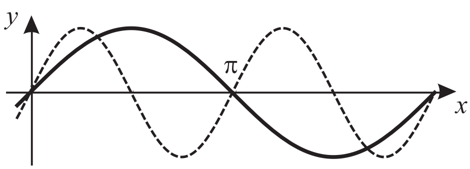

Рис. 7. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$ (пунктирная кривая)

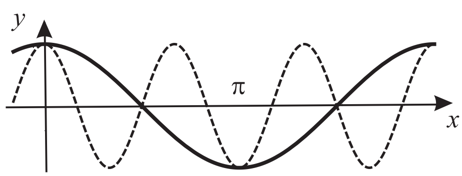

Рис. 8. Графики функций $y = \cos x$ и $y = \cos 3x$ (пунктирная кривая)

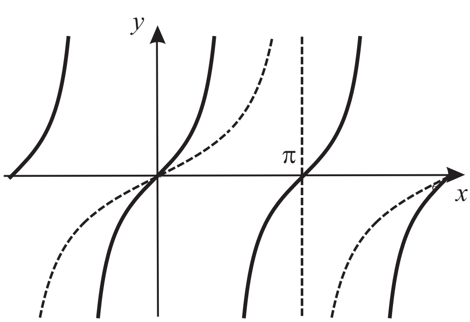

Рис. 9. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{tg}(x/2)$ (пунктирная кривая)

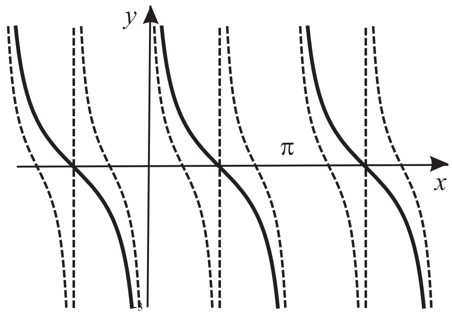

Рис. 10. Графики функций $y = \mathrm{ctg}x$ и $y = \mathrm{ctg}2x$ (пунктирная кривая)

Функции $y = \arcsin x$ (рис. 11), $y = \mathrm{arctg}\, x$ (рис. 12), $y = \mathrm{arcctg}\, x$ (рис. 13), $y = \arccos x$ являются обратными для функций $y = \sin x,\ x \in [-\pi/2,\ \pi/2]$; $y = \mathrm{tg}\, x,\ x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$; $y = \mathrm{ctg}\, x,\ x \in (0, \pi)$; $y = \cos x,\ x \in [0,\ \pi]$ соответственно.

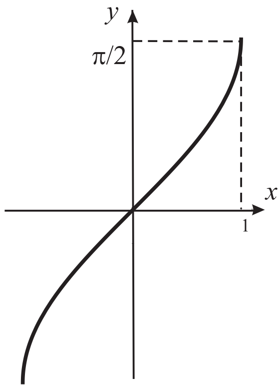

Рис. 11. График функции $y = \arcsin\ x$

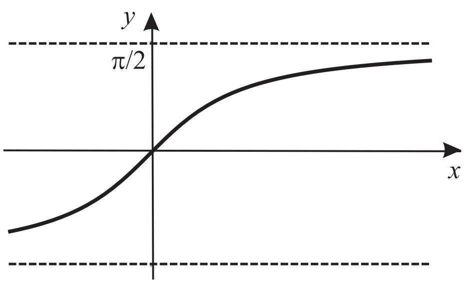

Рис. 12. График функции $y = \mathrm{arctg}\ x$

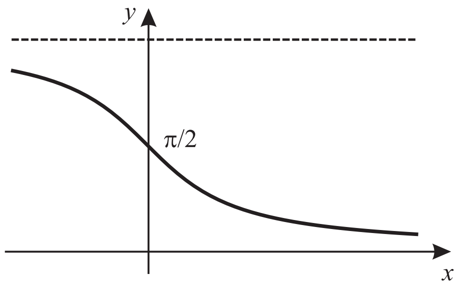

Рис. 13. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Поскольку $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то функции $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ ограничены.

7. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. КРИТЕРИЙ ГЕЙНЕ

Пусть функция f определена в Δ*-окрестности* $U_\Delta(c)$ точки c, т. е. на интервале длины 2Δ с центром в точке c:

$$U_\Delta(c) = \{x \in \mathbb{R} : |x - c| \leqslant \Delta\}, \quad \Delta > 0,$$

за исключением, быть может, точки c. Множество $U_\Delta(c) \setminus \{c\}$ называют *проколотой* Δ*-окрестностью* точки c.

Говорят, что функция f имеет *предел* при $x \to c$, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

В таком случае пишут, что

$$\lim_{x \to c} f(x) = A \text{ или } f(x) \underset{x \to c}{\to} A.$$

Геометрически $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ означает, что, какая бы горизонтальная полоса вдоль прямой $y = A$ ни была выбрана, всегда найдется такая вертикальная полоса с осью симметрии $x = c$, что все точки графика функции f, расположенные в вертикальной полосе, кроме точки, находящейся на прямой $x = c$, попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 14).

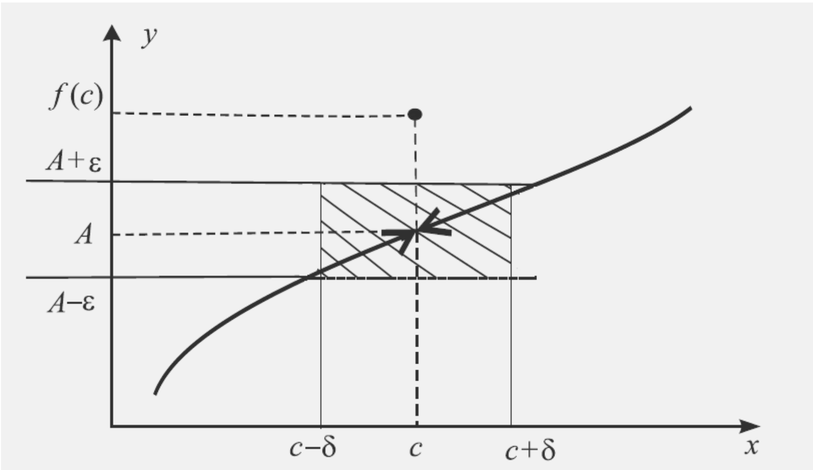

Рис. 14. Число A – предел функции

Если $f(x)$ определена в точке c и $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, то необязательно $A = f(c)$.

По аналогии с доказательством M-леммы для предела последовательности можно доказать M-лемму для предела функции.

Лемма 7.1 **(M-лемма для предела функции).** *Если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant M\varepsilon,$$

где M — некоторая постоянная, не зависящая от x и от ε, то $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$.

Пример 7.1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.

Возьмем $\Delta = 1$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|x^3 - 8| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2||x^2 + 2x + 4| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку $|x^2+2x+4| \leqslant 19$ для любого $x \in U_\Delta(c) = [1, 3]$, то в качестве $\delta(\varepsilon)$ в определении предела можем взять $\delta(\varepsilon) = \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{19}, 1\right\}$.

Теорема 7.1 (критерий Гейне). *Для того чтобы функция $f(x)$, определенная в проколотой окрестности точки c, имела предел A при $x \to c$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \neq c$, последовательность $f(x_n)$ сходилась к A.*

$\diamondsuit$

Необходимость. Возьмем прозвольные $\varepsilon > 0$ и последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \neq c$. Поскольку $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку последовательность x_n сходится к c и $x_n \neq c$, то

$$\exists n_0(\delta(\varepsilon)) > 0 : \forall n \geqslant n_0(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow 0 < |x_n - c| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, для любых $n \geqslant n_0(\delta(\varepsilon))$ имеем

$$|f(x_n) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Достаточность. Предположим, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq A$, т. е.

$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_0 \in U_\Delta(c) : 0 < |x_0 - c| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_0) - A| > \varepsilon_0.$$

В частности, для каждого $\delta_n = \frac{1}{n}$ найдется такая точка $x_{0,n}$, что

$$0 < |x_{0,n} - c| \leqslant \frac{1}{n},\ |f(x_{0,n}) - A| > \varepsilon_0.$$

Отсюда следует, что $x_{0,n} \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \neq c$, но $f(x_{0,n})$ не стремится к A при $n \to \infty$, что противоречит условию теоремы.

$\square$

Пример 7.2. Докажем, что функция $y = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, не имеет предела при $x \to 0$.

Выберем $x'_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, $x''_n = \dfrac{1}{-\pi/2 + 2\pi n}$. Очевидно, что эти последовательности сходятся к 0, но $y'_n = \sin(x'_n) \to 1$, $y''_n = \sin(x''_n) \to -1$ при $n \to \infty$. Существование предела $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ противоречило бы единственности предела и критерию Гейне.

8. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ. КРИТЕРИЙ КОШИ

Критерий Гейне позволяет перенести свойства 3.1–3.6 пределов последовательностей на пределы функций.

Свойство 8.1. Функция в заданной точке не может иметь более одного предела.

$\diamondsuit$

Предположим, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = B$, $A \neq B$. Возьмем последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \neq c$. По критерию Гейне $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} B$, что противоречит единственности предела последовательности.

$\square$

Свойство 8.2. Пусть $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$, $g(x) \underset{x\to c}{\to} B$, тогда

1) $f(x) + g(x) \underset{x\to c}{\to} A + B$;

2) $f(x)g(x) \underset{x\to c}{\to} AB$;

3) если $g(x) \neq 0$ $\forall x \in U_\Delta(c)$ и $B \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to c}{\to} \dfrac{A}{B}$.

$\diamondsuit$

Докажем первое утверждение. Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \neq c$. По критерию Гейне $f(x_n)+$ $+g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A + B$. Затем, применяя критерий Гейне в обратную сторону, получаем, что $f(x) + g(x) \underset{x\to c}{\to} A + B$. Второе и третье утверждения доказываются аналогичным образом.

$\square$

Свойство 8.3. Если $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$, $g(x) \underset{x\to c}{\to} B$ и $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in$ $\in U_\Delta(c) \setminus \{c\}$, то $A \leqslant B$.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \in U_\Delta(c)\setminus\{c\}$. По критерию Гейне $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} B$. Так как $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $A \leqslant B$.

$\square$

Свойство 8.4. Произведение бесконечно малой функции $f(x)$, т. е. такой, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$, на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки c функцию $g(x)$ является бесконечно малой функцией.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \in U_\Delta(c)\setminus\{c\}$. По критерию Гейне последовательность $(f(x_n))$ бесконечно малая. Так как последовательность $(g(x_n))$ ограниченная, то последовательность $(f(x_n)g(x_n))$ бесконечно малая. Применяя критерий Гейне в обратную сторону, получим, что функция $f(x)g(x)$ является бесконечно малой.

$\square$

Свойство 8.5 (лемма о зажатой функции). Если $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in U_\Delta(c)\setminus\{c\}$ и $h(x) \underset{x\to c}{\to} A$, $g(x) \underset{x\to c}{\to} A$, то $f(x) \underset{x\to c}{\to} A$.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n \in U_\Delta(c)\setminus\{c\}$. По критерию Гейне $h(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$. Поскольку $h(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant g(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то по лемме о зажатой последовательности имеем $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$.

$\square$

Теорема 8.1 (критерий Коши существования предела функции). *Функция* $f : U_\Delta(c) \to \mathbb{R}$ *имеет предел при* $x \to c$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x',\, x'' \in U_\Delta(c), 0 < |x' - c| \leqslant \delta(\varepsilon),$$

$$0 < |x'' - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

$\diamondsuit$

Необходимость. Поскольку $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A,$ то $\forall\varepsilon > 0$

$$\exists\delta\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) > 0 : \forall x', x'' \in U_\Delta(c), 0 < |x'-c| \leqslant \delta\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big), 0 < |x''-c| \leqslant \delta\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x') - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\ |f(x'') - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для таких x', x'' получаем

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| \leqslant \varepsilon.$$

Достаточность. Возьмем последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c,$ $x_n \neq$ $\neq c,$ и произвольное $\varepsilon > 0.$ Для этого $\varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ из условия теоремы. Существует такой номер $n_0(\delta(\varepsilon)),$ что для любых $n, m \geqslant n_0(\delta(\varepsilon))$ выполняется

$$|x_n - c| \leqslant \delta(\varepsilon),\ |x_m - c| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Отсюда вытекает, что для любых $n, m \geqslant n_0(\delta(\varepsilon))$ выполнено

$$|f(x_n) - f(x_m)| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. последовательность $(f(x_n))$ является фундаментальной. Согласно критерию Коши сходимости последовательности $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A \in \mathbb{R}.$

Из условия теоремы имеем $\forall n \geqslant n_0(\delta(\varepsilon)),$

$$\forall x \in U_\Delta(c),\ 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x_n) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_n) + \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty,$ получим

$$\forall x \in U_\Delta(c), 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow A - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant A + \varepsilon,$$

следовательно, $f(x) \underset{x\to c}{\to} A.$

$\square$

9. ОДНОСТОРОННИЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Пусть $\Delta > 0$ и функция f определена в проколотой *правосторонней* Δ*-окрестности* точки c, т. е. на множестве

$$U_{\Delta}^{+}(c) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x - c \leqslant \Delta\}.$$

Говорят, что функция $f(x)$ имеет *предел справа* при $x \to c$, если существует такое число A, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in U_{\Delta}^{+}(c), \quad 0 < x - c \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

При этом пишут

$$A = \lim_{x \to c+0} f(x) = f(c+0) \text{ или } f(x) \underset{x \to c+0}{\to} A.$$

Геометрически $\lim\limits_{x \to c+0} f(x) = A$ означает, что какая бы горизонтальная полоса вдоль прямой $y = A$ ни была выбрана, всегда найдется такая вертикальная полоса, лежащая правее прямой $x = c$, что все точки графика функции f, расположенные в вертикальной полосе, кроме точки, находящейся на прямой $x = c$, попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 15).

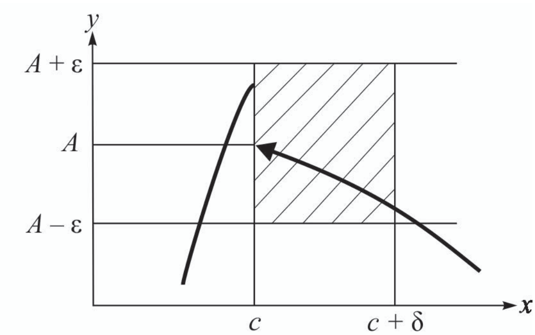

Рис. 15. Число А – предел справа

Пусть $\Delta > 0$ и функция f определена в проколотой *левосторонней* Δ*-окрестности* точки c, т. е. на множестве

$$U_{\Delta}^{-}(c) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < c - x \leqslant \Delta\}.$$

Говорят, что функция $f(x)$ имеет *предел слева* при $x \to c$, если существует такое число A, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in U_{\Delta}^{-}(c),\quad 0 < c - x \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Пишут $A = \lim\limits_{x \to c-0} f(x) = f(c-0)$ или $f(x) \underset{x \to c-0}{\to} A$ (рис. 16).

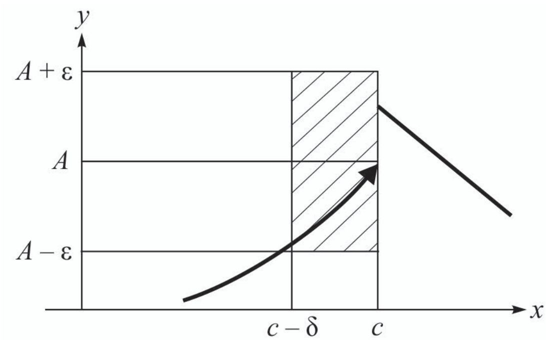

Рис. 16. Число А – предел слева

Следующий критерий равенства односторонних пределов вытекает из определений предела и односторонних пределов.

Теорема 9.1 (критерий равенства односторонних пределов). *Функция* $f(x)$ *имеет предел* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ *тогда и только тогда, когда* $f(c+0) = f(c-0) = A$.

Говорят, что функция f, определенная на множестве $[a, +\infty)$, имеет предел при $x \to +\infty$, если существует такое число A, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in [a, +\infty),\quad x \geqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Обозначают $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty)$ или $f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} A$.

Аналогичным образом $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = f(-\infty)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in (-\infty, a],\quad x \leqslant -\delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Говорят, что функция $f : U_\Delta(c) \to \mathbb{R}$ *стремится к бесконечности* при $x \to c$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in U_\Delta(c), \quad 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| \geqslant \varepsilon$$

и обозначают $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$.

Аналогичным образом $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x \in U_\Delta(c), \quad 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) \geqslant \varepsilon,$$

и $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_\Delta(c), \quad 0 < |x - c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) \leqslant -\varepsilon.$$

Замечание 9.1. Для введенных односторонних и бесконечных пределов имеет место критерий Гейне с соответствующими изменениями. Например, функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при $x \to c - 0$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $x_n < c$, последовательность $f(x_n)$ стремится к $+\infty$ при $n \to \infty$.

Свойство 9.1 (пределы выражений, содержащие функции с бесконечными и конечными пределами).

Пусть $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$, тогда верны следующие равенства:

1) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$, если $a \neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \infty$, если $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки c.

Пусть $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$, тогда:

5) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = +\infty$;

6) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = +\infty$.

Свойство 9.1 вытекает их критерия Гейне и соответствующих свойств для последовательностей.

Замечание 9.2. Перечислим пределы, для которых не выполнены условия, позволяющие для их вычисления использовать свойства 8.2 и 9.1:

1) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0, \lim\limits_{x\to c} g(x)=0$;

2) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x)$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0, \lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$;

5) $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0, \lim\limits_{x\to c} g(x)=0$;

6) $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=1, \lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$;

7) $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to c} g(x)=0$.

В таких случаях говорят, что это пределы с неопределенностью, и символически записывают их следующим образом: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Лемма 9.1. *Если* $\lim\limits_{t\to c}\varphi(t)=b$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)=A$, $\varphi(t)\neq b$ *в некоторой проколотой окрестности точки* c, *то* $\lim\limits_{t\to c} f(\varphi(t))=A$.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $t_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $t_n\neq c$. По критерию Гейне

$$\varphi(t_n)\underset{n\to\infty}{\to} b.$$

По условию леммы $\varphi(t_n)\neq b$ для всех достаточно больших n, поэтому по критерию Гейне

$$f(\varphi(t_n))\underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Затем, применяя критерий Гейне в обратную сторону, получаем

$$\lim_{t\to c} f(\varphi(t))=A. \quad \square$$

Замечание 9.3. Лемма 9.1 верна и для односторонних пределов.

10. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННОЙ ПРЕДЕЛЫ

Рассмотрим два предела – тригонометрический и показательно-степенной, к которым сводятся многие задачи математического анализа, и поэтому называемые замечательными.

Теорема 10.1 (замечательный тригонометрический предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$\diamondsuit$

Сначала докажем, что

$$\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Предварительно покажем, что имеют место неравенства

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x\ \forall x\in\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big).$$

Рассмотрим единичный круг и конфигурацию точек, изображенную на рис. 17. Площади треугольника OAB, сектора OAB и треугольника OAD равны $\frac{1}{2}\sin x$, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\, x$ соответственно, а поскольку площадь треугольника OAB меньше площади сектора OAB, площадь которого меньше площади треугольника OAD, то отсюда и вытекают требуемые неравенства.

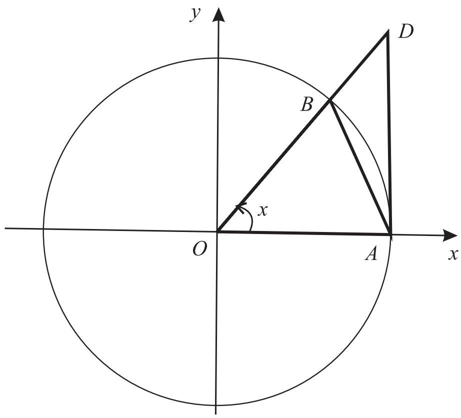

Рис. 17. Геометрическая иллюстрация неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

Таким образом, для любого $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ имеем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Далее

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0 : \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), 0 < x \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \varepsilon,$$

что означает $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Теперь докажем, что $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Согласно лемме 9.1 и доказанному равенству $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ получаем

$$\lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to+0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to+0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

По теореме 9.1 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, что и требовалось доказать.
□

Замечание 10.1. При вычислении замечательного тригонометрического предела была использована формула площади кругового сектора, которая приводится в курсе математики средней школы без обоснования. По этой причине нельзя признать приведенное вычисление замечательного тригонометрического предела корректным. Вернемся к этому пределу в п. 39 после вывода формулы площади кругового сектора и покажем, как можно дополнить доказательство теоремы 10.1, чтобы оно стало корректным.

Теорема 10.2 (замечательный показательно-степенной предел).

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

$\diamondsuit$

Докажем, что

$$\lim_{x\to +0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +0$, $x_n > > 0$.

Обозначим $k_n = \left[\dfrac{1}{x_n}\right]$, тогда

$$k_n \leqslant \frac{1}{x_n} < k_n + 1;$$

$$\frac{1}{k_n+1} < x_n \leqslant \frac{1}{k_n}.$$

Отсюда получаем оценки

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \leqslant (1+x_n)^{1/x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1};$$

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} \leqslant (1+x_n)^{1/x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right).$$

Очевидно, что $k_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, $k_n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что последовательность $\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{k_n}$ не стремится к e при $n \to \infty$. Найдется такая подпоследовательность (k'_n) последовательности (k_n), что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k'_n}\right)^{k'_n} = A \neq e. \tag{10.1}$$

Из последовательности (k'_n) можно выбрать монотонную подпоследовательность (k''_n). Очевидно, что $k''_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ как подпоследовательность последовательности $k_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k''_n}\right)^{k''_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k'_n}\right)^{k'_n} = A.$$

С другой стороны, последовательность (k''_n) является подпоследовательностью последовательности (n), поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k''_n}\right)^{k''_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Следовательно, $A = e$, что противоречит соотношению (10.1). Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e.$$

Применяя лемму о зажатой последовательности, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e.$$

Согласно критерию Гейне

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Теперь докажем, что

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Для этого воспользуемся леммой 9.1:

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to+0}(1-t)^{-1/t} = \lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{1/t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{\dfrac{1-t}{t}}\left(1+\frac{t}{1-t}\right) = e.$$

$\square$

11. O-СИМВОЛИКА

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Пишут $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

Например, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Замечание 11.1. При вычислении пределов можно заменять функции на эквивалентные им в произведении и частном, но не в сумме или разности.

Говорят, что функция $f(x)$ является бесконечно малой относительно функции $g(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

При этом пишут $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$. Произносят «$f(x)$ есть o-малое от $g(x)$».

Например, $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, но $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Говорят, что функция $f(x)$ растет не быстрее, чем функция $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует такая постоянная $M > 0$, что в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|.$$

Пишут $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. Произносят «$f(x)$ есть O-большое от $g(x)$».

Например, $x^2 + bx + c = O(x^2)$, при $x \to \infty$.

Пусть $f(x) \underset{x\to c}{\to} 0$, $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки c. В математическом анализе широко используются следующие правила обращения с символом $o(f(x))$:

1) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$;
2) $o(f(x))o(f(x)) = o(f^2(x))$;
3) $o(f(x)) + o(f^n(x)) = o(f(x))$, $n \in \mathbb{N}$;

4) $Mo(f(x)) = o(f(x))$, $o(Mf(x)) = o(f(x))$, $M \in \mathbb{R}$.

Докажем, например, второе правило (остальные устанавливаются аналогичным образом):

$$\lim_{x\to c} \frac{o(f)o(f)}{f^2} = \lim_{x\to c} \frac{o(f)}{f} \lim_{x\to c} \frac{o(f)}{f} = 0.$$

Во всех приведенных правилах равенства являются символическими, а не обычными. Их следует читать лишь слева направо.

Пример 11.1. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2-x^3}.$$

Имеем

$$\frac{1-\cos 2x}{x^2-x^3} = \frac{2\sin^2 x}{x^2(1-x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2-x^3} = 2.$$

12. НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $U_\Delta(c) = [c-\Delta, c+ + \Delta]$, $\Delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна в точке* c, если

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Запишем определение непрерывности на формальном языке: функция $f(x)$ непрерывна в точке c, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x \in U_\Delta(c), |x-c| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-f(c)| \leqslant \varepsilon.$$

Геометрически непрерывность f в точке $x = c$ означает, что, какая бы горизонтальная полоса вдоль прямой $y = f(c)$ ни была выбрана, всегда найдется такая вертикальная полоса с осью симметрии $x = c$, что все точки графика функции f, расположенные в вертикальной полосе, попадут во взятую горизонтальную полосу (рис. 18).

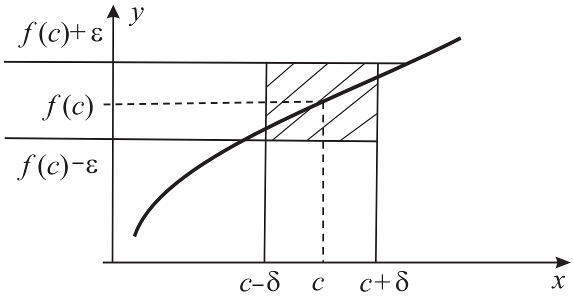

Рис. 18. Функция, непрерывная в точке c

Величину $\Delta x = x - c$ называют *приращением аргумента*, а величину $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ – *приращением функции*. Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке c можно записать следующим образом:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Пример 12.1. Поскольку для функции $y = x$ имеют место соотношения $\Delta y = \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то функция $y = x$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Пример 12.2. Функции $y = \sin x, y = \cos x$ непрерывны в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Действительно, для функции $y = \sin x$ имеем $|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = |2\cos(x + \Delta x/2) \sin \Delta x/2| \leqslant |\Delta x|$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

По аналогии с доказательством критерия Гейне существования предела функции доказывается критерий Гейне непрерывности.

Теорема 12.1 (критерий Гейне непрерывности). *Функция $f(x)$ непрерывна в точке c тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \underset{n \to \infty}{\to} c$ имеет место сходимость*

$$f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} f(c).$$

Пример 12.3. Рассмотрим функцию

$$y = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Возьмем две последовательности: $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ и $x''_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, стремящиеся к нулю. Соответствующие последовательности значений функции $\sin x'_n = 0$ и $\sin x''_n = 1$ стремятся к разным пределам 0 и 1. Из критерия Гейне непрерывности функции следует разрывность функции в точке $x = 0$ (рис. 19).

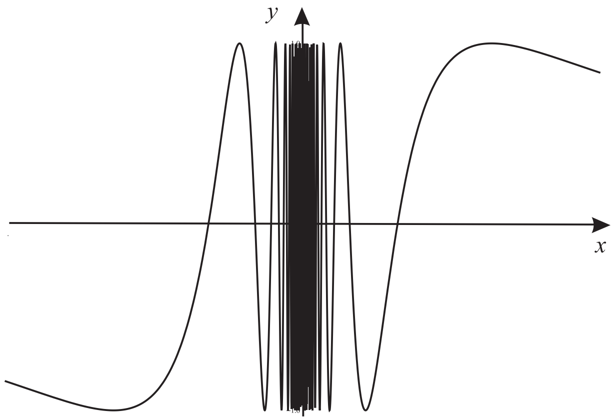

Рис. 19. Точка разрыва функции $x = 0$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[c, c+\Delta]$, $\Delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна справа* в точке c, если

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c).$$

Аналогичным образом функция $f(x)$, определенная на $[c-\Delta, c]$, $\Delta > 0$, называется *непрерывной слева* в точке c, если

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c).$$

Отметим, что функция непрерывна в точке c тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке.

Например, функция $f(x) = 1$, $x \geqslant 0$, $f(x) = -1$, $x < 0$, является непрерывной справа в точке $c = 0$, но не является непрерывной слева в этой точке, так как $f(-0) = -1$, $f(0) = 1$.

