

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

15 июля 2024 г.

Регистрационный №УД- 13454/уч.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине
для специальности

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

направления специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

1-31 03 01-02 Математика (экономическая деятельность)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021 и учебного плана БГУ №G31-1-003/уч. от 25.05.2021, №G31-1-061/уч.ин. от 31.05.2021, №G31-1-004/уч. от 25.05.2021.

СОСТАВИТЕЛИ:

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович – профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

Каскевич Виктор Иванович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Иванов Константин Александрович – старший преподаватель кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТ:

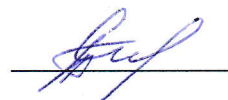
Васильев Денис Владимирович, заведующий отделом теории чисел и дискретной математики Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации БГУ
(протокол № 13 от 26.06.2024);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024).

Заведующий кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, доцент



С.В. Тихонов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Образовательная цель: сообщение студентам знаний о предмете и методе математической логики и ее значении для математики, математической кибернетики, программирования и вычислительной техники, повышение уровня профессиональной компетентности, умение ориентироваться в вопросах исследования оснований математики, структуры доказательств, логических основ программирования.

Развивающая цель: улучшить понимание студентами строения математических теорий, сущности и структуры математических доказательств и понятия алгоритма, логики ЭВМ.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Математическая логика