Замечание 12.1. Имеет место аналог критерия Гейне непрерывности слева и справа: функция $f(x)$ непрерывна слева (справа) в точке c тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c-0$ ($x_n \underset{n\to\infty}{\to} c+0$) имеет место сходимость

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(c).$$

Говорят, что функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $|a,b|$, если $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a,b), непрерывна справа в точке b, если точка b принадлежит промежутку $|a,b|$, и непрерывна слева в точке a, если $a \in |a,b|$. Множество непрерывных на промежутке $|a,b|$ функций обозначают символом $C^0(|a,b|)$.

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, то в следующих двух теоремах под окрестностью точки b понимаем одностороннюю окрестность $[b-\Delta, b]$, а под окрестностью точки a — одностороннюю окрестность $[a, a+\Delta]$, $\Delta > 0$.

Теорема 12.2 (о стабилизации знака). *Пусть функция f определена на промежутке $|a,b|$ и непрерывна в точке $c \in |a,b|$. Если $f(c) \neq 0$, то существует окрестность точки c, в которой $f(x)$ принимает значения того же знака, что и $f(c)$.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для случая, когда c – внутренняя точка промежутка $|a,b|$ и $f(c) > 0$. Из непрерывности функции f в точке c следует, что для

$$\varepsilon = \frac{f(c)}{2}\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in [c-\delta(\varepsilon), c+\delta(\varepsilon)] \Rightarrow |f(x)-f(c)| \leqslant \frac{f(c)}{2}.$$

Отсюда получаем, что $f(x) \geqslant \dfrac{f(c)}{2} > 0\ \ \forall x \in [c-\delta(\varepsilon), c+\delta(\varepsilon)]$.

$\square$

Теорема 12.3 (о локальной ограниченности непрерывной функции). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a,b|$ и непрерывна в точке $c \in |a,b|$. Тогда существует окрестность точки c, в которой функция f ограничена.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для случая, когда c – внутренняя точка промежутка $|a, b|$. Имеем

$$\varepsilon = 1 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in [c - \delta(\varepsilon), c + \delta(\varepsilon)] \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leqslant 1.$$

Таким образом,

$$f(x) \in [f(c) - 1, f(c) + 1] \ \forall x \in [c - \delta(\varepsilon), c + \delta(\varepsilon)].$$

$\square$

Теорема 12.4 (о непрерывности арифметических комбинаций). *Если функции* $f(x)$, $g(x)$ *непрерывны в точке* c, *то функции* $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ *непрерывны в точке* c. *Если дополнительно* $g(c) \neq 0$, *то функция* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *также непрерывна в точке* c.

$\diamondsuit$

Утверждение теоремы для суммы и произведения функций вытекает из соответствующих свойств предела функции.

Если $g(c) \neq 0$, то по теореме о стабилизации знака функция $g(x)$ отлична от нуля в некоторой окрестности точки c, поэтому в этой окрестности определено частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Затем, применяя свойство для предела частного, получаем требуемое утверждение.
$\square$

13. КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА

Если для функции $f(x)$, опеределенной в окрестности $U_\Delta(c)$ точки c, равенство $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ не выполняется, то в этом случае говорят, что функция $f(x)$ *разрывна в точке* c.

Данное равенство не выполняется, если реализуется один из следующих случаев:

1) предел $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ существует и конечен, но отличен от $f(c)$. В таком случае говорят, что c – *точка устранимого разрыва*;

2) существуют конечные односторонние пределы $f(c-0)$, $f(c+0)$, но $f(c-0) \neq f(c+0)$. В таком случае говорят, что c – *точка конечного скачка*;

3) существуют односторонние пределы $f(c-0)$, $f(c+0)$ и хотя бы один из них бесконечен. В таком случае говорят, что c – *точка бесконечного скачка*;

4) хотя бы один из односторонних пределов $f(c-0)$, $f(c+0)$ не существует. В таком случае говорят, что c – *точка неопределенности.*

Точки устранимого разрыва и точки конечного скачка относят к точкам разрыва *первого рода*, а точки бесконечного скачка и точки неопределенности – к точкам разрыва *второго рода.*

Пример 13.1. Пусть $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$, то $c = 0$ – точка устранимого разрыва.

Пример 13.2. Для функции

$$y = \begin{cases} 1, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

точка $x = 1$ является точкой устранимого разрыва (рис. 20).

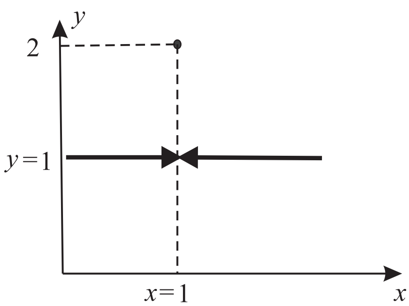

Рис. 20. $x = 1$ – точка устранимого разрыва

Пример 13.3. Для функции

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой конечного скачка (рис. 21).

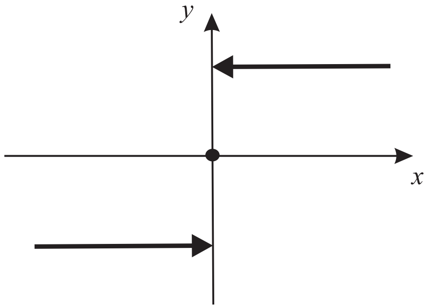

Рис. 21. $x = 0$ – точка конечного скачка

Пример 13.4. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x > 0$, $f(x) = 0$ при $x \leqslant 0$.

Поскольку $f(+0) = +\infty$, $f(-0) = 0$ и один из односторонних пределов бесконечен, то $c = 0$ – точка бесконечного скачка.

Пример 13.5. Пусть $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Ранее было показано, что предел $f(+0)$ не существует (см. пример 12.3). Таким образом, точка $c = 0$ – точка неопределенности функции f.

Пример 13.6. Рассмотрим функцию Дирихле $D(x)$, принимающую значение 1 в рациональных точках x и значение 0 – в иррациональных точках x.

Докажем, что функция Дирихле разрывна в каждой точке. Возьмем произвольную точку $c \in \mathbb{R}$. Можно выбрать две последовательности:

$$x'_n \to c + 0,\ x'_n \in \mathbb{Q}; \quad x''_n \to c + 0,\ x''_n \notin \mathbb{Q}.$$

Имеем
$$f(x_n') \underset{n\to\infty}{\to} 1;$$
$$f(x_n'') \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$
Таким образом, предел $f(c+0)$ не существует. Каждая точка $x \in \mathbb{R}$ является точкой неопределенности функции Дирихле.

14. НЕПРЕРЫВНОСТЬ МОНОТОННОЙ, ОБРАТНОЙ И СЛОЖНОЙ ФУНКЦИЙ

Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется *строго возрастающей*, если
$$\forall x_1, x_2 \in |a, b| : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
Аналогичным образом определяются *строго убывающие*, *возрастающие*, *убывающие* функции. Такие функции называются *монотонными*.

Лемма 14.1. *Если функция* $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ *монотонна, то для любого* $x_0 \in (a, b)$ *существуют конечные односторонние пределы* $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$.

$\diamondsuit$

Докажем лемму для возрастающей функции. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$, тогда
$$\forall x \in (a, x_0) \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$
Следовательно, множество $L = \{f(x) : x \in (a, x_0)\}$ ограничено сверху. По теореме о гранях существует $\sup L = A \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $A \leqslant f(x_0)$, иначе можно было бы найти такое $\varepsilon > 0$, что $A - \varepsilon \geqslant f(x_0) \geqslant f(x)$ $\forall x \in (a, x_0)$, что противоречит определению точной верхней грани, кроме того,
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (a, x_0) : f(x_\varepsilon) > A - \varepsilon.$$

В силу возрастания f имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in [x_\varepsilon, x_0) \Rightarrow f(x) > A - \varepsilon.$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta(\varepsilon) = x_0 - x_\varepsilon\ \forall x \in (a,b)\ :\ 0 < x_0 - x \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) \leqslant A.$$

Таким образом, $f(x_0 - 0) = A \leqslant f(x_0)$.

Используя аналогичные рассуждения, можно доказать, что $f(x_0 + 0) = B \geqslant f(x_0)$, где

$$B = \inf\{f(x) : x \in (x_0, b)\}.$$

$\square$

Замечание 14.1. Из доказательства леммы вытекает, что для возрастающей функции в каждой точке $x_0 \in (a,b)$ имеют место неравенства

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0),$$

а для убывающей функции

$$f(x_0 - 0) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0 + 0).$$

Теорема 14.1 (критерий непрерывности монотонной функции). *Для непрерывности возрастающей на отрезке* $[a,b]$ *функции* f *необходимо и достаточно, чтобы множеством ее значений был отрезок* $[f(a), f(b)]$. *Для непрерывности убывающей на отрезке* $[a,b]$ *функции* f *необходимо и достаточно, чтобы множеством ее значений был отрезок* $[f(b), f(a)]$.

$\diamondsuit$

Докажем теорему для возрастающей функции. Если функция f постоянна, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $A = f(a)$, $B = f(b)$, $A < B$. Согласно лемме 14.1 имеем

$$\forall x_0 \in (a,b) \Rightarrow f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

Необходимость. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Возьмем произвольное $y_0 \in (A,B)$. Определим множество

$$S = \{x \in [a,b] : f(x) < y_0\}.$$

Пусть $x_0 = \sup S$. Докажем, что для любого $x \in [a, x_0)$ имеем $f(x) < y_0$. Предположим, что это не так, тогда найдется такая точка $x_1 \in [a, x_0)$, что $f(x_1) \geqslant y_0$. Однако в силу возрастания f выполняется $f(x) \geqslant y_0 \ \ \forall x \in [x_1, b]$. Отсюда получаем, что $x_0 = \sup S \leqslant x_1$ – противоречие. Таким образом, $f(x_0 - 0) \leqslant y_0$.

Докажем, что для любого $x \in (x_0, b]$ имеем

$$f(x) \geqslant y_0.$$

Допустим, найдется такое $x_2 \in (x_0, b]$, что $f(x_2) < y_0$. Тогда получаем, что $x_0 = \sup S \geqslant x_2$ – противоречие.

Таким образом, $f(x_0 + 0) \geqslant y_0$.

Поскольку f непрерывна в точке x_0, то

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Следовательно, $f(x_0) = y_0$.

Достаточность. Предположим, что функция f разрывна в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. Пусть x_0 – внутренняя точка отрезка $[a, b]$ (случай, когда x_0 является одним из концов отрезка $[a, b]$, рассматривается аналогичным образом).

Тогда выполняется одно из неравенств: $f(x_0 - 0) < f(x_0)$, $f(x_0 + 0) > f(x_0)$. Допустим, выполняется первое неравенство. Возьмем некоторое $\gamma \in (f(x_0 - 0), f(x_0))$.

С одной стороны,

$$\forall x \in [a, x_0) \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0 - 0) < \gamma,$$

с другой –

$$\forall x \in [x_0, b] \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) > \gamma,$$

поэтому функция f не принимает значение $\gamma \in [A, B]$, что противоречит условию теоремы.

□

Теорема 14.2 (о непрерывности обратной функции). *Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная строго возрастающая функция. Тогда существует обратная функция f^{-1}, которая определена на отрезке $[f(a), f(b)]$, является непрерывной и строго возрастающей.*

$\diamondsuit$

Существование обратной функции f^{-1} следует из биективности отображения $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$. Обратная функция f^{-1} определена на отрезке $[f(a), f(b)]$, а ее значения покрывают отрезок $[a, b]$. Очевидно, что f^{-1} является строго возрастающей функцией. По критерию непрерывности монотонной функции функция f^{-1} явлется непрерывной.

$\square$

Теорема 14.3 (о непрерывности сложной функции). *Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

$\diamondsuit$

Возьмем произвольную последовательность $x_n \to x_0$ при $n \to \to \infty$. По критерию Гейне непрерывности функции имеем

$$y_n = f(x_n) \to f(x_0) = y_0, \quad g(y_n) \to g(y_0) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

$\square$

В следующих примерах непрерывность функций вытекает из теорем о непрерывности арифметических комбинаций и о непрерывности обратной функции.

Пример 14.1. Многочлен $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ непрерывен для всех $x \in \mathbb{R}$ как произведение и сумма непрерывных функций.

Пример 14.2. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \neq \pi n$; $y = \operatorname{ctg} x$, $x \neq \pi/2 + \pi n$, непрерывны как частное двух непрерывных функций.

Пример 14.3. Рациональная функция $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены, непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме корней знаменателя $Q(x)$.

Пример 14.4. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывны на множестве определения по теореме о непрерывности обратной функции.

15. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Функция $y = x$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывна как произведение непрерывных функций, строго монотонна на $\mathbb{R}$ для нечетных $n = 2k + 1$ и строго монотонна на промежутке $[0, +\infty)$ для четных $n = 2k$. Следовательно, по теореме о непрерывности обратной функции она имеет непрерывную обратную функцию $y = x^{1/n}$, определенную на $\mathbb{R}$ для нечетных n и на промежутке $[0, +\infty)$ для четных n. Отображение $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ определим с помощью равенства $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. Теперь можно определить степенную функцию с рациональным показателем $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел), положив

$$x^r = x^{m/n} = (x^{1/n})^m.$$

Данная функция определена на $\mathbb{R}$, если $n = 2k + 1$, $m \geqslant 0$; на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, если $n = 2k + 1$, $-m > 0$; на $[0, +\infty)$, если $n = 2k$, $m \geqslant 0$; на $(0, +\infty)$, если $n = 2k$, $m < 0$, $k \in \mathbb{N}$. Функция $x^{1/n}$ непрерывная и строго возрастающая при $x > 0$. Функция t^m непрерывная при $t > 0$, строго возрастающая при $m > 0$ и строго убывающая при $m < 0$, поэтому $y = x^r$, $x > 0$, — непрерывная функция как сложная функция непрерывных отображений, строго возрастающая при $r > 0$ и строго убывающая при $r < 0$. Степенная функция с рациональным показателем при $x > 0$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}(x^{1/n})^m = (x^m)^{1/n}; \\ x^r > 1, \text{ если } x > 1,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0; \\ x^{r_1} x^{r_2} = x^{r_1 + r_2},\ r_1,\ r_2 \in \mathbb{Q}; \\ (x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2},\ r_1,\ r_2 \in \mathbb{Q}; \\ x^{r_1} > x^{r_2}, \text{ если } x > 1, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{Q}, \quad r_1 > r_2.\end{gathered} \tag{15.1}$$

Перечисленные свойства вытекают из свойств целых степеней и из следующего утверждения: если $a^n = b^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0, b > 0$, то $a = b$. Проверим, например, равенство (15.1):

$$((x^{1/n})^m)^n = ((x^{1/n})^n)^m = x^m, \quad ((x^m)^{1/n})^n = x^m.$$

Графики некоторых степенных функций с рациональными показателями показаны на рис. 22, 23.

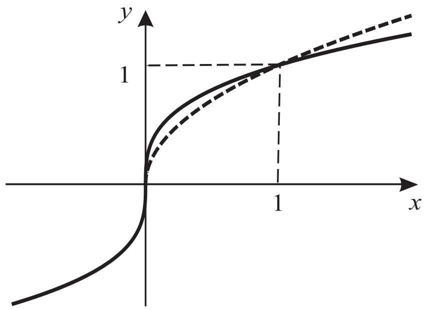

Рис. 22. Графики функций $y = x^{1/2}$ (пунктирная кривая) и $y = x^{1/3}$

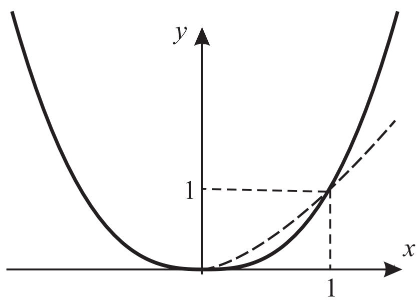

Рис. 23. Графики функций $y = x^{3/2}$ (пунктирная кривая) и $y = x^{8/3}$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Ранее была определена степенная функция с рациональным показателем, что позволяет ввести для таких вещественных a, что $0 < a < 1$ или $a > 1$, показательную функцию $y = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$, определенную только на $\mathbb{Q}$. Ограничимся рассмотрением случая $a > 1$. Случай $0 < a < 1$ изучается аналогичным образом.

Число A называют *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$ *вдоль множества* $\mathbb{Q}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{Q}, 0 < |x - x_0| \leqslant \nu_\varepsilon \ \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \varepsilon$, и обозначают $\lim\limits_{x \to x_0,\, x \in \mathbb{Q}} f(x) = A$. Введенный предел функции вдоль множества $\mathbb{Q}$ обладает теми же свойствами, что и предел функции.

Приведем свойства функции $y = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$.

Свойство 15.1. $\lim\limits_{x \to 0,\, x \in \mathbb{Q}} a^x = 1$.

Действительно, уже известно, что $\lim\limits_{n \to \infty} a^{1/n} = 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} a^{-1/n} = 1$, поэтому $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon > 0, \forall n \geqslant \nu_\varepsilon \ \Rightarrow 1 - \varepsilon \leqslant a^{1/n} \leqslant 1 + \varepsilon$, $1 - \varepsilon \leqslant a^{-1/n} \leqslant 1 + \varepsilon$. Для каждого $\varepsilon > 0$ зафиксируем номер $n_\varepsilon \geqslant \nu_\varepsilon$. Для такого любого рационального x, что $-1/n_\varepsilon \leqslant x \leqslant 1/n_\varepsilon$, имеем $a^{-1/n_\varepsilon} \leqslant a^x \leqslant a^{1/n_\varepsilon}$. Отсюда $1 - \varepsilon \leqslant a^x \leqslant 1 + \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_\varepsilon = 1/n_\varepsilon, \forall x \in \mathbb{Q} : |x| \leqslant \nu_\varepsilon \ \Rightarrow |a^x - 1| \leqslant \varepsilon$.

Свойство 15.2. Если $r \in \mathbb{Q}$, то $\lim\limits_{x \to r,\, x \in \mathbb{Q}} a^x = a^r$.

Действительно, $\lim\limits_{x \to r, x \in Q} a^x = \lim\limits_{x \to r, x \in Q} a^r \dfrac{a^x}{a^r} = a^r \lim\limits_{x \to r,\, x \in Q} a^{x-r} = \left[x - r = t, \ t \to 0, \, t \in Q\right] = a^r \lim\limits_{t \to 0,\, t \in Q} a^t = a^r$.

Используя функцию $y = a^x, x \in \mathbb{Q}$, определим показательную функцию на $\mathbb{R}$. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $s = \sup\limits_{r \in \mathbb{Q},\, r < x} a^r$, $p = \inf\limits_{r \in \mathbb{Q}, r > x} a^r$. Из теоремы о гранях и из свойств степенной функции с рациональным показателем имеем $s, p \in \mathbb{R}$ и $s \leqslant p$. Покажем, что на самом деле $p = s$. Действительно, для любых рациональных $r_1, r_2 : r_1 < x < r_2$ имеем $0 \leqslant p - s \leqslant a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) < s(a^{r_2 - r_1} - 1)$. Перейдем к пределу в последнем равенстве при $r_2 - r_1 \to 0$, получим $0 \leqslant p - s \leqslant 0$, т. е. $p = s$. Для $x \in \mathbb{R}$ положим $a^x = s = p$.

Приведем свойства функции $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Свойство 15.3. $\lim\limits_{r \to x,\, r \in \mathbb{Q}} a^r = a^x$.

$\diamondsuit$

Действительно, из определения функции a^x имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r'_\varepsilon \in \mathbb{Q} : r'_\varepsilon < x, a^x - \varepsilon < a^{r'_\varepsilon} \leqslant a^x;$$

$$\exists r''_\varepsilon \in \mathbb{Q} : r''_\varepsilon > x, a^x \leqslant a^{r''_\varepsilon} < a^x + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\forall r \in \mathbb{Q} : r'_\varepsilon \leqslant r \leqslant r''_\varepsilon \Rightarrow a^{r'_\varepsilon} \leqslant a^r \leqslant a^{r''_\varepsilon}, a^x - \varepsilon \leqslant a^r \leqslant a^x + \varepsilon.$$

□

Свойство 15.4. $\forall x_1,\, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.

♢

Пусть $r_n \to x_1$, $\rho_n \to x_2$, $r_n \in \mathbb{Q}$, $\rho_n \in \mathbb{Q}$, тогда $a^{r_n} \to a^{x_1}$, $a^{\rho_n} \to a^{x_2}$, $a^{r_n+\rho_n} \to a^{x_1+x_2}$. Поскольку $a^{r_n}a^{\rho_n} = a^{r_n+\rho_n}$, то, переходя к пределу в последнем равенстве, получаем $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.

□

Свойство 15.5. Функция $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 1$, строго возрастает.

♢

Пусть $x_1 < x_2$. Существуют такие рациональные числа r_1, r_2, что $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Используя определение a^x и свойства a^r на $\mathbb{Q}$, имеем $a^{x_1} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{x_2}$.

□

Свойство 15.6. Функция $y = a^x$, $a > 1$, непрерывна на $\mathbb{R}$.

♢

Для произвольной точки x_0 из $\mathbb{R}$

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1). \tag{15.2}$$

Если показать, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$, то из равенства (15.2) следует, что $\Delta y \underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} 0$, т. е. функция $y = a^x$ непрерывна в точке x_0.

Пусть (x_n) — произвольная бесконечно малая последовательность. Существуют бесконечно малые последовательности рациональных чисел, удовлетворяющие неравенствам $r'_n \leqslant x_n \leqslant r''_n$. Следовательно, $a^{r'_n} \leqslant a^{x_n} \leqslant a^{r''_n}$. Так как $a^{r'_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $a^{r''_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$. По критерию Гейне $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

□

Функцию $y = a^x$ называют *показательной функцией* с основанием a. В качестве основания часто используется число e, и вместо e^x пишут $\exp x$ (рис. 24).

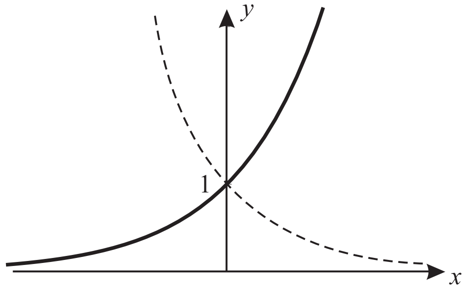

Рис. 24. Графики функций $y = (1/3)^x$ (пунктирная кривая) и $y = e^x$

ЛОГАРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

На основании теоремы об обратной функции существует функция, обратная к показательной $y = a^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 1$. Эту функцию называют *логарифмической* и обозначают $y = \log_a x$ (рис. 25).

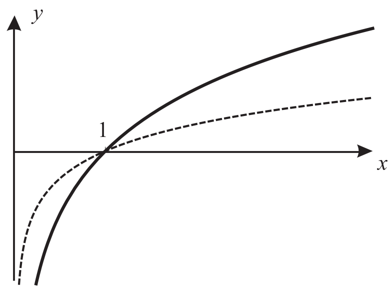

Рис. 25. Графики функций $y = \log_{10} x$ (пунктирная кривая) и $y = \log_2 x$

Данная функция является непрерывной и строго возрастающей. Аналогичным образом определяют функцию $y = \log_a x$, $0 < a < 1$.

Поскольку логарифмическая функция является обратной к показательной, то

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0, \quad \log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Логарифм числа x по основанию e называют натуральным и обозначают $\ln x$.

В п. 15 была введена степенная функция с рациональным показателем. Степенную функцию с любым вещественным показателем определяют лишь при $x > 0$ с помощью формулы $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функции

$$\operatorname{sh} x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \quad \operatorname{ch} x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$
$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \qquad \operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называют *гиперболическим синусом*, *гиперболическим косинусом*, *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* соответственно.

Из определения гиперболических функций следуют тождества:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x, \quad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Графики функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ представлены на рис. 26, 27.

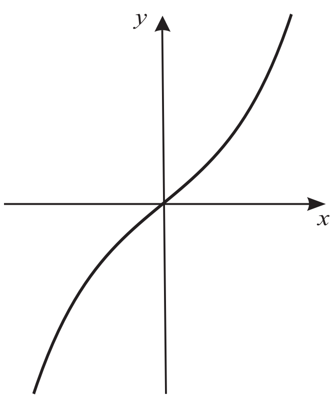

Рис. 26. График функции $y = \operatorname{sh} x$

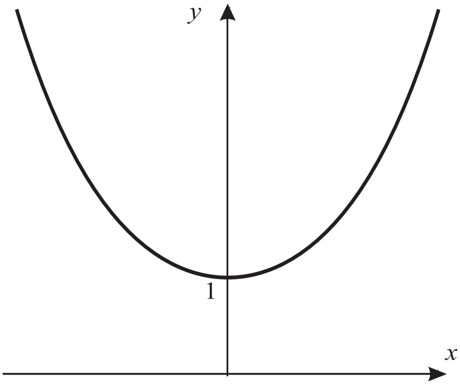

Рис. 27. График функции $y = \operatorname{ch} x$

Найдем функцию, обратную к отображению $y = \operatorname{sh} x$:

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad e^x = y + \sqrt{y^2+1}, \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

Аналогичным образом $y = \operatorname{ch} x, \quad x \geqslant 0,\ x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}), \quad y \geqslant 1.$

Функции

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R}; \tag{15.3}$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geqslant 1, \tag{15.4}$$

называют обратным *гиперболическим синусом* (рис. 28) и *обратным гиперболическим косинусом* соответственно.

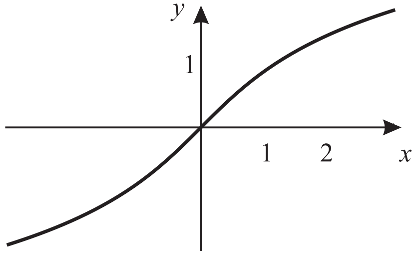

Рис. 28. График функции $y = \operatorname{arsh} x$

Сумму $f+g$, разность $f-g$, произведение $f\cdot g$, частное f/g и композицию $f\circ g$ функций f и g относят к *элементарным операциям* над функциями. Степенную, тригонометрические, обратные тригонометрические, показательную и логарифмическую функции считают *основными элементарными*. К *элементарным* функциям относят функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью элементарных операций, применяемых конечное число раз.

Из п. 12, 14 и 15 следует, что элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

16. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ, ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ И СТЕПЕННОЙ ПРЕДЕЛЫ

Следующие три предела, так же как и тригонометрический и степенно-показательный пределы, относят к замечательным.

Теорема 16.1 (замечательный логарифмический предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

$\diamondsuit$

Воспользуемся леммой 9.1, теоремой 10.2 и непрерывностью функции $f(x)=\ln x$ в точке $x=e$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\lim_{t\to e}\ln t=\ln e=1.$$

$\square$

Теорема 16.2 (замечательный показательный предел).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

$\diamondsuit$

Воспользуемся леммой 9.1 и теоремой 16.1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

$\square$

Теорема 16.3 (замечательный степенной предел). *Пусть* $\mu\in\mathbb{R}$, *тогда*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$$

$\diamondsuit$

Воспользуемся теоремами 16.1, 16.2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu.$$

$\square$

17. ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

К глобальным свойствам функции относят свойства, связанные со всем множеством задания функции.

Теорема 17.1 (теорема о промежуточных значениях). *Пусть непрерывная функция* $f:|a,b|\to\mathbb{R}$ *принимает значения* A *и* B, *тогда она принимает любое промежуточное значение* C.

$\diamondsuit$

Пусть $f(x_1)=A$, $f(x_2)=B$, $A<C<B$, $x_1<x_2$.

Сначала докажем теорему для случая $A < 0, B > 0, C = 0$. Определим множество $L = \{x \in |a, b| : f(t) < 0 \ \forall t \in [x_1, x]\}$. Очевидно, что множество L непустое и ограниченное сверху, поэтому существует $x_0 = \sup L$.

Докажем, что $f(x_0 - 0) \leqslant 0$. Отметим, что $x_0 < b$, так как $f(x_2) = B > 0$. Следовательно, $x_0 \in |a, b)$. Предел $f(x_0 - 0)$ существует, поскольку функция f непрерывна в точке x_0. Если предположить, что $f(x_0 - 0) > 0$, то по теореме о стабилизации знака нашлась бы левосторонняя окрестность точки x_0, в которой f принимает положительные значения. В таком случае x_0 не может быть точной верхней гранью множества L. Таким образом, $f(x_0 - 0) \leqslant 0$.

Докажем, что $f(x_0) \geqslant 0$. Если предположить, что $f(x_0) < 0$, то найдется окрестность точки x_0, в которой f принимает отрицательные значения. В этом случае x_0 не может быть точной верхней гранью множества L. Таким образом, $f(x_0) \geqslant 0$. Поскольку f непрерывна, то $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Следовательно, $f(x_0) = 0$.

Для того чтобы доказать теорему для произвольных A, B, C, достаточно провести те же рассуждения для функции $g(x) = f(x) - C$.

□

Геометрическая интерпретация: если график непрерывной функции проходит над и под некоторой горизонтальной прямой, то он пересекает эту прямую (рис. 29).

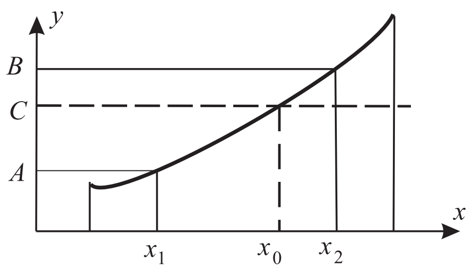

Рис. 29. Геометрическая иллюстрация к теореме о промежуточных значениях

Экстремальными значениями функции $f : X \to \mathbb{R}$ называют точную верхнюю M и точную нижнюю m грани множества ее значений на множестве X, т. е. $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Если существуют значения аргументов $x_1, x_2,$ что $f(x_1) = m,$ $f(x_2) = M,$ то говорят, что функция достигает экстремальных значений, и пишут $f(x_1) = \min\limits_{x \in X} f(x),\ \ f(x_2) = \max\limits_{x \in X} f(x).$

Теорема 17.2 (теорема Вейерштрасса). *Непрерывная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ достигает экстремальных значений на отрезке $[a,b]$.*

$\diamondsuit$

Докажем теорему для случая максимального значения. Пусть $A = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Возьмем такую возрастающую последовательность (α_n), что $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} A$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in [a,b]$, что $f(x_n) \geqslant \alpha_n$. Поскольку последовательность (x_n) ограничена, то существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} \bar{x}$. Докажем, что $\bar{x} \in [a,b]$. Если предположить, что точка $\bar{x}$ находится за пределами отрезка $[a,b]$, то найдется окрестность точки $\bar{x}$, которая также не пересекается с отрезком $[a,b]$. По этой причине в указанной окрестности нет членов подпоследовательности x_{n_k}, что противоречит сходимости подпоследовательности. Таким образом, $\bar{x} \in [a,b]$.

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве $f(x_{n_k}) \geqslant \alpha_{n_k}$, получим $f(\bar{x}) \geqslant A$. Следовательно, $A < +\infty$ и $f(\bar{x}) = A$. Теорема доказана.

$\square$

Точки максимума $\bar{x}$ и минимума $\underline{x}$ представлены на рис. 30.

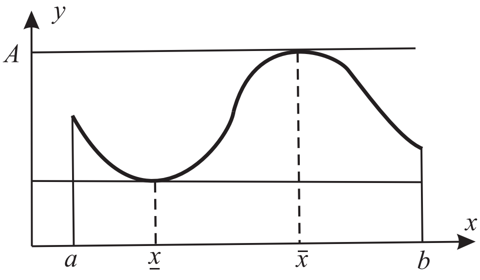

Рис. 30. Геометрическая иллюстрация к теореме Вейерштрасса

Следствие 17.1. *Непрерывная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена.*

18. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ. КОЛЕБАНИЕ ФУНКЦИИ

Условие непрерывности функции $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ можно записать следующим образом:

$$\forall x' \in |a,b| \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, x') > 0 : \; \forall x'' \in |a,b|,$$

$$|x'' - x'| \leqslant \delta(\varepsilon, x') \Rightarrow |f(x'') - f(x')| \leqslant \varepsilon.$$

Если при каждом $\varepsilon > 0$ величина $\delta(\varepsilon, x')$ может быть выбрана не зависящей от x', то говорят, что функция f *равномерно непрерывна* на промежутке $|a,b|$. Иными словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall x', x'' \in |a,b|, \quad |x''-x'| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x'')-f(x')| \leqslant \varepsilon.$$

Пример 18.1. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является непрерывной на интервале $(0,1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале, так как

$$\exists \varepsilon_0 = 1 \; \forall \delta \in (0,1] \; \exists x'_0 = \delta/2, x''_0 = \delta/4,$$

$$|x'_0 - x''_0| = \delta/4 \Rightarrow |f(x'_0) - f(x''_0)| = 2/\delta > \varepsilon_0.$$

Теорема 18.1 (теорема Кантора). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

$\diamondsuit$

Предположим, что f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$, т. е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x'_0, x''_0 \in [a,b] : |x'_0 - x''_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x'_0) - f(x''_0)| > \varepsilon_0.$$

Возьмем такие последовательности $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $x'_{0,n}$, $x''_{0,n} \in [a,b]$, что

$$|x'_{0,n} - x''_{0,n}| \leqslant \frac{1}{n}, \; |f(x'_{0,n}) - f(x''_{0,n})| > \varepsilon_0.$$

Поскольку последовательность $(x'_{0,n})$ ограничена, то существует сходящаяся подпоследовательность

$$x'_{0,n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0 \in [a,b].$$

Поскольку

$$|x'_{0,n_k} - x''_{0,n_k}| \leqslant \frac{1}{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

то

$$x''_{0,n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0.$$

Согласно критерию Гейне непрерывности $f(x'_{0,n_k}) \to f(x_0)$, $f(x''_{0,n_k}) \to f(x_0)$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в неравенстве

$$|f(x'_{0,n_k}) - f(x''_{0,n_k})| > \varepsilon_0,$$

получаем $0 > \varepsilon_0$, что противоречит выбору числа ε_0. Теорема доказана.

$\square$

Величину

$$\omega(f, |\alpha,\beta|) = \sup_{x_1,x_2\in|\alpha,\beta|} |f(x_1) - f(x_2)|$$

называют *колебанием функции* f на промежутке $|\alpha,\beta|$.

Рассмотрим разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Величину

$$W(f,\{x_k\}) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \omega(f,[x_{k-1},x_k])$$

называют *колебанием функции* f, *соответствующим разбиению* $\{x_k\}$, а величину $\delta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k - x_{k-1})$ – *диаметром разбиения* $\{x_k\}$.

Теорема 18.2 (о колебании функции). *Пусть функция* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *непрерывна,* $(\{x_k\}_m)$, $0\leqslant k\leqslant n_m$, *– последовательность разбиений отрезка* $[a,b]$ *с диаметрами* $\delta_m \to 0$, *тогда*

$$W(f,\{x_k\}_m) \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

$\diamondsuit$

Согласно теореме Кантора

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall x', x'' \in [a, b] \quad |x' - x''| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку $\delta_m \to 0$, то

$$\exists m_0(\delta(\varepsilon)) > 0 : \forall m \geqslant m_0(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow \delta_m \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_k - x_{k-1}| \leqslant \delta(\varepsilon)\, \forall k = 1, \ldots, n_m.$$

Таким образом,
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \exists m_0(\delta(\varepsilon)) > 0 : \forall m \geqslant m_0(\delta(\varepsilon))\ \forall k = 1, \ldots, n_m$,
$\forall \xi, \eta \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant \varepsilon$. Отсюда получаем, что

$$W(f, \{x_k\}_m) \leqslant \varepsilon\ \forall m \geqslant m_0(\delta(\varepsilon)).$$

Следовательно,

$$W(f, \{x_k\}_m) \underset{m \to \infty}{\to} 0.$$

$\square$

19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 19.1. *Производной* функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для производной используют обозначение $f'(x_0)$. Если предел существует и конечен, то говорят, что функция имеет конечную производную в точке x_0, если предел бесконечен, то полагают $f'(x_0) = \infty$, если предел не существует, то говорят, что функция не имеет производной в точке x_0.

Геометрический смысл производной. Рассмотрим точки $M_0(c; f(c))$, $M_1(c+\Delta x; f(c+\Delta x))$, лежащие на графике функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точки M_0, M_1, называется *секущей* графика функции $y = f(x)$ и задается уравнением $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x - c) + f(c)$, где $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ – приращение функции $y = f(x)$ в точке c, соответствующее приращению аргумента Δx (рис. 31).

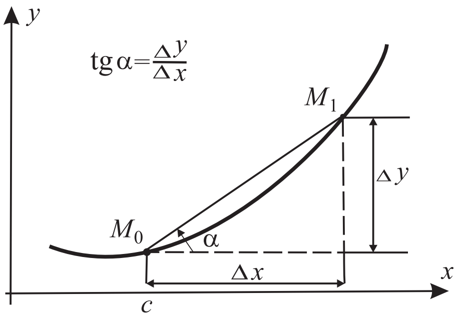

Рис. 31. Секущая

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке c, то при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M_1 приближается к прямой

$$y = f'(c)(x - c) + f(c),$$

которую называют *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$. Таким образом, $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$, т. е. $f'(c) = \operatorname{tg}\beta$, где β – угол, который образует касательная с положительным направлением оси Ox (рис. 32).

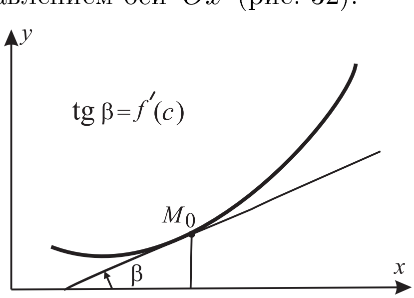

Рис. 32. Касательная

Из определения производной вытекает, что производная $f'(c)$ характеризует скорость роста функции $y = f(x)$ в точке c.

Теорема 19.1 (о непрерывности функции, имеющей конечную производную). *Если существует конечная производная $f'(c)$, то функция $f(x)$ непрерывная в точке c.*

$\diamondsuit$

Из определения производной вытекает

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) + o(1), \ \Delta x \to 0.$$

Отсюда получаем

$$\Delta y = f'(c)\Delta x + o(\Delta x), \ \Delta x \to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

$\square$

Теорема 19.2 (о производных арифметических комбинаций). *Если функции $f(x)$, $g(x)$ имеют конечные производные в точке x, то производные суммы, произведения и частного двух функций вычисляются по следующим правилам:*

1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ *при условии, что* $g(x) \neq 0$.

$\diamondsuit$

Первое правило очевидным образом вытекает из определения производной и свойств пределов.

Докажем второе правило:

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x) - g(x)) + (f(x+\Delta x) - f(x))g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Докажем третье правило:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \times$$

$$\times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)(f(x+\Delta x) - f(x)) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}(g(x)f'(x) - f(x)g'(x)).$$

□

Теорема 19.3 (о производной обратной функции). *Пусть функция $f(x)$ строго монотонна, непрерывна в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и имеет конечную производную $f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность $V_{\delta_1}(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, в которой определена обратная функция $x = g(y)$, причем обратная функция строго монотонна, непрерывна и $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

♢

Существование окрестности $V_{\delta_1}(y_0)$ и обратной функции $x = g(y)$, определенной в этой окрестности, ее строгая монотонность и непрерывность вытекают из теоремы о непрерывности обратной функции.

Из строгой монотонности функций $f(x)$, $g(y)$ следует, что для любого такого $\Delta x \neq 0$, что $x_0 + \Delta x \in U_\delta(x_0)$, существует единственное такое $\Delta y \neq 0$, что $y_0 + \Delta y \in V_{\delta_1}(y_0)$ и $g(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$. Так как функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0.$$

Таким образом,

$$g'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Теорема 19.4 (о производной сложной функции). *Если функции* $x = \varphi(t)$, $y = f(x)$ *имеют в точках* t_0, $x_0 = \varphi(t_0)$ *конечные производные* $\varphi'(t_0)$, $f'(x_0)$, *то сложная функция* $g(t) = f(\varphi(t))$ *имеет конечную производную в точке* t_0, *которая вычисляется по следующему правилу цепочки:*

$$g'(t_0) = \left(f(\varphi(t_0))\right)' = f'(x_0)\varphi'(t_0).$$

◇

Имеем (см. доказательство теоремы о непрерывности функции, имеющей конечную производную)

$$\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0;$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0.$$

Поскольку $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = 0$, то получаем

$$f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0)) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = f'(x_0)(\varphi'(t_0)\Delta t +$$

$$+ o(\Delta t)) + o(\Delta x) = f'(x_0)\varphi'(t_0)\Delta t + o(\Delta t),\ \Delta t \to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\varphi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0))}{\Delta t} = f'(x_0)\varphi'(t_0).$$

□

20. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Используя замечательные пределы, можно найти производные основных элементарных функций:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos x;$$

$$(\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = \cos(\pi/2 - x)\cdot(\pi/2 - x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha-1}\frac{(1+\Delta x/x)^\alpha - 1}{\Delta x/x} = \alpha x^{\alpha-1},\ x > 0, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1},\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N};$$

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x;$$

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\frac{\ln(1+\Delta x/x)}{\Delta x/x} = \frac{1}{x},\ x > 0;$$

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)' = a^x\ln a,\ a>0, a\neq 1;$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a},\ a>0, a\neq 1, x>0;$$

$$(\mathrm{sh}x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}x;$$

$$(\mathrm{ch}x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{sh}x;$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x};$$

$$(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x};$$

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y, x' = \cos y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1;$$

$$(\arccos x)' = (\pi/2 - \arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1;$$

$$y = \mathrm{arctg}x \Rightarrow x = \mathrm{tg}y, x' = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow (\mathrm{arctg}x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{arcctgx})' = (\pi/2 - \mathrm{arctgx})' = -\frac{1}{1+\mathrm{x}^2};$$

$$y = \mathrm{arcsh}x \Rightarrow x = \mathrm{sh}y, x' = \mathrm{ch}y \Rightarrow (\mathrm{arcsh}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$y = \mathrm{arcch}x \Rightarrow x = \mathrm{ch}y, x' = \mathrm{sh}y \Rightarrow (\mathrm{arcch}x)' = \frac{1}{\mathrm{sh}y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x>1.$$

Пример 20.1. Найдем производную функции $f(x) = x^x$ при $x > 0$.

Имеем $f(x) = x^x = e^{x\ln x} \ \Rightarrow\ f'(x) = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$.

Пример 20.2. Найдем производную функции $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Если $x \neq 0$, то имеем

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x - (1 - \cos x)}{x^2}.$$

При $x = 0$ имеем $f'(0) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{(\Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin^2(\Delta x/2)}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}.$$

21. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки c.

Определение 21.1. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке c, если существует такая постоянная A, что

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$. При этом произведение $A\Delta x$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке c и обозначают $df(c)$. Приращение Δx аргумента обычно обозначают dx, при таком обозначении

$$df(c) = Adx.$$

Из определения производной и определения дифференцируемости функции в точке вытекает критерий дифференцируемости.

Теорема 21.1 (критерий дифференцируемости). *Функция $f(x)$ дифференцируема в точке c тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(c)$, при этом $df(c) = f'(c)dx$.*

Геометрический смысл дифференциала $df(c)$ заключается в том, что $A\Delta x$ – приращение ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке c при переходе от точки c к точке $c + \Delta x$ (рис. 33).

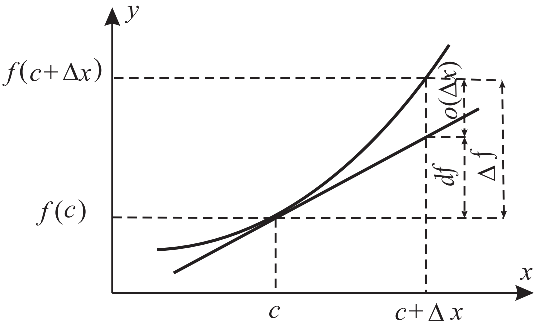

Рис. 33. Геометрический смысл дифференциала

Кроме того, величину $A\Delta x$ можно рассматривать как линейное приближение приращения Δy функции f, т. е.

$$f(c + \Delta x) - f(c) \approx A\Delta x$$

для малых Δx.

Определение 21.2. *Правосторонней* и *левосторонней производной* называют пределы

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}, \ f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Из определений производной и односторонних производных следует, что функция f имеет конечную производную в точке c тогда и только тогда, когда односторонние производные в точке c существуют, конечны и равны. В таком случае $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$.

Пример 21.1. Найдем односторонние производные для функции $y = |x|$ в точке $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

Производные $f'_-(0), f'_+(0)$ конечны, но не равны, следовательно, функция $|x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$ (рис. 34).

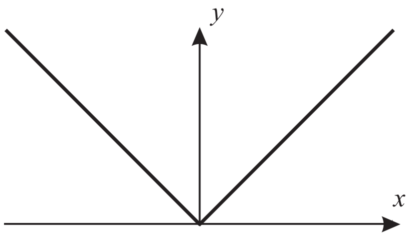

Рис. 34. График непрерывной, но не дифференцируемой в точке $x = 0$ функции

Пример 21.2. Отображение $f(x) = x\sin(1/x), \quad x \neq 0, \ f(0) = 0$ непрерывно на $\mathbb{R}$, но не имеет односторонних производных в точке $x = 0$ (рис. 35), поскольку пределы

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x \sin(1/\Delta x)}{\Delta x},$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x \sin(1/\Delta x)}{\Delta x}$$

не существуют (см. пример 12.3).

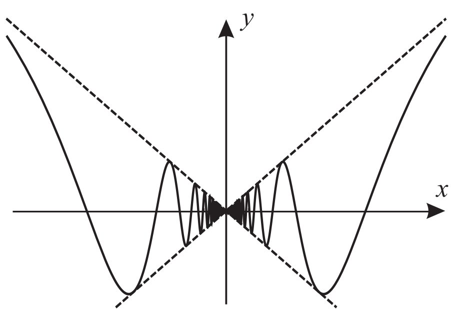

Рис. 35. График непрерывной функции, которая не имеет в точке $x = 0$ односторонних производных

Определение 21.3. Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* на промежутке $|a, b|$, если она дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), а на концах промежутка существуют конечные односторонние производные (если эти концы принадлежат промежутку).

В дальнейшем на концах промежутка будем рассматривать лишь односторонние производные, а для сокращения записи будем опускать слово «односторонние».

Определение 21.4. Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если она дифференцируема и ее производная $f'(x)$ непрерывна на $|a, b|$.

Пример 21.3. Отображение

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{21.1}$$

имеет в точке $x = 0$ равную нулю производную

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin(1/\Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

При $x \neq 0$ имеем $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Предел $\lim\limits_{x \to 0}(2x \sin(1/x) - \cos(1/x))$ не существует (см. пример 12.3). Функция (21.1) дифференцируема на $\mathbb{R}$, но не является непрерывно дифференцируемой. Ее производная разрывна в точке $x = 0$ (рис. 36).

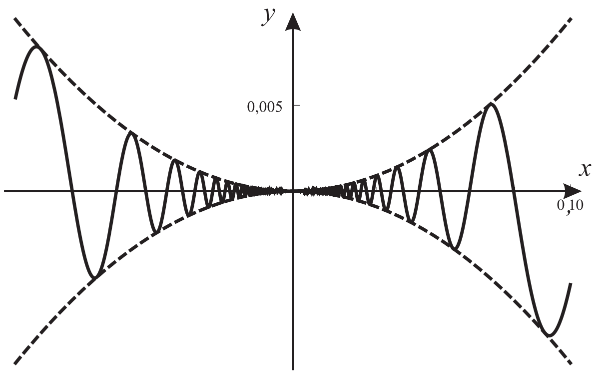

Рис. 36. График дифференцируемой функции, не являющейся непрерывно дифференцируемой

22. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если производная $f'(x)$ является дифференцируемой функцией, то можно определить *вторую производную*:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Рекуррентным образом можно определить производную порядка n:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

При этом полагают $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Определение 22.1. Функцию $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ называют *n раз дифференцируемой* (пишут $f \in D^n|a,b|$), если она имеет конечные производные до порядка n включительно в каждой точке промежутка $|a,b|$. Функция $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ называется *n раз непрерывно дифференцируемой* (пишут $f \in C^n|a,b|$), если функция f является n раз дифференцируемой и все ее производные до порядка n включительно непрерывны на $|a,b|$.

Имеют место следующие включения:

$$C^0|a,b| \supset D^1|a,b| \supset C^1|a,b| \supset \ldots \supset D^n|a,b| \supset C^n|a,b| \supset \ldots .$$

Теорема 22.1 (правило Лейбница). *Пусть $u,\ v \in D^n|a,b|$, тогда*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ 0! = 1.$$

$\diamondsuit$

Докажем теорему индукцией по n. База индукции $n=0$, $n = 1$ очевидна. Допустим, что верна формула

$$(uv)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}.$$

Для $n=m+1$ имеем

$$(uv)^{(m+1)} = ((uv)^{(m)})' = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k (u^{(k)} v^{(m-k)})' = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (u^{(k+1)} v^{(m-k)} + u^{(k)} v^{(m+1-k)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} u^{(k)} v^{(m+1-k)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)} v^{(m+1-k)} =$$

$$= C_m^m u^{(m+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^{k-1} + C_m^k) u^{(k)} v^{(m+1-k)} + C_m^0 u^{(0)} v^{(m+1)} =$$

$$= C_{m+1}^{m+1} u^{(m+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k u^{(k)} v^{(m+1-k)} + C_{m+1}^0 u^{(0)} v^{(m+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k u^{(k)} v^{(m+1-k)}.$$

$\square$

Пример 22.1. Найдем односторонние производные для функции $f(x) = x|x|$ в точке $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = 0, \quad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x |\Delta x|}{\Delta x} = 0.$$

Односторонние производные конечны и равны (рис. 37), следовательно, функция $f(x) = x|x|$ дифференцируема в точке $x = 0$, $f'(0) = 0$.

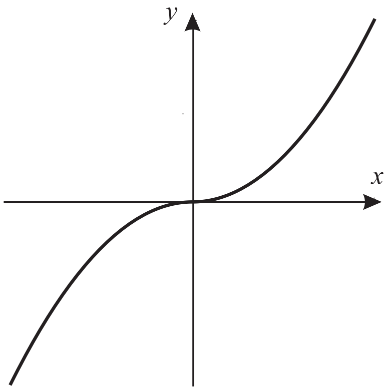

Рис. 37. График непрерывно дифференцируемой функции ($f(x) = x|x|$), не являющейся дважды дифференцируемой

Производная функции $f(x) = x|x|$ равна

$$(x|x|)' = \begin{cases} -2x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна на $\mathbb{R}$ (рис. 38), следовательно, функция является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$.

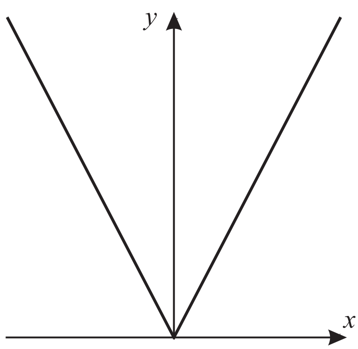

Рис. 38. График производной функции $y = x|x|$

Найдем вторые односторонние производные функции $f(x) = x|x|$ в точке $x = 0$:

$$f''_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2, \quad f''_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

Производные $f''_-(0)$, $f''_+(0)$ конечны, но не равны, следовательно, функция $f(x) = x|x|$ не является дважды дифференцируемой в точке $x = 0$.

Отображение

$$y = \begin{cases} x^3 \sin(1/x), \; x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0, \end{cases}$$

дважды дифференцируемо на $\mathbb{R}$, но не является дважды непрерывно дифференцируемым.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$ зависит от двух переменных x и dx. Если приращение аргумента dx фиксировано, то df является функцией лишь от x. Можно определить дифференциал второго порядка следующим образом:

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x)dx) = df'(x) \cdot dx = f''(x)dx^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2$. Аналогичным образом по индукции можно получить

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Пусть $y = f(\varphi(t))$ – сложная функция. Тогда по теореме о производной сложной функции имеем $y'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Отсюда получаем, что

$$dy(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f'(x)dx,$$

где $x = \varphi(t)$. Таким образом, формула для дифференциала первого порядка верна независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией от t. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала.*

Отметим, что дифференциалы высших порядков не обладают инвариантностью формы. Например,

$$d^2(f(\varphi(t))) = d(f'(\varphi(t))\varphi'(t))dt =$$

$$= f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 dt^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2 = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

ПРОИЗВОДНАЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $x = x(t), y = y(t), t \in T$, — две функции, определенные на множестве T. Предположим, что функция $x = x(t), t \in T$, имеет обратную функцию $t = t(x), x \in X = \{x : x = x(t), t \in \in T\}$. Построим функцию $y = y(t(x)), x \in X$, которую называют функцией, заданной параметрически соотношениями $x = x(t), y = = y(t), t \in T$. Например, график функции, заданной параметрически соотношениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (0, \pi)$, является верхней полуокружностью. В этом примере $t = t(x) = \arccos x, y = = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Используя теоремы о производных сложной и обратной функций, получаем формулу для вычисления производной параметрически заданной функции

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, x = x(t), t \in T.$$

Аналогичным образом можно вычислять производные высших порядков от функции, заданной параметрически:

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}, x = x(t)$$

и т. д.

Например, в случае $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in (0, \pi)$, получаем

$$y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t}, x = \cos t.$$

Отсюда $y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$. Такой же результат можно получить, дифференцируя функцию $y = y(t(x)) = \sqrt{1 - x^2}$,

$$(\sqrt{1 - x^2})' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

23. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пусть задана функция $f(x)$, $x \in |a,b|$. *Первообразной* для функции $f(x)$ называют такую функцию $F(x)$, $x \in |a,b|$, что

$$F'(x) = f(x) \ \forall x \in |a,b|.$$

Первообразной для $\cos x, x \in (-\infty, +\infty)$, служит функция $F(x) = \sin x$. Вместе с тем первообразной будет и функция $F_1(x) = \sin x + 1$.

Теорема 23.1 (об общем виде первообразной). *Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $|a,b|$. Функция $\Phi(x)$ также является первообразной для функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x)+C \ \ \forall x \in |a,b|$, где C – постоянная.*

Доказательство сразу вытекает из того факта, что любые две функции с совпадающими на промежутке производными различаются на константу (см. теорему 26.5).

Таким образом, совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, $x \in |a,b|$, где $F(x)$ — одна из первообразных функций, а C — произвольная постоянная.

Определение 23.1. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, $x \in |a,b|$, называют *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначают

$$\int f(x)dx.$$

Функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, а x — переменной интегрирования.

Из теоремы об общем виде первообразной вытекает, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная.

Из определения неопределенного интеграла вытекает, что операции дифференцирования и неопределенного интегрирования взаимно обратны, т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Если для функций $f(x)$, $g(x)$ существуют первообразные на промежутке $|a, b|$, то имеет место свойство линейности неопределенного интеграла, т. е. для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Непосредственной проверкой с помощью таблицы производных находят следующие интегралы:

1) $\int e^x dx = e^x + C$;

2) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

9) $\int \operatorname{ch} x \; dx = \operatorname{sh} x + C$;

10) $\int \operatorname{sh} x \; dx = \operatorname{ch} x + C$;

11) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$;

12) $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{cth} x + C$;

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arcsh} x + C$;

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arcch} x + C$.

Приведем основные методы вычисления неопределенных интегралов.

1. *Внесение множителя под знак дифференциала.* Если подынтегральную функцию можно представить в виде

$$f(x) = g(u(x))u'(x)$$

и возможно найти первообразную $G(u)$ для функции $g(u)$, то $(G(u(x)))' = g(u(x))u'(x) = f(x)$, следовательно:

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))u'(x)dx = \int g(u)du = G(u(x)) + C.$$

Пример 23.1. $\int \frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2} dx =$

$$= \int \mathrm{arctg} x \ d(\mathrm{arctg} x) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C.$$

2. *Замена переменных.* Пусть $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая строго монотонная функция, $\varphi'(t) \neq 0$, $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ и $G(t)$ — первообразная для функции $g(t)$. Тогда согласно теореме о производной обратной функции функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную $t = \psi(x)$ и $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$. Следовательно, $g(\psi(x))\psi'(x) = f(x)$. По теореме о производной сложной функции имеем $(G(\psi(x)))' = g(\psi(x))\psi'(x)$. Таким образом, функция $G(\psi(x))$ является первообразной для $f(x)$. Отсюда имеем

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\psi(x)) + C.$$

Пример 23.2. $\int \sqrt{1-x^2}dx =$

$$= [x = \sin t, dx = \cos t dt] = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C.$$

3. *Интегрирование по частям.* Пусть функции u, v непрерывно дифференцируемы. Поскольку $(uv)' = u'v + uv'$, то

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Пример 23.3. $\int x \ln x dx =$

$$= [u = \ln x, dv = x dx, du = dx/x, v = x^2/2] =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Пример 23.4. $\int x e^x dx =$

$$= [u = x, dv = e^x dx, du = dx, v = e^x] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 23.5. $\int e^x \sin x dx =$

$$= [u = \sin x, dv = e^x dx, du = \cos x dx, v = e^x] = e^x \sin x -$$

$$- \int e^x \cos x dx = [u = \cos x, dv = e^x dx, du = -\sin x dx, v = e^x] =$$

$$= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Пример 23.6. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx =$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = \operatorname{arctg} x -$$

$$- \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = [u = x, dv = \frac{xdx}{(x^2+1)^2}, du = dx, v = -\frac{1}{2(x^2+1)}] =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

24. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим рациональную функцию $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$, где $Q(x)$, $P(x)$ – некоторые многочлены с действительными коэффициентами. Не нарушая общности, можно считать, что старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен 1.

Рациональную функцию $R(x)$ называют правильной, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе: $\deg Q < \deg P$. Каждую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{P(x)},$$

где $Q(x) = S(x)P(x) + T(x)$, $\deg T < \deg P$.

Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами и старшим коэффициентом 1 можно разложить в произведение линейных многочленов и квадратичных многочленов с отрицательными дискриминантами:

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

Рациональные функции вида

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l},\ A, M, N, \alpha, p, q \in \mathbb{R},\ p^2-4q<0,\ k, l \in \mathbb{N},$$

называют простейшими дробями.

Теорема 24.1 (о разложении рациональной функции). *Каждую правильную рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей:*

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

$\diamondsuit$

Имеем $P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+ + p_tx+q_t)^{l_t}$. Отсюда

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_{1,k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{Q(x)-A_{1,k_1}\widetilde{P}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\widetilde{P}(x)},$$

где $\widetilde{P}(x) = (x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$.

Выберем A_{1,k_1} так, чтобы $Q(\alpha_1) - A_{1,k_1}\widetilde{P}(\alpha_1) = 0$. Это возможно сделать, так как $\widetilde{P}(\alpha_1) \neq 0$, следовательно,

$$\frac{Q(x)-A_{1,k_1}\widetilde{P}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\widetilde{P}(x)} = \frac{(x-\alpha_1)\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1}\widetilde{P}(x)} = \frac{\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}\widetilde{P}(x)}.$$

Применяя аналогичные рассуждения к рациональной функции $\dfrac{\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}\widetilde{P}(x)}$, выделим слагаемое вида $\dfrac{A_{1,k_1-1}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}}$ и т. д. В результате получим, что

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \frac{\widehat{Q}(x)}{\widehat{P}(x)},$$

где $\widehat{P}(x) = (x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$.

Представим рациональную функцию $\dfrac{\widehat{Q}(x)}{\widehat{P}(x)}$ в виде

$$\frac{\widehat{Q}(x)}{\widehat{P}(x)} = \frac{M_{1,l_1}x + N_{1,l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{\widehat{Q}(x) - (M_{1,l_1}x + N_{1,l_1})\overline{P}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\overline{P}(x)},$$

где $\overline{P}(x) = (x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$.

Пусть $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ – комплексно-сопряженные корни квадратного трехчлена $x^2+p_1x+q_1$, $\beta_1 \neq 0$. Выберем постоянные M_{1,l_1}, N_{1,l_1} так, чтобы многочлен $\widehat{Q}(x)-(M_{1,l_1}x+N_{1,l_1})\overline{P}(x)$ имел корни $\alpha_1 \pm \pm \beta_1 i$. Это возможно сделать, так как $\overline{P}(\alpha_1 \pm \beta_1 i) \neq 0$ и $\beta_1 \neq 0$. Таким образом,

$$\frac{\widehat{Q}(x) - (M_{1,l_1}x + N_{1,l_1})\overline{P}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\overline{P}(x)} = \frac{(x^2+p_1x+q_1)\overline{Q}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\overline{P}(x)} =$$

$$= \frac{\overline{Q}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\overline{P}(x)}.$$

Применяя аналогичные рассуждения к рациональной функции $\dfrac{\overline{Q}(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}\overline{P}(x)}$, выделим слагаемое вида $\dfrac{M_{1,l_1-1}x + N_{1,l_1-1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}$ и т. д. В результате получим искомое представление

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

□

Приведем методы нахождения коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие дроби.

1. *Метод соответствующих коэффициентов.*

Пример 24.1. $\dfrac{1}{x^2-3x+2} =$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{x^2-3x+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+B=0, 2A+B=-1 \Rightarrow A=-1, B=1.$$

2. *Метод домножения.*

Пример 24.2. $\dfrac{1}{x^3(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Умножим левую и правую часть на x^3 и подставим значение $x = 0$, получим $A_3 = 1$.

Умножим левую и правую часть на x^3, затем продифференцируем и подставим значение $x = 0$. В результате получим, что $A_2 = \left(\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\right)'\Big|_{x=0} = 0$.

Умножим левую и правую часть на x^3, дважды продифференцируем и подставим $x = 0$. Получим, что $2A_1 = \left(\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\right)''\Big|_{x=0} = -4$. Следовательно, $A_1 = -2$.

Умножим левую и правую часть на $(x^2+1)^2$ и подставим значение $x = i$, получим $M_2 i + N_2 = \frac{1}{i^3} = i \Rightarrow M_2 = 1, N_2 = 1$.

Умножим левую и правую часть на $(x^2+1)^2$, продифференцируем и подставим значение $x = i$, получим $-4 = ((M_1 x + N_1)(x^2 + 1) + M_2 x + N_2)'\big|_{x=i} = -2M_1 + 2N_1 i + M_2 \Rightarrow N_1 = 0, M_1 = \frac{5}{2}$.

При вычислениях следует пользоваться следующим правилом: если у многочлена $P(x)$ есть корень α кратности k, то число α будет корнем кратности $k-1$ производной $P'(x)$.

Приведем методы интегрирования простейших дробей:

$$1) \int \frac{A}{(x-\alpha)^k} dx = \frac{A(x-\alpha)^{1-k}}{1-k} + C, k \neq 1;$$

$$2) \int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln|x-\alpha| + C;$$

$$3) \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx+N}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4} dx =$$

$$= [x + p/2 = t, q - p^2/4 = a^2 > 0] = \int \frac{Mt + N - Mp/2}{t^2+a^2} dt =$$

$$= \frac{M}{2} \ln(t^2+a^2) + \frac{N - Mp/2}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C;$$

$$4) \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}dx = [x+p/2=t, q-p^2/4=a^2>0, N_1=N-$$

$$-Mp/2] = \int \frac{Mt+N_1}{(t^2+a^2)^l}dt = \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + N_1\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^l} =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^l}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^l}dt =$$

$$= [u=t, dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^l}, du=dt, v=\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{2(1-l)}] =$$

$$= \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{1-l}}{1-l} + \frac{N_1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}} +$$

$$+\frac{N_1 t(t^2+a^2)^{1-l}}{2a^2(1-l)} - \frac{N_1}{2a^2(1-l)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}}.$$

Таким образом, при интегрировании функции $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$, $l>1$, показано, что вычисление интеграла $I_l = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^l}$ сводится к вычислению интеграла такого же вида $I_{l-1} = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}}$, но со степенью $l-1$ многочлена в знаменателе. Через конечное число таких преобразований вычисление рассматриваемого интеграла будет сведено к интегрированию функции $\frac{1}{(t^2+a^2)}$.

Приведем алгоритм интегрирования рациональных функций:

1) представим рациональную функцию в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции;

2) разложим правильную рациональную функцию в сумму простейших дробей;

3) интегрируем многочлен и простейшие дроби.

Указанный алгоритм позволяет найти неопределенный интеграл от любой рациональной функции, причем этот интеграл является элементарной функцией.

25. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Одночленом от двух переменных u, v называется выражение Au^kv^m, где $A \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Многочлен от двух переменных – это конечная сумма одночленов от двух переменных. Рациональная функция от двух переменных – это частное двух многочленов $Q(u,v)$, $P(u,v)$. Легко видеть, что множество рациональных функций замкнуто относительно арифметических операций и композиций. В дальнейшем через $R(u,v)$ будем обозначать некоторую рациональную функцию от двух переменных, а через $R_1(t)$, $R_2(t)$ – рациональные функции от переменной t.

Приведем классы функций, для которых существуют замены переменных, позволяющие свести интегрирование этих функций к интегрированию рациональных функций (алгоритм интегрирования рациональных функций описан в п. 24).

1. *Интегрирование функций вида* $R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+e}\right)^{m/n}\right)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $|a|+|b| \neq 0, |c|+|e| \neq 0$.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{m/n}\right)dx = \left[\frac{ax+b}{cx+e} = t^n, x = \frac{et^n - b}{a - ct^n}, dx = R_1(t)dt\right] =$$

$$= \int R\left(\frac{et^n - b}{a - ct^n}, t^m\right) R_1(t)dt = \int R_2(t)dt.$$

2. *Интегрирование функций вида* $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $b^2 - 4ac \neq 0$, $a \neq 0$. Поскольку существует интервал на котором $ax^2+bx+c > 0$, то $a > 0$ или $b^2 - 4ac > 0$.

Указанные функции интегрируются с помощью замен Эйлера:

а) $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t \;\Rightarrow\; x = \dfrac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$, $dx = R_1(t)dt$,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}, \frac{(t^2-c)\sqrt{a}}{b-2t}+t\right)R_1(t)dt = \int R_2(t)dt;$$

б) $b^2-4ac>0$, $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \big[ax^2+bx+c=$

$$= a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2), \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\lambda_1)t, dx = R_1(t)dt\big] =$$

$$= \int R\left(\frac{\lambda_1 t^2 - a\lambda_2}{t^2-a}, \frac{a(\lambda_1-\lambda_2)t}{t^2-a}\right)R_1(t)dt = \int R_2(t)dt.$$

3. *Интегрирование биномиального дифференциала* $x^m(a+$ $+bx^n)^p dx$, $m,n,p \in \mathbb{Q}$, $a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Интеграл от биномиального дифференциала является элементарной функцией только в трех случаях:

1) $p \in \mathbb{Z}$;
2) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$;
3) $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$.

В первом случае ($p \in \mathbb{Z}$) производится замена $x = t^r$, где r – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n.

Во втором случае ($\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$) производится замена $a+bx^n =$ $= t^s$, где s – знаменатель числа p.

В третьем случае ($\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$) производится замена $ax^{-n}+$ $+ b = t^s$, где s – знаменатель числа p.

Пример 25.1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-1/4}dx =$

$$= \Bigg[m=0, n=4, p=-1/4, a=b=1,$$

$$\frac{m+1}{n}+p=0, x^{-4}+1=t^4, x=(t^4-1)^{-1/4}, dx=-t^3(t^4-1)^{-5/4}dt\Bigg] =$$

$$= \int \frac{t^2}{1-t^4}dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

4. *Интегрирование рационально-тригонометрических функций* $R(\cos x, \sin x)$. Функции указанного вида интегрируются с помощью универсальной тригонометрической замены $t = \mathrm{tg}\big(\dfrac{x}{2}\big)$:

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \left[\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, x = 2\mathrm{arctg} t\right] =$$

$$= \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

В ряде частных случаев можно применять следующие подстановки, которые приводят к менее громоздким вычислениям по сравнению с универсальной тригонометрической подстановкой:

1) $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \Rightarrow t = \cos x$;

2) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \Rightarrow t = \sin x$;

3) $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \Rightarrow t = \mathrm{tg} x$.

Пример 25.2. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = [t = \mathrm{tg}\,(\dfrac{x}{2})] =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2})| + C.$$

Пример 25.3. $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = [t = \mathrm{tg}\, x] =$

$$= \int \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}(t-\frac{1}{t})) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{tg}\, x - \frac{1}{\mathrm{tg}\, x})) + C.$$

Далее в п. 37 будет доказано, что любая непрерывная на промежутке I функция $f(x)$ имеет первообразную на этом промежутке, а значит, определен интеграл $\int f(x)dx$. При этом интеграл от элементарной функции необязательно является элементарной функцией. Такие интегралы, т. е. интегралы от элементарных функций, не являющиесяэлементарнымифункциями, относят к *неберущимся*.

Их примерами служат следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл вероятности;

2) $\int \dfrac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус;

3) $\int \dfrac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;

4) $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля;

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $0 < k < 1$, – эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра.

26. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию $f : |a, b| \to \mathbb{R}$, и пусть x_0 – внутренняя точка промежутка $|a, b|$.

Точка x_0 называется *точкой локального максимума*, если существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

для любых $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума*, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x) < f(x_0)$ для любых $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Точка x_0 называется *точкой локального минимума*, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x) \geqslant f(x_0)$ для любых $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Точка x_0 называется *точкой строгого локального минимума*, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x) > f(x_0)$ для любых $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Все эти точки называются *точками локального экстремума функции* f (рис. 39).

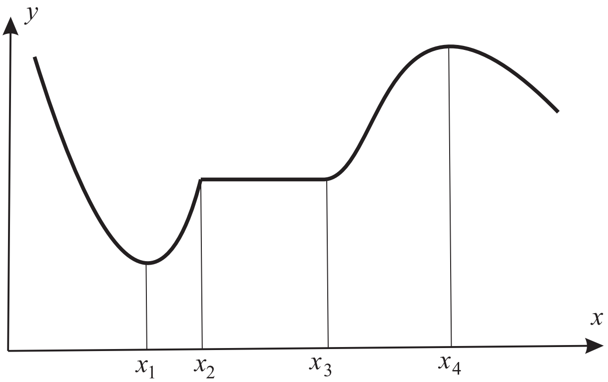

Рис. 39. Точки локального экстремума:
x_1 – точка строгого локального минимума;
x_2 – точка локального максимума; x_3 – точка локального минимума;
x_4 – точка строгого локального максимума

Точка x_0 называется *стационарной точкой* функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$.

Приведем основные свойства дифференцируемых функций.

Теорема 26.1 (теорема Ферма). *Если x_0 – точка локального экстремума функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и функция f дифференцируема в точке x_0, то x_0 – стационарная точка функции f.*

$\diamondsuit$

Предположим, что точка x_0 является точкой локального максимума. Тогда для любых таких Δx, что $x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, имеем

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0.$$

Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ при $\Delta x < 0$. Отсюда получаем, что

$$f'_+(x_0) \leqslant 0, \ f'_-(x_0) \geqslant 0.$$

Поскольку $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

$\square$

Замечание 26.1. Касательная к графику дифференцируемой в точке экстремума функции параллельна оси Ox (рис. 40).

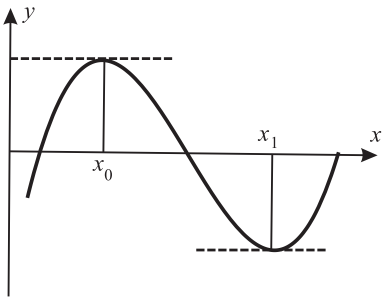

Рис. 40. Геометрическая иллюстрация теоремы Ферма

Теорема 26.2 (теорема Ролля). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Если $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) существует стационарная точка функции f.*

$\diamondsuit$

По теореме Вейерштрасса существуют такие точки $\underline{x}$, $\overline{x} \in [a, b]$, что $f(\underline{x}) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(\overline{x}) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Если $f(\underline{x}) = f(\overline{x})$, то функция f постоянная на отрезке $[a, b]$ и каждая точка интервала (a, b) является стационарной точкой функции f. Пусть $f(\underline{x}) < < f(\overline{x})$. Поскольку $f(a) = f(b)$, то хотя бы одна из точек $\underline{x}, \overline{x}$ принадлежит интервалу (a, b). Тогда по теореме Ферма эта точка является стационарной.

$\square$

Замечание 26.2. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$, то существует такая точка $c \in \in (a, b)$, что касательная к графику функции f в точке $(c, f(c))$ параллельная оси Ox (рис. 41).

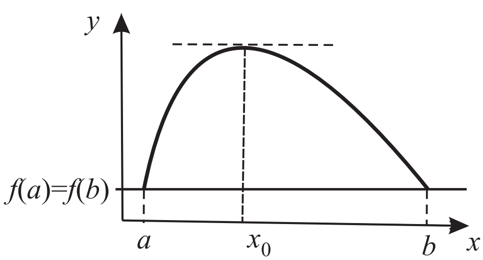

Рис. 41. Геометрическая иллюстрация теоремы Ролля

Теорема 26.3 (теорема Лагранжа). *Если функция* f *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема на интервале* (a,b), *то существует такая точка* $c \in (a,b)$, *что*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

$\diamondsuit$

Определим функцию

$$\varphi(x)=(f(b)-f(a))(x-a)-(f(x)-f(a))(b-a).$$

Имеем $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Кроме того, функция φ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), поэтому она удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует такая точка $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c)=0$.

Таким образом,

$$\varphi'(x)=f(b)-f(a)-f'(x)(b-a) \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

$\square$

Замечание 26.3. Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно угловому коэффициенту секущей, проходящей через концы $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ графика функции $f(x)$, $x \in [a,b]$. Согласно теореме Лагранжа существует такая точка $c \in (a,b)$, что касательная к графику функции в точке $(c,f(c))$ параллельна секущей AB (рис. 42).

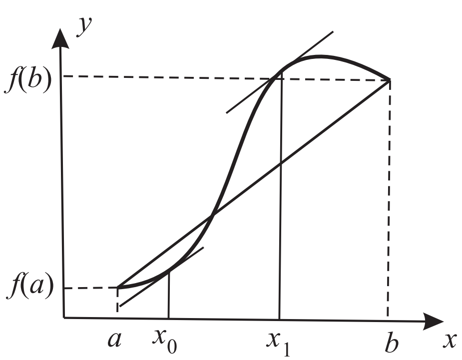

Рис. 42. Геометрическая иллюстрация теоремы Лагранжа

Следствие 26.1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то для любых $x, x+$ $+\Delta x \in [a,b]$ существует такое $\theta = \theta(x,\Delta x) \in (0,1)$ (рис. 43), что*

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

$\diamondsuit$

Пусть $\Delta x > 0$. По теореме Лагранжа существует такая точка $c \in (x, x+\Delta x)$, что

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x.$$

Положим $\theta = \dfrac{c-x}{\Delta x}$. Очевидно, что $\theta \in (0,1)$ и $f(x+\Delta x) - f(x) =$ $= f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$.

$\square$

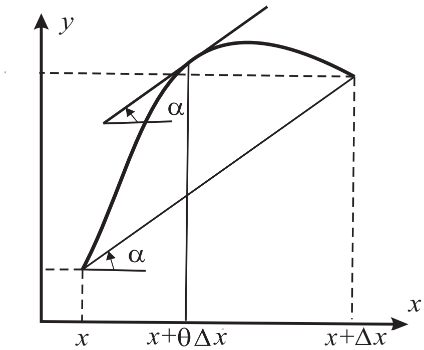

Рис. 43. Геометрическая иллюстрация следствия 26.1

Теорема 26.4 (критерий постоянства дифференцируемой функции). *Для постоянства дифференцируемой на промежутке $|a,b|$ функции необходимо и достаточно, чтобы ее производная тождественно равнялась нулю на этом промежутке.*

$\diamondsuit$

Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Зафиксируем произвольные x_0, x_0+ $+\Delta x \in |a,b|$. Выберем отрезок $[\alpha,\beta] \subset |a,b|$ так, чтобы x_0, x_0+ $+\Delta x \in [\alpha,\beta]$. Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и дифференцируема на интервале (α,β), то по следствию 26.1 имеем

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

для некоторого $\theta \in (0,1)$. Так как $x_0 + \theta\Delta x \in |a,b|$, то $f'(x_0 + \theta\Delta x) = 0$. Следовательно, $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

$\square$

Теорема 26.5 (о функциях с совпадающими производными). *Если две дифференцируемые функции имеют на промежутке* $|a,b|$ *совпадающие производные, то они на этом промежутке отличаются на постоянную.*

$\diamondsuit$

Пусть $f'(x) = g'(x) \ \ \forall x \in |a,b|$. Определим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. Так как $h'(x) = 0 \ \ \forall x \in |a,b|$, то по теореме 26.4 имеем $h(x) \equiv C$, т. е. $f(x) = g(x) + C \ \ \forall x \in |a,b|$.

$\square$

Теорема 26.6 (теорема Коши). *Пусть функции* f *и* g *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируемы на интервале* (a,b), *причем* $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$. *Тогда существует такая точка* $c \in (a,b)$, *что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$\diamondsuit$

Из теоремы Лагранжа и условия $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$ вытекает, что $g(b) - g(a) \neq 0$.

Определим функцию

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует такая точка $c \in (a,b)$, что $\varphi'(c) = 0$. Имеем

$$\varphi'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)).$$

Поскольку $\varphi'(c) = 0$ и $g(b) - g(a) \neq 0$, то

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$\square$

27. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Пусть $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, через X_a обозначим некоторую проколотую окрестность точки a. При этом окрестность может быть односторонней (в таком случае запись $\lim\limits_{x \to a} \ldots$ означает соответствующий односторонний предел. Если $a = +\infty$, то под односторонней окрестностью X_a понимаем промежуток $[b, +\infty)$, а для $a = -\infty$ – промежуток $(-\infty, -b]$, $b > 0$.

Теорема 27.1 (правило Лопиталя). *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функции f, g дифференцируемы на X_a;

2) $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in X_a$;

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$; или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$;

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

$\diamondsuit$

Правило Лопиталя используется при вычислении пределов в следующих двух случаях:

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

Докажем сначала теорему в первом случае. Если $a \in \mathbb{R}$, то определим функции $F(x)$, $G(x)$ так, что $F(x) = f(x)$, $G(x) = g(x)$ при $x \in X_a$ и $F(a) = G(a) = 0$. Используя теорему Коши, получаем

$$x \in X_a \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \underset{x \to a}{\to} l.$$

Затем предположим, что $a = +\infty$ (случай $a = -\infty$ рассматривается аналогичным образом). Сделаем замену переменной $t = \dfrac{1}{x}$

и рассмотрим функции $\widetilde{f}(t) = f\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$, $\widetilde{g}(t) = g\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ в проколотой правосторонней окрестности $(0, 1/b]$ точки $t_0 = 0$. Функции $\widetilde{f}(t)$, $\widetilde{g}(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы, причем имеем $\lim\limits_{t\to+0}\widetilde{f}(t) = \lim\limits_{t\to+0}\widetilde{g}(t) = 0$. Используя уже доказанное утверждение, получаем $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/g(x) =$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} = \lim_{t\to+0}\frac{\Big(f\Big(\dfrac{1}{t}\Big)\Big)'}{\Big(g\Big(\dfrac{1}{t}\Big)\Big)'} = \lim_{t\to+0}\frac{f'\Big(\dfrac{1}{t}\Big)\Big(-\dfrac{1}{t^2}\Big)}{g'\Big(\dfrac{1}{t}\Big)\Big(-\dfrac{1}{t^2}\Big)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Во втором случае предположим сначала, что $a \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из четвертого условия теоремы вытекает, что

$$\exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X_a, 0 < |x-a| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|l - \frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем произвольные $x, \overline{x} \in X_a$, $x \neq \overline{x}$, лежащие в проколотой $\delta(\varepsilon)$-окрестности точки a, причем точку $\overline{x}$ зафиксируем. Тогда из теоремы Лагранжа и условия $g'(y) \neq 0 \ \ \forall y \in X_a$ вытекает, что $g(x) - g(\overline{x}) \neq 0$. С помощью теоремы Коши найдем такую точку c между x, $\overline{x}$, что

$$l - \frac{f(x)}{g(x)} = \left(l - \frac{f(x) - f(\overline{x})}{g(x) - g(\overline{x})}\right)\frac{g(x) - g(\overline{x})}{g(x)} - \frac{f(\overline{x})}{g(x)} + l\frac{g(\overline{x})}{g(x)} =$$

$$= \left(l - \frac{f'(c)}{g'(c)}\right)\left(1 - \frac{g(\overline{x})}{g(x)}\right) - \frac{f(\overline{x})}{g(x)} + l\frac{g(\overline{x})}{g(x)}.$$

Поскольку точка c также лежит в проколотой $\delta(\varepsilon)$-окрестности точки a, то

$$\left|l - \frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то найдется такое $\nu(\varepsilon, \overline{x}) > 0$, что

$$\forall x \in X_a, 0 < |x-a| \leqslant \nu(\varepsilon, \overline{x}) \Rightarrow \left|\frac{f(\overline{x})}{g(x)}\right| \leqslant \varepsilon, \ \left|\frac{g(\overline{x})}{g(x)}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $x \in X_a$, $0 < |x-a| \leqslant \min\{\delta(\varepsilon), \nu(\varepsilon, \overline{x})\}$, выполняется

$$\left| l - \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon) + \varepsilon + l\varepsilon \leqslant M\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Затем предположим, что $a \in \mathbb{R}$, $l = \infty$. Поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a. Следовательно, можно применить уже доказанную часть теоремы к функции $\dfrac{g(x)}{f(x)}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty = l.$$

Далее предположим, что $a = +\infty$, $l = \infty$. Этот случай сводится к случаю конечного a заменой $t = \dfrac{1}{x}$.

$\square$

Замечание 27.1. Правило Лопиталя можно применять лишь для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$. Тем не менее другие виды неопределенностей: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ – во многих случаях сводятся с помощью арифметических преобразований к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 27.1. Правило Лопиталя позволяет вычислить следующие важные для математического анализа пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0,\ \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to+0} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0,\ \alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

28. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Пусть функция f дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0. *Многочленом Тейлора* порядка n в точке x_0 называется многочлен

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Выражение $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ называется *остаточным членом*, а представление функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) -$$

формулой Тейлора порядка n для функции f в точке x_0.

Пусть I – интервал $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, содержащий точку x_0.

Теорема 28.1 (об остаточном члене формулы Тейлора). *Пусть* $f \in D^{n+1}(I)$; $x \in I$; $\varphi \in D(I)$, $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t \in I \setminus \{x\}$, *тогда между точками* x_0 *и* x *существует такая точка* c, *что*

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

$\diamondsuit$

Определим функцию

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Имеем

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Кроме того, $\psi(x_0) = R_n(x)$, $\psi(x) = 0$. По теореме Коши

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Отсюда получаем

$$-\frac{R_n(x)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \frac{1}{\varphi'(c)}.$$

□

Следствие 28.1 (представление остаточного члена в форме Лагранжа). *Пусть* $f \in D^{n+1}(I)$, $x \in I$, *тогда*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

для некоторого $\theta = \theta(x, x_0) \in (0, 1)$.

♢

Положим $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ в теореме 28.1:

$$R_n(x) = \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Теперь, полагая $\theta = \dfrac{c - x_0}{x - x_0}$, получаем требуемое представление.

□

Следствие 28.2 (представление остаточного члена в форме Коши). *Пусть* $f \in D^{n+1}(I)$, $x \in I$, *тогда существует такое* $\theta = \theta(x, x_0) \in (0, 1)$, *что*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}.$$

♢

Положим $\varphi(t) = x - t$ в теореме 28.1:

$$R_n(x) = \frac{-(x-x_0)}{-1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}\left(\frac{x-c}{x-x_0}\right)^n.$$

Полагая $\theta = \dfrac{c - x_0}{x - x_0}$, получаем требуемое представление.

□

Следствие 28.3 (представление остаточного члена в форме Пеано). *Пусть* $f \in C^n(I)$, *тогда* $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ *при* $x \to x_0$.

$\diamondsuit$

С помощью следствия 28.1 получаем $R_{n-1}(x) =$

$$= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Поскольку $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0, то получаем

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= T_n(x) + o(1)(x-x_0)^n, \ x \to x_0.$$

Отсюда получаем требуемое представление для остаточного члена $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

$\square$

Следствие 28.4 (формула Тейлора в дифференциалах). *Пусть* $f \in D^{n+1}(I)$, $x_0 + \Delta x \in I$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *тогда*

$$\Delta f = \frac{df(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}$$

для некоторого $\theta = \theta(x_0, \Delta x) \in (0,1)$.

$\diamondsuit$

Используя следствие 28.1, получаем

$$\Delta f = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1} =$$

$$= \frac{df(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}.$$

$\square$

Найдем разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора:

1) *разложение экспоненты:* $f(x) = e^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), x \to 0;$$

2) *разложение синуса* (рис. 44): $f(x) = \sin x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{\pi n}{2}) \Rightarrow f^{(2l)}(0) = 0, f^{(2l+1)}(0) = (-1)^l;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), x \to 0;$$

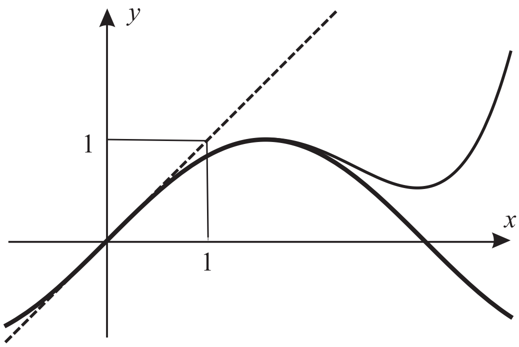

Рис. 44. Графики функций $y = x$ — пунктирная прямая; $y = x - x^3/6 + x^5/120$ — средняя кривая; $y = \sin x$ — нижняя кривая

3) *разложение косинуса:* $f(x) = \cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi n}{2}) \Rightarrow f^{(2l)}(0) = (-1)^l, f^{(2l+1)}(0) = 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), x \to 0;$$

4) *разложение логарифма:* $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n), x \to 0;$$

5) *разложение степенной функции:*

$$f(x) = (1+x)^\mu \Rightarrow f^{(n)}(0) = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1);$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu x}{1!} + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), x \to 0.$$

Пример 28.1. В этом примере показано, как разложения функций по формуле Тейлора могут быть использованы для раскрытия неопределенностей:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+o(x^2)} - 1 - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

29. ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ

Установим критерии монотонности и строгой монотонности дифференцируемых функций.

Теорема 29.1 (критерий монотонности дифференцируемой функции). *Для возрастания дифференцируемой функции* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *необходимо и достаточно, чтобы ее производная была неотрицательна* $f'(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in (a,b)$. *Для убывания дифференцируемой функции* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *необходимо и достаточно, чтобы ее производная была неположительна* $f'(x) \leqslant 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.

$\diamondsuit$

Докажем теорему для возрастающей функции.

Необходимость. Поскольку f возрастающая функция, то для любых x, $x_0 \in (a,b)$, $x > x_0$, имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Отсюда получаем, что в каждой точке $x_0 \in (a,b)$ выполняется

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Достаточность. Возьмем произвольные x_1, $x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq \neq x_2$. По теореме Лагранжа найдется такая точка c между x_1 и x_2, что

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2).$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0,$$

т. е. функция f возрастающая.

$\square$

Приведем пример, показывающий, что условия критерия монотонности не обеспечивают строгой монотонности функции.

Пример 29.1. Производная функции (рис. 45)

$$f(x) = \begin{cases} (x+1/2)^3, x \leqslant -1/2, \\ 0, -1/2 < x < 1/2, \\ (x-1/2)^3, x \geqslant 1/2, \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 3(x+1/2)^2, x \leqslant -1/2, \\ 0, -1/2 < x < 1/2, \\ 3(x-1/2)^2, x \geqslant 1/2, \end{cases}$$

неотрицательна (рис. 46). По критерию монотонности функция возрастающая. Однако она не является строго возрастающей, так как на интервале $(-1/2, 1/2)$ функция постоянна.

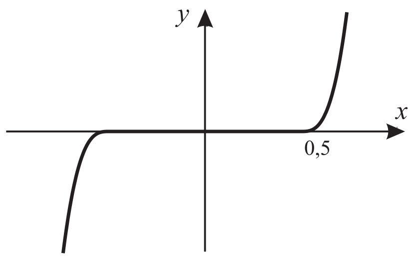

Рис. 45. График нестрого возрастающей функции

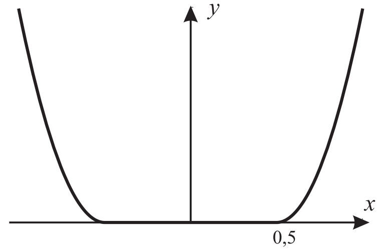

Рис. 46. График производной нестрого возрастающей функции

Теорема 29.2 (критерий строгой монотонности дифференцируемой функции). *Дифференцируемая функция* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *строго возрастает (строго убывает) тогда и только тогда, когда* $f'(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$ ($f'(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in (a,b)$) *и ее производная* $f'(x)$ *не обращается в нуль ни на каком интервале* $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$.

Доказательство теоремы вытекает из критерия монотонности дифференцируемой функции и критерия постоянства дифференцируемой функции.

Пример 29.2. Функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, так как $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ и $f'(x)$ обращается в нуль лишь в одной точке.

Приведем необходимое и достаточные условия локального экстремума функции.

Необходимое условие локального экстремума следует из теоремы Ферма: *пусть функция* f *дифференцируема в точке* $x_0 \in (a,b)$ *и точка* x_0 *является точкой локального экстремума функции* f, *тогда* x_0 *— стационарная точка функции* $f'(x_0) = 0$.

Отсюда следует, что точками, подозрительными на точки локального экстремума дифференцируемой функции, являются только ее стационарные точки; для непрерывных функций, кроме стационарных – те точки, в которых функция не является дифференцируемой.

Теорема 29.3 (первое достаточное условие локального экстремума). *Пусть* x_0 *– стационарная точка функции* f *либо точка, в которой функция недифференцируема; функция* f *непрерывно дифференцируема на интервалах* $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ *и непрерывна в точке* x_0. *Если на интервале* $(x_0-\delta, x_0)$ *производная положительна* $(f'(x)>0)$, *а на интервале* $(x_0, x_0+\delta)$ *– отрицательна* $(f'(x)<0)$, *то* x_0 *– точка строгого локального максимума; если на интервале* $(x_0-\delta, x_0)$ *производная отрицательна* $(f'(x)<0)$, *а на интервале* $(x_0, x_0+\delta)$ *– положительна* $(f'(x)>0)$, *то* x_0 *– точка строгого локального минимума; если на каждом интервале* $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ *производная положительна* $(f'(x)>0)$ *или отрицательна* $(f'(x)<0)$, *то* x_0 *не является точкой локального экстремума.*

♢

Докажем теорему для локального максимума. На интервале $(x_0-\delta, x_0)$ функция строго возрастает, а на интервале $(x_0, x_0+\delta)$– строго убывает. Следовательно, x_0 – точка строгого локального максимума.

□

Теорема 29.4 (второе достаточное условие локального экстремума). *Пусть функция* f *дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки* x_0. *Если* $f''(x_0)>0$, *то* x_0 *– точка строгого локального минимума; если* $f''(x_0)<0$, *то* x_0 *– точка строгого локального максимума.*

♢

Докажем теорему для локального максимума. По формуле Тейлора имеем

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0+\theta(x-x_0))}{2!}(x-x_0)^2.$$

По теореме о стабилизации знака $f''(x)<0$ в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0. Следовательно, $f(x)<f(x_0)$ для всех x из проколотой окрестности $U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$, т. е. x_0 – точка строгого локального максимума.

□

Теорема 29.5 (третье достаточное условие локального экстремума). *Пусть функция f является n раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки x_0; $f'(x_0) = = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Если n четное и $f^{(n)}(x_0) > > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума; если n четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума; если n нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

$\diamondsuit$

По формуле Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n.$$

По теореме о стабилизации знака в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 $f^{(n)}(x)$ сохраняет тот же знак, что и $f^{(n)}(x_0)$. По этой причине в проколотой окрестности $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0 при четном n и $f^{(n)}(x_0) > 0$ имеем $f(x) > f(x_0)$; при четном n и $f^{(n)}(x_0) < 0$ имеем $f(x) < f(x_0)$, а при нечетном n в любой окрестности точки x_0 функция f принимает значения как большие, так и меньшие, чем $f(x_0)$. Следовательно, точка x_0 не является точкой локального экстремума.

$\square$

30. ВЫПУКЛАЯ ФУНКЦИЯ

Определение 30.1. Функция $f : |a, b| \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любых $x_0, x_1 \in |a, b|$, $x_0 \neq x_1$, и любых $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(x_0 + \tau(x_1 - x_0)) \leqslant f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)). \tag{30.1}$$

Если заменить знак «$\leqslant$» в соотношении (30.1) на один из знаков «$<$», «$\geqslant$», «$>$», то получим определения *строго выпуклой*, *вогнутой*, *строго вогнутой* функции соответственно.

Замечание 30.1 (геометрическая иллюстрация выпуклой функции). Зафиксируем произвольные $x_0, x_1 \in |a,b|$, $x_0 \neq$ $\neq x_1$ (пусть для определенности $x_0 < x_1$). Отрезок секущей, проходящей через концы графика $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1))$, имеет параметрическое уравнение

$$x_\tau = x_0 + \tau(x_1 - x_0),\ y_\tau = f(x_0) + \tau(f(x_1) - f(x_0)), \tau \in [0,1].$$

Таким образом, условие выпуклости функции, которое можно переписать в виде

$$f(x_\tau) \leqslant y_\tau,$$

означает, что часть графика функции с концами A_0, A_1 лежит ниже секущей к графику, проходящей через точки A_0, A_1 (рис. 47).

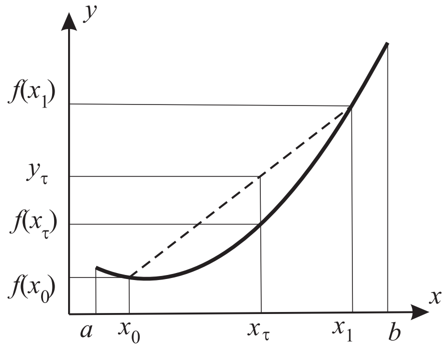

Рис. 47. График выпуклой функции

Теорема 30.1 (критерий выпуклости дифференцируемой функции). *Пусть функция $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ дифференцируемая. Для выпуклости функции f необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была возрастающей функцией на $|a,b|$.*

$\diamondsuit$

Необходимость. Возьмем произвольные $x_1, x_2, x_3 \in |a,b|$, $x_1 <$ $< x_2 < x_3$. Положим $\tau = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0,1)$. Поскольку $x_2 = x_1 +$ $+ \tau(x_3 - x_1)$, то из определения выпуклости f вытекают неравенства

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant \tau(f(x_3) - f(x_1)); \quad f(x_3) - f(x_2) \geqslant (1-\tau)(f(x_3) - f(x_1)).$$

Учитывая, что $1-\tau=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, можем записать

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{30.2}$$

Пусть M_i – точка с координатами $(x_i, f(x_i))$, $i=1,2,3$. Дроби, входящие в неравенства (30.2), являются угловыми коэффициентами секущих к графику функции, проходящих через точки M_2 и M_1, M_3 и M_1, M_3 и M_2 соответственно. Обозначая соответствующие угловые коэффициенты через $k(M_1M_2)$, $k(M_1M_3)$, $k(M_2M_3)$, из неравенств (30.2) получаем

$$k(M_1M_2)\leqslant k(M_1M_3)\leqslant k(M_2M_3). \tag{30.3}$$

Приведем геометрическую иллюстрацию неравенства (30.3) (рис. 48).

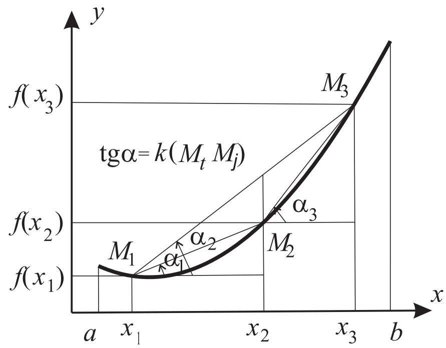

Рис. 48. Геометрическая иллюстрация неравенства (30.3)

Устремляя точку x_2 к точке x_1 в левом неравенстве (30.3), получаем $f'(x_1)\leqslant k(M_1M_3)$. Аналогичным образом, устремляя точку x_2 к точке x_3 и используя правое неравенство (30.3), получаем $k(M_1M_3)\leqslant f'(x_3)$. Таким образом, $f'(x_1)\leqslant f'(x_3)$.

Достаточность. Возьмем произвольные $x_0, x_1\in|a,b|$, $x_0<$ $<x_1$, $\tau\in(0,1)$. Полагая $x_\tau=x_0+\tau(x_1-x_0)$ и используя теорему Лагранжа, получаем

$$f(x_\tau)-f(x_0)=f'(c_1)(x_\tau-x_0)=f'(c_1)\tau(x_1-x_0); \tag{30.4}$$

$$f(x_1)-f(x_\tau)=f'(c_2)(x_1-x_\tau)=f'(c_2)(1-\tau)(x_1-x_0), \tag{30.5}$$

где $c_1\in(x_0,x_\tau)$, $c_2\in(x_\tau,x_1)$.

Умножая неравенство (30.4) на $1-\tau$, неравенство (30.5) – на τ, учитывая возрастание производной $f'(x)$, получаем

$$(1-\tau)(f(x_\tau)-f(x_0)) \leqslant \tau(f(x_1)-f(x_\tau)). \tag{30.6}$$

Отсюда следует требуемое неравенство

$$f(x_\tau) \leqslant f(x_0)+\tau(f(x_1)-f(x_0)).$$

□

Замечание 30.2. Любая выпуклая функция $f:|a,b|\to\mathbb{R}$ является непрерывной на интервале (a,b). Тем не менее не каждая выпуклая функция является дифференцируемой, например $f(x)= =|x|,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Следствие 30.1 (критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции). *Пусть функция $f:|a,b|\to\mathbb{R}$ дважды дифференцируемая. Для выпуклости функции f необходимо и достаточно, чтобы на промежутке $|a,b|$ вторая производная была неотрицательна $f''(x)\geqslant 0\ \ \forall x\in|a,b|$.*

Доказательство следствия вытекает из критериев выпуклости и монотонности дифференцируемой функции.

Теорема 30.2 (критерий строгой выпуклости дважды дифференцируемой функции). *Пусть функция $f:|a,b|\to\mathbb{R}$ дважды дифференцируемая. Для строгой выпуклости функции f необходимо и достаточно, чтобы $f''(x)\geqslant 0\ \ \forall x\in|a,b|$ и вторая производная $f''(x)$ не обращалась бы в нуль ни на одном интервале из промежутка $|a,b|$.*

♢

В силу критерия строгой монотонности дифференцируемой функции достаточно доказать, что условие строгой выпуклости f равносильно условию строгого возрастания производной $f'(x)$. Покажем, что это утверждение вытекает из доказательства критерия выпуклости дифференцируемой функции.

Действительно, условие строгой выпуклости гарантирует выполнение строгих неравенств в (30.2) и, следовательно, в (30.3), откуда следует строгое возрастание производной $f'(x)$. Верно и обратное утверждение, из условия строгого возрастания производной $f'(x)$ следует, что неравенство (30.6) является строгим, что обеспечивает строгую выпуклость функции f.

$\square$

Замечание 30.3. Аналогичным образом можно получить критерии вогнутости и строгой вогнутости функции:

1) для вогнутости дифференцируемой функции $f : |a,b| \to \to \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ убывала на $|a,b|$;

2) для вогнутости дважды дифференцируемой функции $f : |a,b| \to \mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \leqslant 0 \ \ \forall x \in |a,b|$;

3) для строгой вогнутости дважды дифференцируемой функции f необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \leqslant 0 \ \ \forall x \in |a,b|$ и вторая производная $f''(x)$ не обращалась в нуль ни на одном интервале из промежутка $|a,b|$.

Пример 30.1. В силу критерия строгой выпуклости функция $f(x) = x^2$ является строго выпуклой на $\mathbb{R}$. Непосредственно из определения выпуклости функции x^2 вытекает известное неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим: полагая в соотношении (30.1) $f(x) = x^2$, $\tau = \frac{1}{2}$, получаем

$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{x_0^2 + x_1^2}{2}.$$

31. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Определение 31.1. Точка x_0 называется точкой перегиба функции $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, если x_0 – точка непрерывности функции, существует конечная или бесконечная (определенного знака) производная $f'(x_0)$ и f строго выпукла на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ и строго вогнута на другом.

Теорема 31.1 (необходимое условие перегиба). *Пусть функция* $f:(x_0-\delta, x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ *дважды непрерывно дифференцируема и* x_0 *– точка перегиба функции* f, *тогда* $f''(x_0)=0$.

$\diamondsuit$

Предположим, что $f''(x_0)\neq 0$. Тогда по теореме о стабилизации знака $f''(x)$ сохраняет постоянный знак в некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, в этой же окрестности функция f является либо строго выпуклой, либо строго вогнутой, что противоречит определению точки перегиба. Таким образом, $f''(x_0)=0$.

$\square$

Точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль, называются *точками спрямления*.

Замечание 31.1. Точки спрямления являются подозрительными на точки перегиба. Однако не все точки спрямления являются точками перегиба. Например, точка $x_0=0$ является точкой спрямления функции $f(x)=x^4$, но не является точкой перегиба. Кроме того, точками, подозрительными на точки перегиба, являются точки, в которых функция f непрерывна, но имеет бесконечную (определенного знака) производную, а также точки, в которых функция дифференцируема, но не является дважды дифференцируемой.

Пример 31.1. Для функции $y=1+\sqrt[3]{x-1}$ точка $x=1$ является точкой перегиба, в которой $y'(0)=+\infty$ (рис. 49).

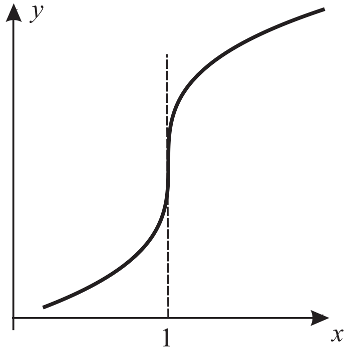

Рис. 49. $x=1$ – точка перегиба, в которой $f'(x)=+\infty$

Пример 31.2. Для функции

$$y = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^5, & x < 0, \end{cases} \qquad y'' = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ 20x^3, & x < 0, \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой перегиба, в которой функция не имеет второй производной (рис. 50).

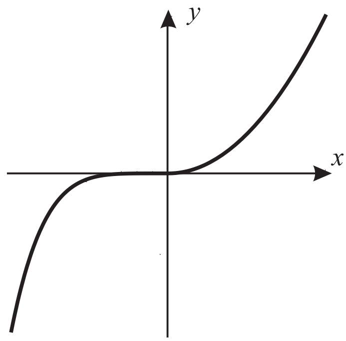

Рис. 50. $x = 0$ – точка перегиба, в которой функция не является дважды дифференцируемой

Теорема 31.2 (первое достаточное условие перегиба). *Пусть* x_0 *– точка, подозрительная на точку перегиба, и пусть функция* f *дважды непрерывно дифференцируема на интервалах* $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$, $\delta > 0$. *Если на одном из интервалов* $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ *вторая производная положительна* $(f''(x) > 0)$, *а на другом – отрицательна* $(f''(x) < 0)$, *то* x_0 *– точка перегиба, если на двух интервалах* $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$ *вторая производная или положительна* $(f''(x) > 0)$, *или отрицательна* $(f''(x) < 0)$, *то* x_0 *не является точкой перегиба.*

Доказательство теоремы вытекает из критериев выпуклости и вогнутости дважды дифференцируемой функции.

Теорема 31.3 (второе достаточное условие перегиба). *Пусть функция* f *трижды непрерывно дифференцируема на интервале* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$. *Если* $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, *то* x_0 *– точка перегиба.*

$\diamondsuit$

Пусть для определенности $f'''(x_0) > 0$, тогда по теореме о стабилизации знака $f'''(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Согласно критерию строгой монотонности $f''(x)$ строго возрастает в этой окрестности точки x_0. Так как $f''(x_0) = 0$, то $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Из первого достаточного условия перегиба вытекает, что x_0 – точка перегиба.

$\square$

Теорема 31.4 (третье достаточное условие перегиба). *Пусть функция f является n раз непрерывно дифференцируемой на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, и пусть*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Если n – нечетно, то x_0 – точка перегиба, иначе x_0 не является точкой перегиба.

$\diamondsuit$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2},\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

где точка c лежит между точками x_0 и x.

Если n – четное, то $f''(x)$ не меняет знак при переходе через точку x_0 и, следовательно, f не имеет перегиба в точке x_0. Если n – нечетное, то $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Согласно первому достаточному условию перегиба точка x_0 является точкой перегиба.

$\square$

Пример 31.3. Найдем точки перегиба функции $y = \ln(1 + x^2)$. Вычислим вторую производную $y'' = 2\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$. Точками перегиба функции могут быть лишь точки спрямления, т. е. корни уравнения $1 - x^2 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Вычислим третью производную $y''' = 4\dfrac{x^2 - 1 - x - x^2}{(1 + x^2)^3}$. Так как $y'''(-1) \neq 0$, $y'''(1) \neq 0$, то по второму достаточному условию перегиба точки $x = 1$ и $x = -1$ являются точками перегиба функции.

32. ГЛОБАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Рассмотрим функцию $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть $\sup\limits_{x \in X} f(x) = M$, $\inf\limits_{x \in X} f(x) = m$, $-\infty < M \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant m < +\infty$, — экстремальные значения для функции f на множестве X.

Если существует такая точка $\bar{x} \in X$, что $f(\bar{x}) = M$, то $\bar{x}$ называют точкой *глобального максимума* и пишут $M = \max\limits_{x \in X} f(x)$.

Если существует такая $\underline{x} \in X$, что $f(\underline{x}) = m$, то $\underline{x}$ называют точкой *глобального минимума* и пишут $m = \min\limits_{x \in X} f(x)$.

Рассмотрим непрерывную функцию $f : |a,b| \to \mathbb{R}$. Подозрительными на точки глобального экстремума являются следующие точки:

1) стационарные точки f, лежащие в интервале (a,b);

2) точки интервала (a,b), в которых функция f недифференцируема;

3) концы промежутка $|a,b|$, принадлежащие этому промежутку.

Если промежуток $|a,b|$ является отрезком, то согласно теореме Вейерштрасса существуют точки глобального минимума и максимума на этом отрезке.

Теорема 32.1 (о глобальном минимуме выпуклой функции). *Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *выпуклая дифференцируемая функция. Если* $x_0 \in (a,b)$ *– стационарная точка функции* f *, то* x_0 *– точка глобального минимума на интервале* (a,b).

$\diamondsuit$

По критерию выпуклости дифференцируемой функции производная $f'(x)$ возрастает на (a,b). Так как $f'(x_0) = 0$, то $f'(x) \leqslant 0$ $\forall x \in (a, x_0)$ и $f'(x) \geqslant 0$ $\forall x \in (x_0, b)$. Согласно критерию монотонности функция f убывает на (a, x_0) и возрастает на (x_0, b). Следовательно, x_0 – точка глобального минимума функции f на интервале (a,b).

$\square$

Замечание 32.1. Аналогичным образом можно доказать, что если $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ – вогнутая дифференцируемая функция, а $x_0 \in \in (a, b)$ – стационарная точка, то x_0 – точка глобального максимума функции f на интервале (a, b).

Покажем способ нахождения глобальных экстремумов непрерывной функции f в двух случаях:

1) X — отрезок $[a, b]$;

2) X — интервал (a, b).

Рассмотрим первый случай. Если точка глобального экстремума — внутренняя точка отрезка $[a, b]$, то она является и точкой локального экстремума. Допустим, что f имеет конечное число точек $\xi_1, \ldots, \xi_l$, подозрительных на точки локального экстремума, принадлежащих интервалу (a, b). Для выявления точек глобального экстремума (рис. 51) достаточно найти значения функции $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_l)$ и сравнить их со значениями $f(a)$ и $f(b)$:

$$M = \max\{f(\xi_1), \ldots, f(\xi_l), f(a), f(b)\};$$

$$m = \min\{f(\xi_1), \ldots, f(\xi_l), f(a), f(b)\}.$$

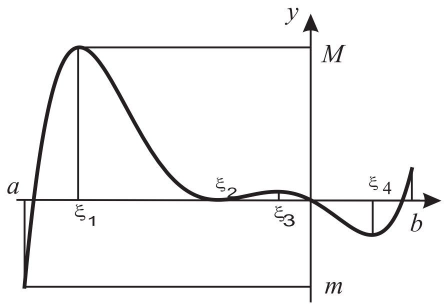

Рис. 51. $M = f(\xi_1)$ – глобальный максимум;
$m = f(a)$ – глобальный минимум

Во втором случае допустим, что f имеет конечное число точек $\xi_1, \ldots, \xi_l$, подозрительных на точки локального экстремума, принадлежащих интервалу (a, b), и существуют (конечные или бесконечные) пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b - 0)$. Вычислим значения функции $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_l)$. Если

$$\max\{f(\xi_1), \ldots, f(\xi_l)\} = f(\xi_i) \geqslant \sup\{f(a + 0), f(b - 0)\},$$

то ξ_i — точка глобального максимума, если $\max\{f(\xi_1), \ldots, f(\xi_l)\} < \sup\{f(a+0), f(b-0)\}$, то f не достигает глобального максимума на (a, b) и $\sup\limits_{x\in X} f(x) = \sup\{f(a+{}$ $+\,0), f(b-0)\}$. Аналогичным образом находим точки глобального минимума (рис. 52).

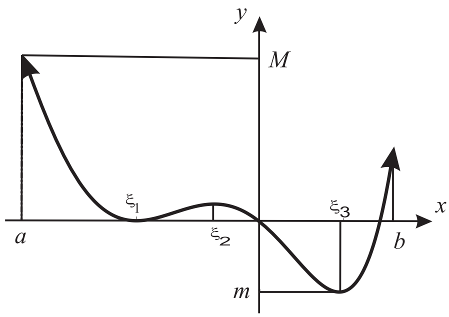

Рис. 52. $M = f(a+0)$ – глобальный максимум;
$m = f(\xi_3)$ – глобальный минимум

Пример 32.1. Из прямоугольного листа жести размером 6×5, изготовим ящик наибольшего объема в форме параллелепипеда.

Если x — высота ящика, то его объем

$$V(x) = (6-2x)(5-2x)x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5/2.$$

Для решения поставленной задачи найдем $\max\limits_{x\in[0,5/2]} V(x)$ (как найти максимум непрерывной на отрезке функции, показано в первом случае):

$$V'(x) = 12x^2 - 44x + 30 = 0 \quad x_1 = \frac{11-\sqrt{31}}{6}, \quad x_2 = \frac{11+\sqrt{31}}{6} \notin [0, 5/2];$$

$$V\Big(\frac{11-\sqrt{31}}{6}\Big) > 0, \quad V(0) = 0, \quad V(5/2) = 0.$$

Высота искомого ящика $x = \dfrac{11-\sqrt{31}}{6}$.

33. АСИМПТОТЫ

Рассмотрим функцию $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, пусть $x_0\in(a,b)$.

Определение 33.1. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, то прямая $x=x_0$ называется левосторонней вертикальной асимптотой. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=x_0$ по аналогии называется правосторонней вертикальной асимптотой (рис. 53). Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой, если она является как левосторонней, так и правосторонней вертикальной асимптотой.

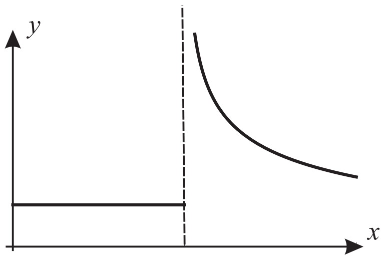

Рис. 53. Правосторонняя вертикальная асимптота

Определение 33.2. Если существуют такие числа α, β, что

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x-\beta)=0,$$

то прямая $y=\alpha x+\beta$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x\to+\infty$ (правосторонней наклонной асимптотой) (рис. 54).

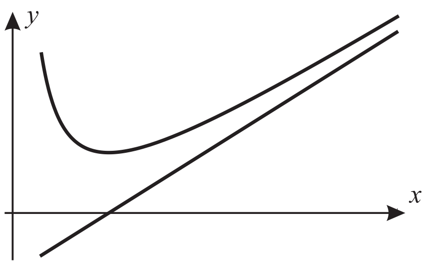

Рис. 54. Наклонная асимптота

Правосторонняя наклонная асимптота — прямая, к которой приближается график функции при $x \to +\infty$.

Теорема 33.1 (о наклонной асимптоте). *Для того чтобы прямая $y = \alpha x + \beta$ была правосторонней наклонной асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \ \beta = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x). \tag{33.1}$$

$\diamondsuit$

Необходимость. Если прямая $y = \alpha x + \beta$ – наклонная асимптота, то $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta = 0$, $f(x) - \alpha x - \beta) \underset{x \to +\infty}{=} o(1)$, $\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x)$, $\alpha = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{\beta}{x} - \dfrac{o(1)}{x}$, $\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Достаточность. Если существуют конечные пределы (33.1), то $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$. Значит, $y = \alpha x + \beta$ — наклонная асимптота.

$\square$

Замечание 33.1. Аналогичным образом можно сформулировать определение наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ (*левосторонней наклонной асимптоты*) и получить соответствующую теорему о наклонной асимптоте при $x \to -\infty$.

34. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Для построения графика функции $y = f(x)$ предварительно исследуют ее свойства:

1) находят область определения функции f и определяют ее точки разрыва;

2) проверяют функцию f на периодичность. Для периодической функции с периодом T достаточно проводить дальнейшее исследование на отрезке $[0, T]$;

3) проверяют функцию f на четность и нечетность. Если функция f четная или нечетная, то дальнейшее исследование достаточно проводить для $x \geqslant 0$;

4) находят вертикальные и наклонные асимптоты функции f;

5) находят производную $f'(x)$, определяют участки монотонности функции и точки локального экстремума;

6) находят вторую производную $f''(x)$, определяют участки выпуклости и вогнутости и точки перегиба;

7) находят точки пересечения графика с осями координат.

Пример 34.1. Построим график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

Свойства данной функции:

1) функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$;

2) функция f не является периодичной, так как f непрерывна и неограничена на $\mathbb{R}$;

3) функция f не является ни четной, ни нечетной, так как $f(1) = \sqrt[3]{2}$, $f(-1) = 0$;

4) функция f не имеет вертикальных асимптот, поскольку она непрерывна на $\mathbb{R}$. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \ \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \frac{1}{3},$$

то функция f имеет наклонную асимптоту $y = x + \frac{1}{3}$ при $x \to \pm$ $\pm\infty$;

5) найдем производную

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}x^{-1/3}(3x+2), \ x \neq 0, x \neq -1.$$

На интервалах $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(0, +\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(-\frac{2}{3}, 0)$ – убывает.

Функция имеет единственную стационарную точку $x_1 = -\frac{2}{3}$. При переходе через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x_1 = -\frac{2}{3}$ – точка локального максимума.

Функция f недифференцируема в точках $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. При переходе через точку $x_2 = -1$ производная $f'(x)$ не меняет знак, поэтому эта точка не является точкой локального экстремума.

При переходе через точку $x_3 = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс, поэтому точка $x_3 = 0$ явлется точкой локального минимума;

6) найдем вторую производную

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-5/3}x^{-4/3},\ x \neq 0, x \neq -1.$$

На интервале $(-\infty, -1)$ функция выпуклая, а на интервалах $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ – вогнутая.

Точек спрямления у функции нет. Точки $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ являются подозрительными на точки перегиба. При переходе через точку $x_3 = 0$ функция f не меняет характер выпуклости и вогнутости, поэтому эта точка не является точкой перегиба. При переходе через точку $x_2 = -1$ функция меняет характер с выпуклости на вогнутость. Кроме того, существует производная $f'(-1) = +\infty$. Следовательно, $x_2 = -1$ является точкой перегиба;

7) график функции пересекает оси координат в точках $(-1, 0)$, $(0, 0)$.

Установленные свойства функции позволяют построить ее график (рис. 55).

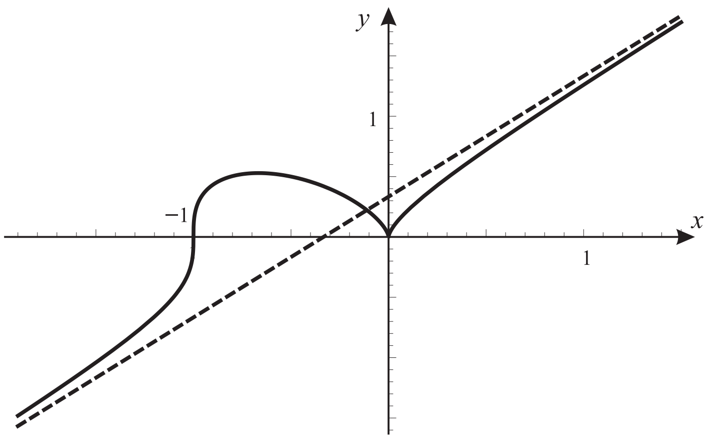

Рис. 55. График функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$

35. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а также *разбиение* $\{x_k\}$ *отрезка* $[a, b]$ точками $x_k, k = 0, 1, \ldots, n$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Когда нужно указать число точек в разбиении $\{x_k\}$, пишем $\{x_k\}_{k=0}^n$. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Обозначим через $\delta\{x_k\}$ *диаметр разбиения* $\{x_k\}$, т. е.

$$\delta\{x_k\} = \max_k \Delta x_k.$$

На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем точку ξ_k и определим *интегральную сумму*

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (35.1)$$

Замечание 35.1. Рассмотрим фигуру, ограниченную прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$. Произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ равно площади прямоугольника, основанием которого является горизонтальный отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, а высотой – вертикальный отрезок $[0, f(\xi_k)]$ (рис. 56).

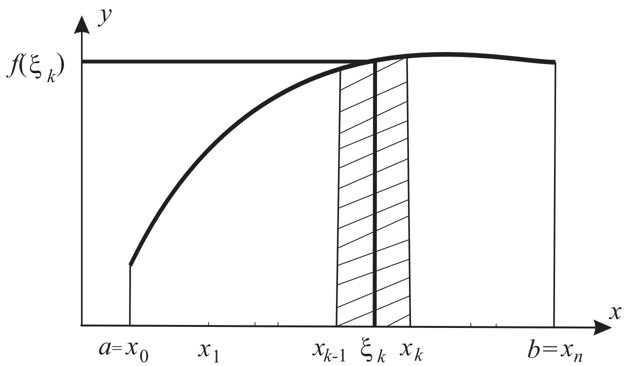

Рис. 56. Геометрическая иллюстрация интегральной суммы

Интегральная сумма σ – сумма площадей таких прямоугольников.

Определение 35.1. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$ (далее интегрируемой), если найдется число I, удовлетворяющее условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения $\{x_k\}$ отрезка $[a,b]$ с диаметром разбиения $\delta\{x_k\}$, не превосходящим $\delta(\varepsilon)$, для любых точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_k f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| \leqslant \varepsilon.$$

В данном случае число I называют определенным интегралом Римана (или определенным интегралом) от функции f на отрезке $[a,b]$. Пишут

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Лемма 35.1 (*M*-лемма интегрируемости). *Если существуют такие числа I и M, что*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \forall\{x_k\}_{k=0}^n,\ \delta\{x_k\} \leqslant \delta(\varepsilon), \forall\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| \leqslant M\varepsilon,$$

то функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Теорема 35.1 (первое необходимое условие интегрируемости). *Пусть функция $f : [a,b]$ является интегрируемой. Тогда для любой последовательности разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$, $m \in \mathbb{N}$, с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ при любом выборе точек $\xi_k^m \in$ $\in [x_{k-1}^m, x_k^m]$ последовательность интегральных сумм*

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m$$

сходится к интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $m \to \infty$.

$\diamondsuit$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем соответствующее $\delta(\varepsilon) > 0$ из определения 35.1. Так как $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0$, то найдется такое m_0, что для всех $m \geqslant m_0$ выполняется неравенство $\delta_m \leqslant \delta(\varepsilon)$. Из определения 35.1 для любых $m \geqslant m_0$ получаем

$$\left|\sigma_m - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon,$$

откуда вытекает требуемая сходимость.

$\square$

Теорема 35.2 (второе необходимое условие интегрируемости). *Если функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *– интегрируема, то* f *– ограничена.*

$\diamondsuit$

Предположим, что f не ограничена на $[a, b]$. Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$. Существует отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, на котором функция f не ограничена. Зафиксируем все точки ξ_k, участвующие в определении интегральной суммы, кроме точки ξ_i. В таком случае интегральную сумму можно рассматривать как функцию от $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Эта функция является неограниченной, поскольку f не ограничена на $[x_{i-1}, x_i]$. Таким образом,

$$\forall I \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon_0 = 1\ \forall \delta > 0\ \exists \{x_k\}_{k=0}^n, \delta\{x_k\} \leqslant \delta, \exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| > \varepsilon_0,$$

что противоречит определению интегрируемости функции f.

$\square$

Пример 35.1. Для постоянной функции $y = L - \mathrm{const}, x \in [a, b]$ при любом разбиении отрезка и при любом выборе точек ξ_k интегральные суммы равны $L(b-a)$, поэтому постоянная функция интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $\int_a^b L dx = L(b - a)$.

36. КРИТЕРИЙ КОШИ. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, а также две произвольные интегральные суммы σ и τ, соответствующие разбиениям $\{x_k\}_{k=0}^n$ и $\{z_r\}_{r=0}^s$ отрезка $[a, b]$, т. е.

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \ \tau = \sum_{r=1}^{s} f(\eta_r)\Delta z_r.$$

Теорема 36.1 (критерий Коши интегрируемости). *Функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема тогда и только тогда, когда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\forall \{x_k\},\ \delta\{x_k\} \leqslant \delta(\varepsilon)\ \forall \{z_r\},\ \delta\{z_r\} \leqslant \delta(\varepsilon), \forall \xi_k, \forall \eta_r \Rightarrow |\sigma - \tau| \leqslant \varepsilon.$$

$\diamondsuit$

Необходимость очевидным образом вытекает из определения 35.1 и неравенства $|\sigma - \tau| \leqslant |\sigma - I| + |\tau - I|$, где $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Достаточность. Функция f является ограниченной на $[a, b]$. Действительно, если бы функция f была неограниченной, то разность $|\sigma - \tau|$ можно было бы сделать сколько угодно большой, фиксируя все точки ξ_k, η_r, кроме одной точки ξ_i из отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, на котором функция не ограничена (см. доказательство теоремы 35.1).

Поскольку f ограничена $|f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in [a, b]$, то все интегральные суммы ограничены одной и той же постоянной:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\Delta x_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b - a).$$

Возьмем последовательность интегральных сумм (τ_m) с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Согласно принципу выбора существует сходящаяся подпоследовательность $\tau_{m_l} \underset{l\to\infty}{\to} A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$ из условия теоремы. Так как $\lim\limits_{l\to\infty} \tau_{m_l} = A$ и $\lim\limits_{l\to\infty} \delta_{m_l} = 0$, то существует такой номер l_0, что

$$|\tau_{m_{l_0}} - A| \leqslant \varepsilon, \ \delta_{m_{l_0}} \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Тогда для любого разбиения $\{x_k\}_{k=0}^n$: $\delta\{x_k\} \leqslant \delta(\varepsilon)$, для любых $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ выполняется

$$|\sigma - A| \leqslant |\sigma - \tau_{m_{l_0}}| + |\tau_{m_{l_0}} - A| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Согласно M-лемме интегрируемости функция f является интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

□

Используя критерий Коши интегрируемости, можно доказать интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции.

Для разбиений $\{x_k\}_{k=0}^n$, $\{z_r\}_{r=0}^s$ отрезка $[a, b]$ через Δ_{kr} обозначим длину пересечения двух отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $[z_{r-1}, z_r]$. Такое пересечение может быть пустым для некоторых k, r, в данном случае $\Delta_{kr} = 0$.

Лемма 36.1. *Пусть* δ_1, δ_2 – *диаметры разбиений* $\{x_k\}_{k=0}^n$, $\{z_r\}_{r=0}^s$, *тогда*

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{r=1}^s f(\eta_r)\Delta z_r = \sum_{k,r:|\xi_k-\eta_r|\leqslant\delta_1+\delta_2} (f(\xi_k) - f(\eta_r))\Delta_{kr}.$$

♢

Поскольку $\sum_{k=1}^n \Delta_{kr} = \Delta z_r$, $\sum_{r=1}^s \Delta_{kr} = \Delta x_k$, то

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{r=1}^s f(\eta_r)\Delta z_r = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s f(\xi_k)\Delta_{kr} - \sum_{r=1}^s \sum_{k=1}^n f(\eta_r)\Delta_{kr} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^s (f(\xi_k) - f(\eta_r))\Delta_{kr}.$$

Если $|\xi_k - \eta_r| > \delta_1 + \delta_2$, то отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, $[z_{r-1}, z_r]$ не пересекаются, и в этом случае $\Delta_{kr} = 0$.

□

Теорема 36.2 (об интегрируемости непрерывной функции). *Если функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна, то* f *интегрируема на отрезке* $[a, b]$.

$\diamondsuit$

По теореме Кантора функция f равномерна непрерывна на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) > 0 : \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Возьмем две произвольные интегральные суммы σ, τ с диаметрами разбиения, меньшими $\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Тогда по лемме 36.1 получаем

$$|\sigma - \tau| = \left| \sum_{k,r: |\xi_k - \eta_r| \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)} (f(\xi_k) - f(\eta_r))\Delta_{kr} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,r: |\xi_k - \eta_r| \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)} |f(\xi_k) - f(\eta_r)|\Delta_{kr} \leqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

$\square$

Замечание 36.1. Условие ограниченности функции f не является достаточным для ее интегрируемости. Функция Дирихле $D(x)$, принимающая значение 1 в рациональных точках и значение 0 – в иррациональных точках, не является интегрируемой ни на каком отрезке $[a, b]$, $a < b$, поскольку при любом сколько угодно малом разбиении отрезка можно построить интегральные суммы, равные $b - a$ и 0 (выбирая точки ξ_k рациональными в первом случае и иррациональными – во втором случае соответственно).

37. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть $f(x)$ – интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция. По определению полагаем

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx, \ \int_a^a f(x)dx := 0.$$

Приведем свойства определенного интеграла.

1. *Линейность.* Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то для любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \tag{37.1}$$

$\diamondsuit$

Поскольку f, g интегрируемы на $[a, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ \forall \{x_k\}_{k=0}^n : \delta\{x_k\} \leqslant \delta(\varepsilon), \ \forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon, \ \left| \sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k - \int_a^b g(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$\left| \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k - \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx \right| \leqslant |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon.$$

Согласно M-лемме к определению интеграла Римана получаем, что функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и выполняется равенство (37.1). $\square$

2. *Монотонность.* Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

$\diamondsuit$

Возьмем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a,b]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Поскольку $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in$ $\in [a,b]$, то для любого m имеем

$$\sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m \leqslant \sum_{k=1}^{n_m} g(\xi_k^m)\Delta x_k^m.$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $m \to \infty$, используя при этом первое необходимое условие интегрируемости, получаем

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

$\square$

3. *Аддитивность.* Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда для любых α, β, $\gamma \in [a,b]$ справедливо равенство

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

$\diamondsuit$

Пусть $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$. Поскольку функция f непрерывна на отрезках $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\gamma]$, $[\beta,\gamma]$, то она интегрируема на каждом из этих отрезков. Возьмем такую последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$, что точка γ совпадает с одной из точек разбиения, назовем ее $x_{l_m}^m$.

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m = \sum_{k=1}^{l_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m + \sum_{k=l_m+1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, используя первое необходимое условие интегрируемости, получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int\limits_{\gamma}^{\beta} f(x)dx.$$

$\square$

4. *Теорема о среднем.* Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Иными словами, существует такая точка $c \in [a,b]$, что площадь прямоугольника $[a,b]\times[0,f(c)]$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=0$, $x=a$, $x=b$, $y = f(x)$.

$\diamondsuit$

По теореме Вейерштрасса существуют $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Возьмем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a,b]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Имеют место следующие оценки для интегральных сумм

$$m\sum_{k=1}^{n_m} \Delta x_k^m \leqslant \sum_{k=1}^{n_m} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m \leqslant M\sum_{k=1}^{n_m} \Delta x_k^m.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Поскольку

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \in [m, M],$$

то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции существует такая точка $c \in [a, b]$, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

□

5. *Теорема Барроу.* Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда *интеграл с переменным верхним пределом*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b], \tag{37.2}$$

является первообразной для функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

♢

Возьмем произвольную точку $x_0 \in [a, b]$. Пусть для определенности x_0 – внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Применяя теорему о среднем и используя непрерывность функции f, получаем

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = \lim_{\Delta x \to 0} f(c_{\Delta x}) = f(x_0),$$

где $c_{\Delta x}$ – некоторая точка, лежащая между x_0 и $x_0 + \Delta x$.

□

38. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Приведем основные методы вычисления определенного интеграла.

1. *Формула Ньютона – Лейбница.* Пусть $F_1(x)$ – первообразная для непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$. Выражение

$$F_1(x)\Big|_a^b = F_1(b) - F_1(a)$$

называют двойной подстановкой. Полагая в формуле (37.2) $x = b$, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = F_1(b) = F_1(b) - F_1(a). \tag{38.1}$$

Если $F(x)$ — другая первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то по теореме о функциях с совпадающими производными имеем $F_1(x) = F(x) + C$ и, следовательно,

$$F(b) - F(a) = F_1(b) - F_1(a). \tag{38.2}$$

Из равенств (38.1) и (38.2) вытекает *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big|_a^b,$$

которая связывает определенный и неопределенный интегралы.

2. *Замена переменной.* Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{38.3}$$

◊

Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$. Согласно формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \tag{38.4}$$

Поскольку $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, то согласно формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \tag{38.5}$$

Теперь формула замены переменных (38.3) вытекает из равенств 38.4 и 38.5 .

□

3. *Интегрирование по частям.* Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, тогда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

◊

По формуле Ньютона – Лейбница и формуле интегрирования по частям для неопределенного интеграла получаем формулу интегрирования по частям для определенного интеграла

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = \int u(x)v'(x)dx\Big|_a^b = \left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx\right)\Big|_a^b =$$

$$= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

□

Пример 38.1. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \Big[x = \sin t, t \in [0, \pi/2]\Big] =$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 38.2. $\int\limits_1^2 \ln x dx = \Big[u = \ln x, dv = dx, du = \frac{dx}{x}, v = x\Big] =$

$$= x\ln x\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

39. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Фигурой называют любое непустое ограниченное множество точек на плоскости Oxy.

Прямоугольником называют множество точек вида

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in |a, b|, y \in |c, d|\},$$

где $a \leqslant b$, $c \leqslant d$ – некоторые числа. Площадь прямоугольника P полагают равной $(b-a)(d-c)$ по определению.

Фигура называется *простой*, если ее можно представить как объединение конечного числа прямоугольников (рис. 57). Площадь простой фигуры по определению равна сумме площадей прямоугольников, из которых она состоит.

Для каждой фигуры Φ определим два числа:

$$s_* = \sup_{P_* \subset \Phi} \{\text{пл.}\, P_*\}, \;\; s^* = \inf_{\Phi \subset P^*} \{\text{пл.}\, P^*\},$$

где супремум и инфимум берутся по всем вписанным в фигуру Φ простым фигурам P_* и описанным около фигуры Φ простым фигурам P^* соответственно (рис. 58).

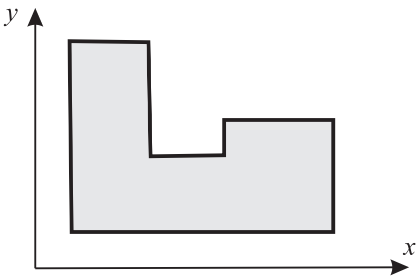

Рис. 57. Простая фигура

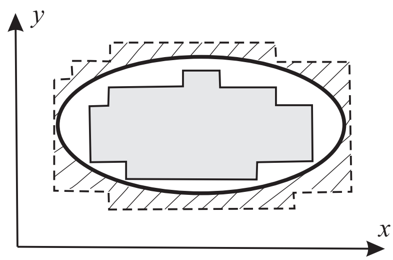

Рис. 58. Вписанная в эллипс и описанная около эллипса простые фигуры

Если $s_* = s^*$, то фигуру Φ называют *измеримой по Жордану* (далее – *измеримой*), а величину $s = s_* = s^*$ принимают за *меру* (*площадь*) фигуры Φ (пишем пл. Φ).

Теорема 39.1 (критерий измеримости). *Фигура* Φ *является измеримой тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие измеримые фигуры* Φ_*, Φ^*, *что*

$$\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*, \ \textit{пл.}\, \Phi^* - \textit{пл.}\, \Phi_* \leqslant \varepsilon.$$

$\Diamond$

Необходимость. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку фигура Φ измеримая, то существуют такие простые вписанная и описанная фигуры P_*, P^*, что пл. $\Phi -$ пл. $P_* \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, пл. $P^* -$ пл. $\Phi \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, пл. $P^* -$ пл. $P_* \leqslant \varepsilon$, поэтому можно взять $\Phi_* = P_*$, $\Phi^* = P^*$.

Достаточность. Предположим, что фигура Φ не является измеримой, т. е.

$$s^* - s_* = q > 0. \tag{39.1}$$

По условию теоремы можно найти такие измеримые фигуры Φ_*, Φ^*, что

$$\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*, \ \text{пл.}\, \Phi^* - \text{пл.}\, \Phi_* \leqslant q/4. \tag{39.2}$$

Поскольку фигуры Φ_*, Φ^* измеримые, то существуют такие простые фигуры P_*, P^*, что

$$P_* \subset \Phi_*,\ P^* \subset \Phi^*,\ \text{пл.}\, P^* - \text{пл.}\ \Phi^* \leqslant q/4,\ \text{пл.}\ \Phi_* - \text{пл.}\, P_* \leqslant q/4. \quad (39.3)$$

Из неравенств (39.2) и (39.3) получаем

$$\text{пл.}\, P^* - \text{пл.}\, P_* \leqslant 3q/4. \qquad (39.4)$$

Поскольку простые фигуры P_*, P^* вписаны и описаны относительно фигуры Φ соответственно, то неравенство (39.4) противоречит неравенству (39.1). Следовательно, фигура Φ измерима.

□

Следствие 39.1. *Пусть фигура* Φ *является измеримой, тогда* $\textit{пл.}\, \Phi = \sup\{\textit{пл.}\, \Phi_*\} = \inf\{\textit{пл.}\, \Phi^*\}$, *где супремум и инфимум берутся по всем вписанным и описанным измеримым фигурам* Φ_*, Φ^* *соответственно.*

Пример 39.1. Пусть Φ – фигура, состоящая из точек, лежащих внутри квадрата $[0,1]^2$ и имеющих рациональные координаты.

Фигура Φ из примера 39.1 не является измеримой, так как для этой фигуры $s^* = 1$, $s_* = 0$.

Замечание 39.1. Если в определении простой фигуры допустить не более чем счетные объединения попарно непересекающихся прямоугольников, то приходим к определению меры Лебега. Можно доказать, что если фигура измерима по Жордану, то она измерима по Лебегу, и значения мер совпадают. Обратное неверно: в частности, фигура из примера 39.1 имеет нулевую меру Лебега.

ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Рассмотрим *криволинейную трапецию* Φ, ограниченную прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ (рис. 60).

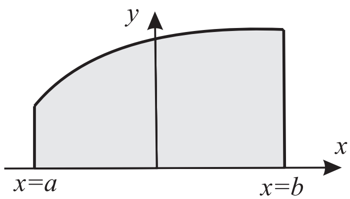

Рис. 60. Криволинейная трапеция

Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$. Согласно теореме Вейерштрасса существуют точка максимума $\overline{\xi}_k$ и точка минимума $\underline{\xi}_k$ функции f на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]$.

Построим *верхнюю* и *нижнюю интегральные суммы Дарбу*:

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{\xi}_k)\Delta x_k;\ \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} f(\underline{\xi}_k)\Delta x_k.$$

Данные суммы соответствуют площадям описанной и вписанной относительно криволинейной трапеции Φ простых фигур.

Затем возьмем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a,b]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ и определим соответствующие интегральные суммы Дарбу:

$$\overline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\overline{\xi}_k^m)\Delta x_k^m,\ \underline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(\underline{\xi}_k^m)\Delta x_k^m.$$

Согласно теореме об интегрируемости непрерывной функции существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Из первого необходимого условия интегрируемости вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\sigma}_m = \lim_{m\to\infty}\underline{\sigma}_m = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Отсюда и из критерия измеримости вытекает, что криволинейная трапеция Φ измерима. Из следствия 39.1 вытекает, что

$$\text{пл.}\,\Phi = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Замечание 39.2. Функция $y = (1 - x^2)^{1/2}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, следовательно, интегрируема на $[0,1]$. Значение интеграла $4\int\limits_0^1 (1-x^2)^{1/2}dx$ обозначают символом π, т. е.

$$\pi =: 4\int\limits_0^1 (1-x^2)^{1/2}dx.$$

Число π иррациональное, $\pi = 3,1415\ldots$.

Замечание 39.3. В курсе математики средней школы при определении тригонометрических функций использовались понятия площади круга и длины окружности, которые там строго не определены. При вычислении замечательного тригонометрического предела в п. 10 нами была использована формула площади кругового сектора, которая известна из курса средней школы без строгого доказательства. Далее приведем определения тригонометрических функций и получим формулу для вычисления площади кругового сектора таким образом, чтобы при этом не применялись тригонометрические функции и формула площади сектора круга.

Пример 39.2. Найдем площадь фигуры T, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и осями координат $0x$ и $0y$.

Фигура T является криволинейной трапецией, ограниченной прямыми $x = 0, x = a$, осью $0x$ и графиком функции $y = b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$. Таким образом,

$$\text{пл.}\, T = b\int\limits_0^a (1 - x^2/a^2)^{1/2}dx = [x = at] = ab\int\limits_0^1 (1-t^2)^{1/2}dt = \frac{1}{4}\pi ab.$$

Отсюда следует, что круг является измеримой фигурой и его площадь равна πR^2.

Замечание 39.4. Рассмотрим на плоскости $0xy$ круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 59). На оси $0x$ возьмем точку C с абсциссой $x \in [0,1]$ и найдем площадь фигуры K. Данная фигура является криволинейной трапецией, и ее площадь равна $\int\limits_x^1 (1-t^2)^{1/2}dt$. Затем найдем площадь кругового сектора OAB:

$$\frac{1}{2}x(1-x^2)^{1/2} + \int\limits_x^1 (1-t^2)^{1/2}dt = g(x).$$

Функция $g(x)$ является строго убывающей $\left(g'(x) = \dfrac{-1}{2(1-x^2)^{1/2}}\right)$, непрерывной и $g(0) = \dfrac{\pi}{4}$, $g(1) = 0$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции существует такая единственная точка $\psi \in (0,1)$, что $g(\psi) = 1/2$. Угол кругового сектора, соответствующего точке C с абсциссой ψ, примем за 1 радиан и будем использовать в качестве меры углов.

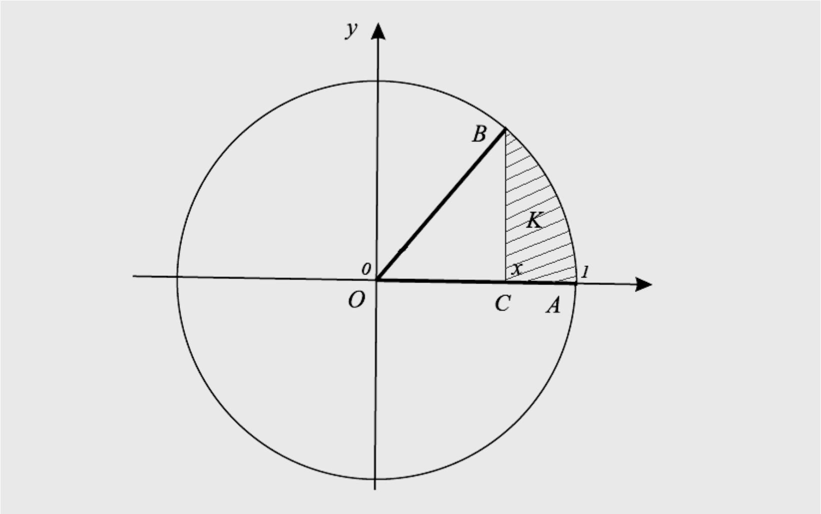

Рис. 59. Иллюстрация к замечанию 39.4

Введем функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, приняв их школьное определение, $\sin x$, $\cos x$ — абсцисса и ордината точки B единичной окружности соответственно, которая получена из точки $(1,0)$ при повороте положительной оси абсцисс на угол x радиан против хода часовой стрелки вокруг точки $(0,0)$. Так как площадь круга единичного радиуса равна π, то величина полного угла равна 2π радиан. Следовательно, площадь кругового сектора, радиуса R с углом φ радиан равна $\frac{1}{2}\varphi R^2$.

Таким образом, мы определили число π, показали, что единичный круг — измеримая фигура, площадь которой равна π, ввели единицу измерения углов – радиан и определили тригонометрические функции $\sin x, \cos x$, причем без ссылок на приведенные, но не доказанные в школе формулы. Теперь можем вернуться к вычисленному в п. 10 замечательному тригонометрическому пределу и проверить, что его доказательство после сделанных дополнений корректно, так же как и все последующие утверждения, в которых использовались перечисленные в этом замечании понятия.

ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО СЕКТОРА

Криволинейным сектором Φ называется фигура, ограниченная полярными лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис. 61).

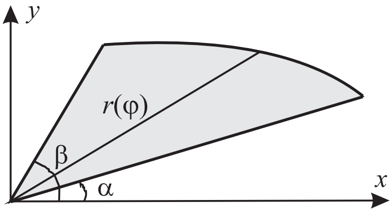

Рис. 61. Криволинейный сектор

Возьмем произвольное разбиение $\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Согласно теореме Вейерштрасса существуют точка максимума $\overline{\tau}_k$ и точка минимума $\underline{\tau}_k$ функции $r(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$.

Построим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу:

$$\overline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\overline{\tau}_k)\Delta\varphi_k, \ \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\underline{\tau}_k)\Delta\varphi_k.$$

Данные суммы соответствуют площадям описанной и вписанной фигур Φ^*, Φ_*, состоящих из n круговых секторов. Так как круговой сектор измерим, то фигуры Φ^*, Φ_* также измеримы.

Возьмем последовательность разбиений $\{\varphi_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ с диаметрами разбиения $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ и определим соответствующие интегральные суммы Дарбу:

$$\overline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{2} r^2(\overline{\tau}_k^m)\Delta\varphi_k^m,\ \underline{\sigma}_m = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{2} r^2(\underline{\tau}_k^m)\Delta\varphi_k^m.$$

Согласно теореме об интегрируемости непрерывной функции интеграл $\int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\varphi)d\varphi$ существует, а из первого необходимого условия интегрируемости вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\sigma}_m = \lim_{m\to\infty} \underline{\sigma}_m = \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Отсюда и из критерия измеримости вытекает, что криволинейный сектор Φ измерим. Из следствия 39.1 следует, что

$$\text{пл.}\Phi = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

ДЛИНА КРИВОЙ

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы две непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$. Множество точек $M(t)$ с координатами $(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$, на плоскости $0xy$ называется *кривой* с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t\in[a,b].$$

Точка $M(a)$ называется *началом кривой*, точка $M(b)$ – *концом кривой*.

Кривая называется *замкнутой*, если ее начало и конец совпадают, и *простой* – если она не содержит точек самопересечения, т. е. любые две точки кривой $M(t_1)$, $M(t_2)$ ($t_1<t_2$) либо различны, либо являются началом и концом кривой.

Кривая называется *гладкой*, если функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ и $(x'(t))^2+(y'(t))^2>0$ $\forall t\in(a,b)$.

Пример 39.3. Функции $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, задают единичную окружность на плоскости Oxy. Данная окружность является простой замкнутой гладкой кривой. Если в данном примере заменить отрезок $[0,2\pi]$ на отрезок $[0,4\pi]$, то получим другую кривую, которая уже не является простой.

Пример 39.4. Кривые, параметрические уравнения которых

$$\begin{cases} x=\sin 3t\cos t, \\ y=\sin 3t\sin t, \end{cases} t\in[0,\pi], \begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t, \end{cases} t\in[0,2\pi], \qquad (39.5)$$

называют трехлепестковой розой (рис. 62) и спиралью Архимеда (рис. 63) соответственно.

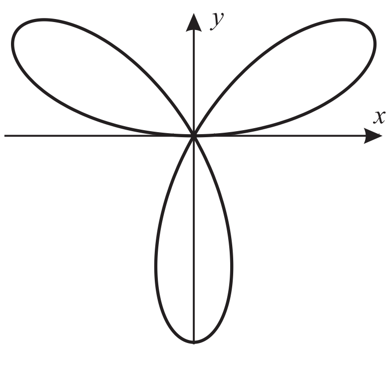

Рис. 62. Трехлепестковая роза,
(0,0) — точка самопересечения

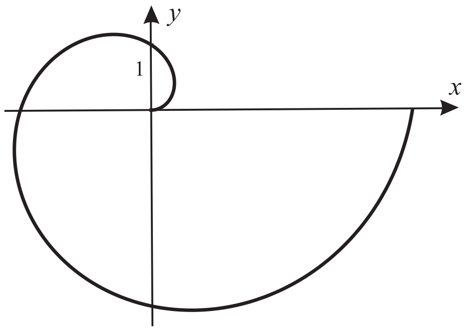

Рис. 63. Спираль Архимеда

Рассмотрим простую кривую l, имеющую параметрическое уравнение $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Возьмем некоторое разбиение $\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ и рассмотрим ломаную $L = M_0 M_1 \dots M_n$, вписанную в кривую l, где M_i – точка с координатами $(x(t_i), y(t_i))$. Кривая l называется *спрямляемой*, если величина $\sup\{\text{дл.}\, L\}$ конечна, где супремум берется по всем ломаным L, вписанным в кривую l. Если кривая l является спрямляемой, то величину $\sup\{\text{дл.}\, L\}$ принимают за *длину кривой* l.

Теорема 39.2 (о длине кривой). *Пусть кривая l, имеющая параметрическое уравнение $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, является простой и гладкой. Тогда кривая l является спрямляемой и ее длина находится по формуле*

$$\textit{дл.}\, l = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

$\diamondsuit$ Докажем, что кривая l является спрямляемой. Рассмотрим произвольную ломаную L, вписанную в кривую l. Длина ломаной $L = M_0 \dots M_n$ находится следующим образом:

$$\text{дл.}\, L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}.$$

Применяя теорему Лагранжа, получаем, что

$$\text{дл.}\, L = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k,$$

где $\xi_k, \eta_k \in [t_{k-1}, t_k]$. По теореме Вейерштрасса существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\sup_{t\in[a,b]} |x'(t)| \leqslant M, \quad \sup_{t\in[a,b]} |y'(t)| \leqslant M.$$

Отсюда получаем

$$\text{дл.}\, L \leqslant \sqrt{2}M(b-a).$$

В силу теоремы о гранях существует конечная точная верхняя грань $\sup\{\text{дл.}\, L\}$, следовательно, кривая l является спрямляемой.

Возьмем последовательность ломаных L_m, $m \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\text{дл.}\, L_m \underset{m\to\infty}{\to} \text{дл.}\, l$, а диаметры δ_m разбиений $\{t_k^m\}_{k=0}^{n_m}$ отрезка $[a, b]$, соответствующих ломаным L_m, стремились к нулю при $m \to \infty$.

Имеем

$$\text{дл.}\, L_m = \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\eta_k^m))^2}\Delta t_k^m =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\xi_k^m))^2}\Delta t_k^m + A_m, \tag{39.6}$$

где

$$A_m = \sum_{k=1}^{n_m} (y'(\eta_k^m) - y'(\xi_k^m))\times$$

$$\times \frac{y'(\eta_k^m) + y'(\xi_k^m)}{\sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\eta_k^m))^2} + \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\xi_k^m))^2}}\Delta t_k^m.$$

Дробь в правой части последнего соотношения по модулю не превосходит единицы. Кроме того,

$$|y'(\eta_k^m) - y'(\xi_k^m)| \leqslant W(y', \{t_k^m\}),$$

где $W(y', \{t_k^m\})$ – колебание функции $y'(t)$ по разбиению $\{t_k^m\}$.

Следовательно, получаем оценку

$$|A_m| \leqslant W(y', \{t_k^m\}) \sum_{k=1}^{n_m} \Delta t_k^m = (b-a)W(y', \{t_k^m\}).$$

Поскольку $\delta_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$, то согласно теореме о колебании непрерывной функции

$$\lim_{m\to\infty} |A_m| \leqslant (b-a) \lim_{m\to\infty} W(y', \{t_k^m\}) = 0. \qquad (39.7)$$

Функция $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на этом отрезке. Из первого необходимого условия интегрируемости получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \sqrt{(x'(\xi_k^m))^2 + (y'(\eta_k^m))^2}\Delta t_k^m = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \qquad (39.8)$$

Таким образом, из (39.6)—(39.8) вытекает требуемая формула для длины кривой l.

□

Пример 39.5. Найдите длину окружности радиусом R. Параметрическое уравнение окружности $x(t) = R\cos t$, $y(t) = R\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Окружность является простой гладкой кривой, и по теореме о длине кривой

$$\text{дл.}\, l = R \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = 2\pi R.$$

Замечание 39.5. Если простая гладкая кривая l является графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то, полагая $x = t$, $y = f(t)$, находим, что

$$\text{дл.}\, l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если кривая l задается в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то ее параметрическое уравнение $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Если кривая l является простой и гладкой, то ее длина равна

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{((r(\varphi)\cos\varphi)')^2 + ((r(\varphi)\sin\varphi)')^2} d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

40. КРИТЕРИЙ ДАРБУ. КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функцию $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$. Определим интегральное колебание функции f по разбиению $\{x_k\}$:

$$\Omega(f, \{x_k\}) := \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])\Delta x_k,$$

где

$$\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup_{\xi,\eta \in [x_{k-1}, x_k]} |f(\xi) - f(\eta)| \quad -$$

колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$.

Теорема 40.1 (необходимое условие Дарбу интегрируемости). *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) : \forall \{x_k\}_{k=0}^n, \delta\{x_k\} \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Omega(f, \{x_k\}) \leqslant \varepsilon.$$

$\diamondsuit$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Используя критерий Коши интегрируемости, получаем

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0; \forall \{x_k\}_{k=0}^n, \delta\{x_k\} \leqslant \delta(\varepsilon), \forall \xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta x_k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (40.1)$$

Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a, b]$ с диаметром разбиения $\delta\{x_k\} \leqslant \delta(\varepsilon)$. По определению точной верхней грани на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ можно найти такие точки ξ_k, η_k, что

$$\sup_{\xi,\eta \in [x_{k-1}, x_k]} |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant f(\xi_k) - f(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{2(b - a)}. \qquad (40.2)$$

Из соотношений (40.1), (40.2) получаем

$$\Omega(f,\{x_k\}) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1},x_k]} |f(\xi)-f(\eta)|\Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(f(\xi_k)-f(\eta_k)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)-f(\eta_k))\Delta x_k+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

Теорема 40.2 (достаточное условие Дарбу интегрируемости). *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое разбиение* $\{x_k\}_{k=0}^n$ *отрезка* $[a,b]$, *что* $\Omega(f,\{x_k\}) \leqslant \varepsilon$, *то функция* f *интегрируема на отрезке* $[a,b]$.

◊

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем такое разбиение $\{x_k\}$ отрезка $[a,b]$, что

$$\Omega(f,\{x_k\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

и рассмотрим соответствующую интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Докажем, что функция f ограничена. Предположим противное, тогда существует отрезок $[x_{i-1},x_i]$, на котором функция f не ограничена. В этом случае

$$\Omega(f,\{x_k\}) \geqslant \sup_{\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]} |f(\xi)-f(\eta)|\Delta x_i = +\infty,$$

что противоречит неравенству $\Omega(f,\{x_k\}) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$. Таким образом, существует такая постоянная M, что $|f(x)| \leqslant M \quad \forall x\in[a,b]$.

Возьмем произвольные разбиения $\{z_r\}_{r=0}^s$, $\{y_l\}_{l=0}^m$ отрезка $[a,b]$ с диаметрами $\delta\{z_j\} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{8Mn}$, $\delta\{y_l\} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{8Mn}$ и рассмотрим произвольные интегральные суммы по этим разбиениям:

$$\tau = \sum_{r=1}^{s} f(\eta_r)\Delta z_r,\ \ \rho = \sum_{l=1}^{m} f(\zeta_l)\Delta y_l.$$

Обозначим через Δ_{kr} длину пересечения отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $[z_{r-1}, z_r]$. Имеем

$$\sigma - \tau = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{r=1}^{s} f(\eta_r)\Delta z_r = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{s}(f(\xi_k) - f(\eta_r))\Delta_{kr} =$$

$$= \sum_{k,r:[z_{r-1},z_r]\subset[x_{k-1},x_k]} (f(\xi_k) - f(\eta_r))\Delta_{kr} +$$

$$+ \sum_{k,r:[z_{r-1},z_r]\not\subset[x_{k-1},x_k]} (f(\xi_k) - f(\eta_r))\Delta_{kr} := \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Оценим слагаемое Σ_1:

$$|\Sigma_1| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{s} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])\Delta_{kr} = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \sum_{r=1}^{s} \Delta_{kr} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])\Delta x_k = \Omega(f, \{x_k\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{40.3}$$

Оценим слагаемое Σ_2. Поскольку $[z_{r-1}, z_r] \not\subset [x_{k-1}, x_k]$, то либо отрезки $[z_{r-1}, z_r]$, $[x_{k-1}, x_k]$ не пересекаются, либо отрезок $[z_{r-1}, z_r]$ содержит хотя бы один из концов отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. В первом случае $\Delta_{kr} = 0$. Таким образом, существует не более n значений индекса r, при которых отрезок $[z_{r-1}, z_r]$ имеет непустое пересечение хотя бы с одним из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$. Обозначим эти индексы через $r_1, \ldots, r_t$ $(t \leqslant n)$. Таким образом, получаем оценку

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(\eta_{r_j})|\Delta_{kr_j} \leqslant 2M \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} \Delta_{kr_j} =$$
$$= 2M \sum_{j=1}^{t} \Delta z_{r_j} \leqslant 2Mt \max_j \Delta z_{r_j} \leqslant 2Mn\frac{\varepsilon}{8Mn} = \frac{\varepsilon}{4}. \tag{40.4}$$

Из соотношений (40.3), (40.4) вытекает, что $|\sigma - \tau| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогичным образом доказывается, что $|\sigma - \rho| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда получаем

$$|\tau - \rho| \leqslant |\sigma - \tau| + |\sigma - \rho| \leqslant \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши интегрируемости функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

$\square$

Замечание 40.1. Из теорем 40.1 и 40.2 вытекает, что существование хотя бы одного разбиения со сколько угодно малым интегральным колебанием обеспечивает малость интегральных колебаний для всех разбиений с достаточно малыми диаметрами.

Замечание 40.2. Необходимое и достаточное условия Дарбу позволяют перенести свойство аддитивности определенного интеграла, доказанное в п. 39, на все интегрируемые на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$. Действительно, если функция f интегрируема на $[a, b]$, то согласно необходимому условию Дарбу интегральное колебание $\Omega(f, \{x_k\})$ может быть сделано сколько угодно малым по всем разбиениям $\{x_k\}$ отрезка $[a, b]$ с достаточно малыми диаметрами разбиения. Тогда на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ $(a < c < b)$ интегральные колебания также могут быть сделаны сколь угодно малыми. Поэтому в силу достаточного условия Дарбу функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$. Аналогичным образом из интегрируемости функции на отрезках $[a, c]$, $[c, b]$ вытекает ее интегрируемость на отрезке $[a, b]$.

Приведем основные классы интегрируемых функций.

1. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

2. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ монотонна, то f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

$\diamondsuit$

Пусть функция f возрастающая на отрезке $[a, b]$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a, b]$ с диаметром разбиения $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Поскольку

$$\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = f(x_k) - f(x_{k-1}),$$

то

$$\Omega(f, \{x_k\}) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, [x_{k-1}, x_k])\Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant \delta \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(b) - f(a)) \leqslant \varepsilon.$$

По достаточному условию Дарбу функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

□

3. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на каждом отрезке $[\alpha, \beta]$, $a < \alpha < \beta < b$, то функция f интегрируема на $[a, b]$.

♢

Существует такая постоянная $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in \in [a, b]$. Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \dfrac{\varepsilon}{8M})$. Так как функция f интегрируема на отрезке $[a + \delta, b - \delta]$, то по необходимому условию Дарбу можно найти такое разбиение $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a + + \delta, b - \delta]$, что $\Omega(f, \{x_k\}) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Возьмем разбиение $\{z_r\}_{r=0}^{n+2}$ отрезка $[a, b]$ точками $z_0 = a$, $z_1 = x_0, \ldots,$ $z_{n+1} = x_n$, $z_{n+2} = b$. Тогда имеем

$$\Omega(f, \{z_r\}) \leqslant 2M\delta + \Omega(f, \{x_k\}) + 2M\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Таким образом, по достаточному условию Дарбу функция f интегрируема на $[a, b]$.

□

4. Если функция f кусочно монотонная на $[a, b]$ (т. е. существует такое разбиение $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ отрезка $[a, b]$, что на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функция f монотонна), то f интегрируема на $[a, b]$.

Справедливость этого утверждения вытекает из аддитивности определенного интеграла и интегрируемости монотонной на отрезке функции.

5. Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то f интегрируема на отрезке $[a, b]$.

♢

Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ – такое разбиение отрезка $[a, b]$, что на каждом интервале (x_{k-1}, x_k) функция f непрерывна. Так как f непрерывна на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (x_{k-1}, x_k)$ и ограничена на $[x_{k-1}, x_k]$, то f интегрируема на $[x_{k-1}, x_k]$. Из аддитивности определенного интеграла вытекает, что f интегрируема на отрезке $[a, b]$. □

6. Если функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то функция $f(x)g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

$\diamondsuit$

Поскольку функции f, g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то согласно второму необходимому условию интегрируемости функции f, g ограничены на отрезке $[a,b]$, т. е. существует такое $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$, $|g(x)| \leqslant M$ $\forall x \in [a,b]$. Для любых $x', x'' \in [a,b]$ имеет место оценка

$$|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \leqslant |g(x'')||f(x') - f(x'')| + |f(x')||g(x') - g(x'')| \leqslant$$

$$\leqslant M|f(x') - f(x'')| + M|g(x') - g(x'')|. \qquad (40.5)$$

Возьмем произвольное разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$. Из оценки (40.5) вытекает, что

$$\omega(fg, [x_{k-1}, x_k]) \leqslant M(\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) + \omega(g, [x_{k-1}, x_k])).$$

Отсюда получаем

$$\Omega(fg, \{x_k\}) \leqslant M\Omega(f, \{x_k\}) + M\Omega(g, \{x_k\}). \qquad (40.6)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из необходимого условия Дарбу вытекает, что существует такое разбиение $\{x_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$, что

$$\Omega(f, \{x_k\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}, \ \Omega(g, \{x_k\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

В силу (40.6) получаем, что $\Omega(fg, \{x_k\}) \leqslant \varepsilon$, поэтому согласно достаточному условию Дарбу функция $f(x)g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

$\square$

Замечание 40.3. Если функции f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы и различаются на конечном множестве значений аргумента, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$. Это замечание позволяет отнести к интегрируемым и те функции $g : |a,b| \to \mathbb{R}$, которые не определены в точках a и b, но после их доопределения на концах промежутка становятся интегрируемыми на отрезке $[a,b]$ функциями.

41. ФОРМУЛЫ ВАЛЛИСА И СТИРЛИНГА

Выведем две важные для математического анализа формулы Валлиса и Стирлинга. Первая формула позволяет вычислить π с любой степенью точности. Вторая – дает возможность заменить последовательность $n!$ на более простую эквивалентную.

Лемма 41.1. *Для любого натурального* m

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

$\diamondsuit$

Пусть $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Интегрируя по частям, получаем

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = [u = \sin^{n-1} x, du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx,$$

$$dv = \sin x dx, v = -\cos x] = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n; \quad = I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Для $n = 2k+1$ имеем

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} =$$

$$= \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{2k-3} = \cdots = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Для четных n формула доказывается аналогичным образом.

$\square$

Теорема 41.1 (формула Валлиса).

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}} = \sqrt{\pi}.$$

$\diamondsuit$

По лемме 41.1

$$I_{2m} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2};$$

$$I_{2m+1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

Пусть $\mu_m = \dfrac{I_{2m}}{I_{2m+1}}$. Так как для любого $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ имеет место неравенство $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то

$$\sin^{2m+1} x \leqslant \sin^{2m} x \leqslant \sin^{2m-1} x, \quad I_{2m+1} \leqslant I_{2m} \leqslant I_{2m-1};$$

$$1 \leqslant \mu_m = \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \leqslant \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m} \implies \mu_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 1;$$

$$2\mu_m \frac{((2m)!!)^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!} = \pi.$$

Следовательно, при $m \to \infty$ имеем

$$\pi \sim 2\frac{((2m)!!)^2}{(2m-1)!!(2m+1)!!} = 2\left(\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\right)^2 \frac{4m^2}{2m+1} \sim$$

$$\sim 4m\left(\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\right)^2;$$

$$\sqrt{\pi} \sim 2\sqrt{m}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} = 2\sqrt{m}\frac{((2m-2)!!)^2}{(2m-1)!} =$$
$$= 2\sqrt{m}\frac{((2m)!!)^2}{(2m)!}\frac{1}{2m} = \frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!\sqrt{m}}.$$

□

Лемма 41.2.

$$\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n} \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+1/4n}.$$

♢

Пусть $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}$. Тогда $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$,

$$\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Гипербола $y = \dfrac{1}{x}$ и прямые $x = n$, $x = n+1$, $y = 0$ ограничивают криволинейную трапецию (рис. 64), площадь которой равна

$$S = \int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

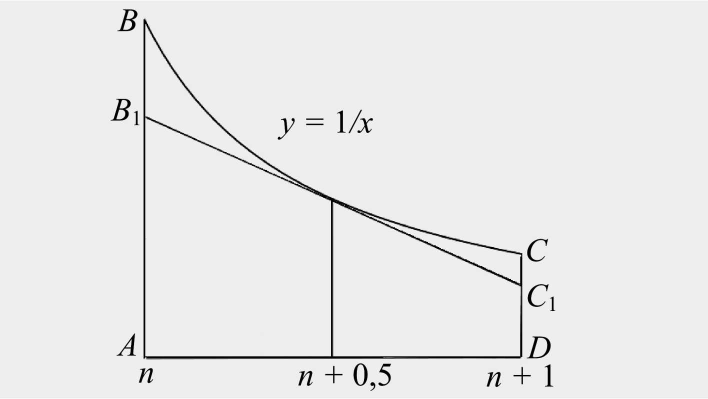

Рис. 64. К доказательству леммы 41.2

Площадь трапеции $ABCD$ равна $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$. Проведем касательную к гиперболе в точке $(n+1/2, \dfrac{1}{n+1/2})$. Пусть она пересекает прямые $x=n$, $x=n+1$ в точках B_1, C_1 соответственно, $S_{AB_1C_1D}=\dfrac{1}{n+1/2}$ (прямая $x=n+1/2$ является средней линией трапеции). Сравнивая площади, получаем

$$S_{AB_1C_1D}<S<S_{ABCD};$$

$$\frac{1}{n+1/2}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right);$$

$$0<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1<\frac{(n+0,5)^2}{n(n+1)}-1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right);$$

$$0<\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right);$$

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}.$$

Значит, последовательность (a_n) монотонно убывает. Поскольку она положительна, то ограничена снизу. Следовательно, она сходится к некоторому α. Найдем это число. Устремляя k к бесконечности в неравенстве

$$1<\frac{a_n}{a_{n+k}}<e^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)},$$

получим

$$1<\frac{a_n}{\alpha}<e^{1/4n}.$$

Используя формулу Валлиса, имеем

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}}=\frac{(n!)^2(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}}{n^{2n+1}e^{-2n}(2n)!\sqrt{2}}=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{\pi}.$$

С другой стороны,

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}},$$

поэтому

$$\frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} = \sqrt{\pi};$$

$$\alpha = \sqrt{2\pi};$$

$$1 < \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} < e^{1/4n};$$

$$1 < \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}} < e^{1/4n}.$$

Отсюда следует требуемое неравенство.

$\square$

Теорема 41.2 (формула Стирлинга).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty.$$

$\diamondsuit$

Согласно лемме 41.2 имеют место неравенства

$$\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n} \leqslant n! \leqslant \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+1/4n}.$$

Следовательно,

$$1 \leqslant \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leqslant e^{1/4n}.$$

Поскольку $e^{1/4n}$ стремится к 1 при $n \to \infty$, то

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

поэтому

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty.$$

$\square$

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Пределы и непрерывность

Предел последовательности

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Будем говорить, что последовательность (b_n) *растет быстрее* (имеет *больший порядок роста*), чем последовательность (a_n), если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$. При этом будем использовать обозначение $a_n \ll b_n$ и пользоваться следующей шкалой роста последовательностей при $n \to \infty$:

$$\log_a n \ll n^b \ll c^n \ll n! \ll n^n \ (a, b, c > 1).$$

2. Если последовательность является монотонной, то для доказательства ее сходимости достаточно доказать ограниченность последовательности.

3. Для доказательства того, что неотрицательная последовательность a_n является бесконечно малой, пользуются леммой о зажатой последовательности, находя такую последовательность $b_n \geqslant a_n$, для которой свойство бесконечной малости легко устанавливается.

4. Если общий член последовательности является элементарной функцией от n, вычисление предела последовательности часто сводят к вычислению соответствующего предела функции (к которому применяют правило Лопиталя, формулу Тейлора или замечательные пределы).

Пример 1. Докажем расходимость последовательности

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Заметим, что

$$\ln n = (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n-1) - \ln(n-2)) + \ldots + (\ln 2 - \ln 1) + \ln 1 =$$

$$= \ln\bigl(1 + \frac{1}{n-1}\bigr) + \ln\bigl(1 + \frac{1}{n-2}\bigr) + \ldots + \ln\bigl(1 + \frac{1}{1}\bigr) + \ln 1.$$

Таким образом,

$$a_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\bigl(1 + \frac{1}{k-1}\bigr) \right).$$

Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = \ln(1+x)$ при $x = \dfrac{1}{k-1}$:

$$\ln(1+x) = x + \frac{f''(\theta x)}{2!} x^2 = x - \frac{x^2}{2(1+\theta x)^2} \Rightarrow |\ln(1+x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

Для доказательства сходимости последовательности (a_n) применим критерий Коши. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и некоторые $m,\ n \in \mathbb{N},\ m > n$. Имеем

$$|a_m - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \ln\bigl(1 + \frac{1}{k-1}\bigr) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \ln\bigl(1 + \frac{1}{k-1}\bigr) \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(k-1)^2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} \right) <$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} < \frac{2}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, достаточно взять $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} \right] + 1$.

Замечание 1. Предел последовательности

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

обозначается через C и называется постоянной Эйлера – Маскерони. Известно, что $C = 0,57721\ldots$. Предполагается, что постоянная

C является иррациональным числом, но этот факт до сих пор не доказан.

Пример 2. Докажем, что последовательность $a_n = \sin n$ не является сходящейся.

Допустим, существует $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, тогда

$$A = \lim_{n\to\infty} \sin(n+1) = \lim_{n\to\infty}(\sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n) =$$

$$= A\cos 1 + \sin 1 \lim_{n\to\infty} \cos n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \cos n = A\frac{1-\cos 1}{\sin 1} = A\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, то $A^2(1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}) = 1$. Повторяя те же рассуждения для $\sin(n+2)$, докажем, что $A^2(1+\mathrm{tg}^2 1) = 1$. Последние два равенства не могут быть верными одновременно, следовательно, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ не существует.

Пример 3. Найдем предел последовательности (a_n), заданной рекуррентно:

$$a_n = \sin a_{n-1},\ a_0 = 1.$$

Поскольку $\sin x < x$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, то последовательность (a_n) монотонно убывает. Кроме того, последовательность (a_n) ограничена снизу: $a_n \geqslant 0$. Следовательно, существует конечный предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Отсюда $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \sin A$. Это равенство возможно лишь при $A = 0$.

Предел функции: преобразование неопределенностей и применение правила Лопиталя

Кроме замечательных пределов (п. 10, п. 16), на практике часто используют их обобщения: пусть функция $\alpha(x)$ бесконечно мала при $x \to c$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки c, тогда имеем

$$\lim_{x\to c} \frac{\sin(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1;$$

$$\lim_{x\to c}(1+(\alpha(x))^{1/\alpha(x)} = e;$$

$$\lim_{x\to c} \frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1;$$

$$\lim_{x\to c}\frac{e^{\alpha}(x)-1}{\alpha(x)}=1;$$

$$\lim_{x\to c}\frac{(1+(\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu.$$

Пример 4. $\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\Big(\pi/4+1/n\Big)=[1^\infty]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(1/n)+\cos(1/n)}{\cos(1/n)-\sin(1/n)}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\sin(1/n)}{\cos(\frac{1}{n})-\sin(\frac{1}{n})}\right)^{\frac{\cos(\frac{1}{n})-\sin(\frac{1}{n})}{2\sin(1/n)}\frac{2n\sin(1/n)}{\cos(\frac{1}{n})-\sin(\frac{1}{n})}}=e^2.$$

Пример 5. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin x^2}.$$

Имеем

$$\frac{\ln\cos x}{\sin x^2}=\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\sin x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 6. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}.$$

Используя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}.$$

Пример 7. Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$$

Поскольку произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией, то

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0.$$

Предел функции: использование формулы Тейлора

Пример 8. $\lim_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})-2(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2}))+1\right)=-\frac{1}{4}.$$

Пример 9. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^6))-x(1-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2!}\dfrac{1}{3}(-\frac{2}{3})x^4+o(x^4))}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{1}{3!}3x^2\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+o(x^5)-(x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{9})}{x^5}=$$

$$=\frac{1}{120}+\frac{1}{12}+\frac{1}{120}+\frac{1}{9}=\frac{19}{90}.$$

Определение точек разрыва и их типов

Пример 10. Исследуем на непрерывность функцию
$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

Если $|x|\leqslant1$, то $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=1$; если $|x|>1$, то $y=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=x^2$.

Легко видеть, что функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 11. Исследуем на непрерывность функцию $y = \operatorname{sgn}\sin x$.

Функция имеет разрывы в тех точках x, для которых $\sin x = 0$, т. е. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\sin x$ меняет знак при переходе через точки $x_n = \pi n$, то эти точки являются точками конечного скачка функции $y = \operatorname{sgn}\sin x$.

Исследование равномерной непрерывности

Пример 12. Исследуем функцию $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0,1)$, на равномерную непрерывность.

Поскольку функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то по теореме Кантора функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $[0,1]$. Следовательно, функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0,1)$.

Пример 13. Исследуем функцию $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, на равномерную непрерывность.

В данном случае теорема Кантора неприменима, так как множество задания не является отрезком. Исследуем равномерную непрерывность по определению. Возьмем произвольные x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, имеем

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = |2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}|.$$

Если $|x| \leqslant 1$, то $|\sin x| \leqslant |x|$ (см. п. 10). Если $|x| > 1$, то $|x| > 1 \geqslant |\sin x|$. Таким образом,

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant 2\frac{|x_1 - x_2|}{2} \cdot 1 = |x_1 - x_2|.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : |x_1 - x_2| \leqslant \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon,$$

поэтому функция $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, равномерно непрерывна.

Пример 14. Исследуем функцию $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, на равномерную непрерывность.

Докажем, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной. Сформулируем определение неравномерно непрерывной на промежутке $|a,b|$ функции:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x_0', x_0'' \in |a,b| : |x_0' - x_0''| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_0') - f(x_0'')| > \varepsilon_0.$$

Возьмем $\varepsilon_0 = 1$ и произвольное $\delta > 0$. В качестве $x_0^{'}$, $x_0^{''}$ выберем следующие точки: $x_0^{'} = \dfrac{1}{\delta}, x_0^{''} = \dfrac{1}{\delta} + \delta$. Тогда имеем

$$|(x_0^{'})^2 - (x_0^{''})^2| = \delta^2 + 2 > 1,$$

следовательно, функция f не является равномерно непрерывной на множестве $\mathbb{R}$.

Замечание 2. Если дифференцируемая функция $f : |a,b| \to \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную производную $f'(x)$, то согласно теореме Лагранжа имеем $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)||x_1 - x_2| \leqslant M|x_1 - x_2|$. Отсюда вытекает равномерная непрерывность функции f (в определении равномерной непрерывности достаточно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon.M$).

Производная и формула Тейлора

Вычисление производных и дифференциалов

1. Для вычисления производной от функций вида $(f(x))^{g(x)}$ переходят к экспоненциальной форме записи, т. е. $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, а затем применяют теорему о производной сложной функции.

2. Если функция на разных промежутках задана разными формулами, то в точках стыка различных элементарных функций производную считают по определению.

3. Производные высших порядков часто вычисляют с помощью правила Лейбница или формулы Тейлора.

Пример 15. $(\sqrt[x]{x})' = (x^{1/x})' = (e^{(\ln x)/x})' = e^{(\ln x)/x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = = \sqrt[x]{x}\dfrac{x(1/x) - \ln x}{x^2} = \sqrt[x]{x}\dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Пример 16. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

Если $x \neq 0$, то

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Если $x = 0$, то

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Пример 17. Исследуем функцию $f(x) = \arcsin(\sin x)$ на дифференцируемость в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Если $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, то $f(x) = x$; если $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, то $f(x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$.

Поскольку $f'_-(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq f'_+(\dfrac{\pi}{2}) = -1$, то не существует производной $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ и, следовательно, $f(x)$ не является дифференцируемой в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 18. Исследуем функцию на дифференцируемость

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Если $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{Q}$, то, выбирая $\Delta x = \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, получим, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\frac{n x_0^2}{\sqrt{2}} \to -\infty, n \to \infty.$$

Если $x_0 \neq 0$, $x_0 \notin \mathbb{Q}$, то, выбирая $\Delta x = x_{0,n} - x_0$ (где $x_{0,n}$ – приближение по недостатку порядка n числа x_0), получим

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_{0,n}^2}{x_{0,n} - x_0} \to -\infty, n \to \infty.$$

Если $x_0 = 0$, то

$$\left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right| = \left| \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \right| \leqslant |\Delta x| \to 0, \Delta x \to 0.$$

Таким образом, функция f дифференцируема лишь в точке $x_0 = 0$.

Пример 19. Найдем $d^{100}y$, где $y = x\mathrm{sh}x$.

Имеем $d^{100}y = y^{(100)}(x)dx^{100}$. По правилу Лейбница находим

$$y^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k x^{(k)} (\mathrm{sh}x)^{(100-k)} = x\mathrm{sh}x + 100\mathrm{ch}x.$$

Пример 20. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$. Найдем $f^{(100)}(0)$.

Разложим функции по формуле Тейлора до слагаемого, содержащего x^{100} :

$$f(x) = \frac{1-x}{1-x^4} = (1-x)(1+x^4+x^8+\ldots+x^{100}+o(x^{100})) =$$

$$= 1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+\ldots+x^{100}+o(x^{100}).$$

Коэффициент при x^{100} равен $1 = \dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}$. Отсюда $f^{(100)}(0) = 100!$.

Разложение функций по формуле Тейлора

Пример 21. Разложим функцию e^{2x-x^2} до члена с x^5.

$$e^{2x-x^2} = 1+\frac{2x-x^2}{1!}+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}+$$

$$+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}+o(x^5) = 1+\frac{2x-x^2}{1!}+\frac{4x^2-4x^3+x^4}{2!}+$$

$$+\frac{8x^3-12x^4+6x^5+o(x^5)}{3!}+\frac{16x^4-32x^5+o(x^5)}{4!}+$$

$$+\frac{32x^5+o(x^5)}{5!}+o(x^5) = 1+2x+x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^4}{6}-\frac{x^5}{15}+o(x^5).$$

Нахождение точек локальных экстремумов и перегибов

Пример 22. Найдем точки локальных экстремумов и перегиба для функцию $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

Функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x+1}, x \geqslant 1, \\ xe^{x-1}, 0 \leqslant x < 1, \\ -xe^{x-1}, x < 0. \end{cases}$$

Найдем производную функции на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x+1} - xe^{-x+1},\ x > 1, \\ e^{x-1} + xe^{x-1},\ 0 < x < 1, \\ -e^{x-1} - xe^{x-1},\ x < 0. \end{cases}$$

В точках 0 и 1 функция недифференцируема, так как левосторонняя и правосторонняя производные не совпадают:

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x e^{\Delta x - 1}}{\Delta x} = \frac{-1}{e} \neq f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x e^{\Delta x - 1}}{\Delta x} = \frac{1}{e},$$

$$f'_-(1) = +\infty, \quad f'_+(1) = -\infty.$$

Функция имеет единственную стационарную точку $x = -1$.

При переходе через точку $x = 1$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x = 1$ – точка локального максимума.

При переходе через точку $x = 0$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x = 0$ – точка локального минимума.

Поскольку $f''(x) = -2e^{x-1} - xe^{x-1}$ при $x < 0$, то $f''(-1) = -e^{-2} < 0$, следовательно, $x_0 = -1$ – точка локального максимума.

Найдем вторую производную:

$$f''(x) = \begin{cases} -2e^{-x+1} + xe^{-x+1},\ x > 1, \\ 2e^{x-1} + xe^{x-1},\ 0 < x < 1, \\ -2e^{x-1} - xe^{x-1},\ x < 0. \end{cases}$$

В точке 0 функция не имеет производной $f'(x)$, а в точке 1 не имеет бесконечной производной определенного знака, поэтому только точки спрямления могут быть точками перегиба. Имеется только две точки спрямления: $x = \pm 2$.

Поскольку $f'''(x) = 3e^{-x+1} - xe^{-x+1}$ при $x > 1$, то $f'''(2) = e^{-1} \neq 0$, поэтому точка $x = 2$ является точкой перегиба.

Аналогичным образом $f'''(x) = -3e^{x-1} - xe^{x-1}$ при $x < 0$, $f'''(-2) = -e^{-3} \neq 0$, т. е. точка $x = -2$ также является точкой перегиба.

Глобальный экстремум и доказательство неравенств

Пример 23. Найдем глобальные экстремумы следующей функции: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|, \ \ x \in [-10, 10]$.

Поскольку множество задания функции – отрезок, то достаточно рассмотреть концы отрезка, стационарные точки и точки, в которых функция недифференцируема.

Функцию $f(x)$ можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, x \in [-10, 1] \cup [2, 10], \\ -x^2 + 3x - 2, x \in (1, 2). \end{cases}$$

Найдем ее производную:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, x \in (-10, 1) \cup (2, 10), \\ -2x + 3, x \in (1, 2). \end{cases}$$

Только точки $x = -10; 1; \dfrac{3}{2}; 2; 10$ могут быть точками глобального экстремума.

Имеем $\max\limits_{x\in[-10,10]} f(x) = \max\{f(-10), f(1), f(3/2), f(2), f(10)\} = \max\{132; 0; 0,25; 0,72\} = f(-10) = 132, \quad \min\limits_{x\in[-10,10]} f(x) = f(1) = f(2) = 0$.

Пример 24. Докажем неравенства $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x \ \ \forall x > 0$.

Рассмотрим функцию $g(x) = x - \sin x, \ \ x > 0$. Поскольку $g'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ и не существует интервалов, на которых производная $g'(x)$ тождественно равна нулю, то $g(x)$ строго возрастающая. Следовательно, $g(x) > g(0) = 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$. Имеем $f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}, \ \ f''(x) = -\sin x + x$. По доказанному $f''(x) > 0 \ \ \forall x > 0$. Следовательно, производная $f'(x)$ строго возрастает, поэтому $f'(x) > f'(0) = 0$. Отсюда вытекает, что функция $f(x)$ строго возрастает. Следовательно, $f(x) > f(0) = 0$, что и требовалось доказать.

Неопределенный интеграл

Преобразование подынтегральной функции и использование линейности интеграла

В отдельных случаях возможно преобразовать произведение функций $f(x)g(x)$ в сумму новых функций, т. е. $f(x)g(x) = h_1(x) + h_2(x)$, тогда

$$\int f(x)g(x)dx = \int h_1(x)dx + \int h_2(x)dx.$$

На практике чаще всего этот прием применяют в случае произведения тригонометрических функций. Удобно пользоваться также формулами понижения степени для тригонометрических функций.

Пример 25. Вычислим интеграл

$$\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx = \int \frac{3\sin 2x - \sin 6x}{4} \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (3\sin 2x - \sin 6x + 3\sin 2x \cos 4x - \sin 6x \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (6\sin 2x - 2\sin 6x - 3\sin 2x + 3\sin 6x - \sin 2x - \sin 10x) dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 2x - \frac{1}{96}\cos 6x + \frac{1}{160}\cos 10x + C.$$

Интегрирование рациональных функций

Пусть $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – действительная рациональная функция, где $P(x)$ – многочлен со старшим коэффициентом 1.

Приведем более подробный алгоритм интегрирования рациональных функций, чем в п. 24.

1. Если $\deg Q(x) \geqslant \deg P(x)$, то выделим целую часть рациональной функции, т. е. разделим многочлен $Q(x)$ на многочлен

$P(x)$ с остатком: $Q(x)=T(x)P(x)+S(x)$. Получим $R(x)=T(x)+$ $+\dfrac{S(x)}{P(x)}$. Интегрируем многочлен $T(x)$.

2. Рассмотрим правильную рациональную функцию $\dfrac{S(x)}{P(x)}$. Найдем корни многочлена $P(x)$ и представим многочлен $P(x)$ как произведение многочленов вида $(x-\alpha_i)^{k_i}$, $(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}$, где α_i, $p_i, q_i \in \mathbb{R}$, $k_i, l_i \in \mathbb{N}$, $p_i^2-4q_i<0$.

3. Представим правильную рациональную функцию $\dfrac{S(x)}{P(x)}$ как сумму простейших дробей вида $\dfrac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}$, $\dfrac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}$ с неопределенными коэффициентами $A_{i,j}, M_{i,j}, N_{i,j}$:

$$\frac{S(x)}{P(x)}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j}+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{l_i}\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}. \qquad (44.1)$$

4. Найдем неопределенные коэффициенты простейших дробей. На практике наиболее эффективен следующий метод:

а) пусть α_i – действительный корень многочлена $P(x)$ кратности k_i. Для каждого $j=0,\ldots,k_i-1$ проведем следующую процедуру: умножим левую и правую часть соотношения (44.1) на $(x-\alpha_i)^{k_i}$, дифференцируем левую и правую часть j раз и подставим значение $x=\alpha_i$. В результате получим равенство

$$\left(\frac{S(x)}{P(x)/(x-\alpha_i)^{k_i}}\right)^{(j)}\Bigg|_{x=\alpha_i}=A_{i,j}\cdot j!,$$

откуда найдем коэффициент $A_{i,j}$;

б) пусть γ_i, $\overline{\gamma_i}$ – пара комплексно-сопряженных корней многочлена $P(x)$ кратности l_i. Для каждого $j=0,\ldots,l_i-1$ совершим следующие действия: умножим левую и правую часть (44.1) на $(x-$ $-\gamma_i)^{l_i}$, дифференцируем левую и правую часть j раз и подставим значение $x=\gamma_i$. В результате получим равенство

$$\left(\frac{S(x)}{P(x)/(x-\gamma_i)^{k_i}}\right)^{(j)}\Bigg|_{x=\gamma_i}=\left(\frac{M_{i,j}x+N_{i,j}}{(x-\overline{\gamma_i})^j}\right)^{(j)}\Bigg|_{x=\gamma_i},$$

откуда найдем действительные коэффициенты $M_{i,j}$, $N_{i,j}$;

в) в том случае, если некоторые из комплексно-сопряженных корней γ_i, $\overline{\gamma_i}$ приводят к дальнейшим громоздким вычислениям с комплексными числами, можно воспользоваться следующим методом подстановки частных значений: пусть во время предыдущих действий вычислены K из $N = 2\sum\limits_{i=1}^{t} l_i$ коэффициентов $M_{i,j}$, $N_{i,j}$; для нахождения оставшихся $N-K$ коэффициентов в левую и правую часть соотношения (44.1) (с учетом уже найденных коэффициентов) последовательно подставим $N-K$ различных частных значений $x = x_1, \ldots, x_{N-K}$ и найдем оставшиеся коэффициенты $M_{i,j}$, $N_{i,j}$.

5. Интегрируем простейшие дроби, полученные во время предыдущего действия.

Проиллюстрируем приведенный алгоритм интегрирования рациональной функции. Поскольку исходная рациональная функция правильная, то первый шаг алгоритма пропускаем:

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \int \frac{dx}{(1+x)^2(1+x^2)(1-x+x^2)} =$$

$$= \left[\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)(1-x+x^2)} = \right.$$

$$\left. = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{1-x+x^2}\right].$$

Умножим обе части на $(1+x)^2$ и подставим $x=-1$:

$$\frac{1}{6} = B.$$

Умножим обе части на $(1+x)^2$, дифференцируем и подставим $x=-1:$

$$(((1+x^2)(1-x+x^2))^{-1})'\big|_{x=-1} = A \Rightarrow A = -\frac{1}{36}(-6-6) = \frac{1}{3}.$$

Умножим обе части на $x-i$ и подставим $x=i:$

$$\frac{1}{4i} = \frac{Ci+D}{2i} \Rightarrow C=0, D=\frac{1}{2}.$$

Подставляя значение $x=0$, получим

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + F \Rightarrow F = 0.$$

Подставляя значение $x = 1$, получим

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} + E \Rightarrow E = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{3}\int\frac{x}{1-x+x^2}dx,$$

$$\int\frac{x}{1-x+x^2}dx = \int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx =$$

$$+\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Основные методы рационализации подынтегральной функции

1. От иррациональности вида $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $n \in \mathbb{N}$, избавляются с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n.$$

2. От иррациональности вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$ избавляются с помощью подстановок Эйлера:

$$a > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t;$$

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\lambda_1)t,$$

где λ_1 – корень квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

3. Биномиальный дифференциал $x^m(a+bx^n)^p$, $m,n,p \in \mathbb{Q}$, $a,b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, рационализируется с помощью подстановок Чебышева:

$$p \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^r;$$

$$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + bx^n = t^s;$$

$$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow ax^{-n} + b = t^s,$$

где r – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n; s – знаменатель числа p.

4. Интегралы от рационально-тригонометрических функций $R(\cos x, \sin x)$ сводятся к интегрированию рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}.$$

В ряде случаев подстановки вида $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \mathrm{tg} x$ приводят к менее громоздким рациональным функциям.

Пример 26. Вычислим интеграл

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = [\sqrt[6]{x+1} = t, x = t^6 - 1] = \int \frac{1-t^3}{1+t^2} \cdot 6t^5 dt =$$

$$= 6\int \frac{t^5 - t^8}{1+t^2}dt = 6\int(-t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1)dt + 6\int \frac{t-1}{1+t^2}dt =$$

$$= -\frac{6}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3\ln(1+t^2) - 6\mathrm{arctg}t + C.$$

Пример 27. $\int \sqrt{x^2 - 2x + 2}dx =$

$$= \left[\sqrt{x^2 - 2x + 2}x + t \Rightarrow x = \frac{2-t^2}{2+2t}, dx = \frac{-t^2 - 2t - 2}{2(1+t)^2}dt\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{2+t}{1+t}\frac{t^2+2t+2}{(1+t)^2}dt = -\frac{1}{4}\int(1+\frac{1}{1+t})(1+\frac{1}{(1+t)^2})dt =$$

$$= -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\ln|1+t| + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{8(1+t)^2} + C.$$

Пример 28. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} =$

$$= \left[m = -3, n = 2, p = -\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}; x^2 + 1 = t^2,\right.$$

$$\left. x = (t^2 - 1)^{1/2}, dx = \frac{tdt}{(t^2-1)^{1/2}}\right] = \int \frac{dt}{(t^2-1)^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2}; B = D = \frac{1}{4}, 1 = -A+\right.$$

$$+B+C+D, \frac{1}{9}=A+B+\frac{C}{3}+\frac{D}{9} \Rightarrow B=D=\frac{1}{4}, C=\frac{1}{4}, A=-\frac{1}{4}\Big]=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{|t-1|}{|t+1|}-\frac{1}{4(t-1)}-\frac{1}{4(t+1)}+C.$$

Пример 29. Вычислим интеграл

$$\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)(\cos^2 x-1)}=[\cos x=t]=$$

$$=\int\frac{dt}{(2+t)(t-1)(t+1)}=\left[\frac{1}{(2+t)(t-1)(t+1)}=\frac{A}{2+t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1};\right.$$

$$\left.A=\frac{1}{3}, B=\frac{1}{6}, C=-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{3}\ln(t+2)+\frac{1}{6}\ln(1-t)-\frac{1}{2}\ln(1+t)+C.$$

Пример 30. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=$

$$=\left[t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right]=$$

$$=\int\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2(2t+1-t^2)}dt.$$

Для вычисления последнего интеграла требуются громоздкие вычисления, но их можно избежать, если воспользоваться следующей заменой:

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx=$$

$$=[x+\frac{\pi}{4}=y]=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\cos 2y}{\sin y}dy=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\cos 2y}{\sin^2 y}d(\cos y)=[\cos y=t]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2t^2-1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(-2+\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(1-t^2)+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)|+C.$$

Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

применяется в том случае, если интеграл в правой части вычисляется проще, чем интеграл в левой части. В частности, таким методом вычисляются интегралы вида

$$\int P(x)g(x)dx,$$

где $P(x)$ – некоторый многочлен, а $g(x)$ – одна из функций $\cos x$, $\sin x$, e^x, $\ln x$, $\mathrm{arctg} x$, $\mathrm{sh} x$, $\mathrm{ch} x$.

Пример 31. $\int x^2 \mathrm{arctg} x dx =$

$$= \left[u = \mathrm{arctg} x, dv = x^2 dx, du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{x^3 \mathrm{arctg} x}{3} - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^3 \mathrm{arctg} x}{3} - \frac{1}{6}\int \frac{x^2}{1+x^2} d(x^2) = \frac{1}{3}x^3 \mathrm{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 32. $\int x^2 \sin x dx =$

$$= [u = x^2, dv = \sin x dx, du = 2x dx, v = -\cos x] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = [u = x, dv = \cos x dx, du = dx, v = \sin x] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Внесение множителя под знак дифференциала и замена переменной

1. При вычислении интеграла вида

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

полагают $u = g(x)$, $du = d(g(x)) = g'(x)dx$. В этом случае получаем

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$

где u – новая независимая переменная, и к интегралу в правой части можно применять известные методы вычисления неопределенного интеграла.

2. На практике чаще всего вносят под дифференциал функции вида x^n при интегрировании рациональных функций, а также функции $\cos x$, $\sin x$ при интегрировании рационально-тригонометрических функций.

3. В определенном смысле обратной операцией к внесению множителя под дифференциал является замена переменной, т. е.

$$\int f(x)dx = [x = \varphi(t)] = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

4. На практике удобно делать следующие замены:
$x = a\sin t$ в выражениях вида $\sqrt{a^2 - x^2}$;
$x = a\mathrm{tg}t$, $x = a\mathrm{sh}t$ в выражениях вида $\sqrt{a^2 + x^2}$;
$x = a\mathrm{ch}t$ в выражениях $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Пример 33. $\int \frac{dx}{1+e^x} =$

$$= \int \frac{d(e^x)}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{d(e^x)}{e^x} - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} =$$

$$= \ln(e^x) - \ln(e^x+1) + C = x - \ln(e^x+1) + C.$$

Пример 34. $\int \sqrt{x^2+1}dx =$

$$= \left[x = \mathrm{tg}t, x^2+1 = \frac{1}{\cos^2 t}, dx = \frac{dt}{\cos^2 t}\right] = \int \frac{dt}{\cos^3 t} = \left[z = \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right] = \ldots,$$

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \left[x = \mathrm{sh}t\right] =$$

$$= \int \mathrm{ch}^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\mathrm{ch}2t)dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}2t + C =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{arsh}x + x\sqrt{x^2+1}) + C.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Альсевич, Л. А. Математический анализ: последовательности, функции, интегралы : практикум / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский. — Минск : Выш. шк., 2021.

Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учебник / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. И. Чубариков. — М. : Высш. шк., 1999.

Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу : в 2 ч. / Ю. С. Богданов. — Минск : БГУ, 1974, 1978. — 2 ч.

Богданов, Ю. С. Математический анализ / Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица, Ю. Б. Сыроид. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2003.

Воднев, В. Т. Основные математические формулы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. — Минск : Выш. шк., 1995.

Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1990.

Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ : в 6 ч./ Э. И. Зверович. — Минск : Выш. шк., 2006–2008. — 6 ч.

Зорич, В. А. Математический анализ : в 2 ч. / В. А. Зорич. — М. : Наука, 1981, 1984. — 2 ч.

Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Наука, 2002, 2005. — 2 ч.

Ильин, В. А. Математический анализ. Начальный курс / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. — М. : МГУ, 1985.

Ильин, В. А. Математический анализ. Продолжение курса / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. — М. : МГУ, 1987.

Кастрица, О. А. Математический анализ. Краткий курс / О. А. Кастрица, С. А. Мазаник. — Минск : БГУ, 2017.

Кротов, В. Г. Математический анализ / В. Г. Кротов. — Минск : БГУ. 2017.

Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2003– 2006. — 3 т.

Леваков, А. А. Математический анализ / А. А. Леваков. — Минск : БГУ, 2014.

Никольский, С. М. Курс математического анализа / С. М. Никольский. — М. : Наука, 2001.

Рождественский, Б. Л. Лекции по математическому анализу / Б. Л. Рождественский. — М. : Наука, 1972.

Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 2001.

Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Физматлит, 2003. — 3 т.

Шварц, Л. Анализ : в 2 т. / Л. Шварц. — М. : Мир, 1972. — 2 т.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Леваков Анатолий Афанасьевич
Васьковский Максим Михайлович
Новичкова Дарья Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

В трех частях

Часть 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Ответственный за выпуск *Е. В. Демидова*
Художественный редактор *А. А. Рабкевич*
Технический редактор *В. П. Явуз*
Компьютерная верстка *Д. А. Новичковой*
Корректор *Н. А. Ракуть*

Подписано в печать 07.06.2024. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,62.
Уч.-изд. л. 6,93. Тираж 175 экз. Заказ 585.

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/41 от 29.01.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, Минск.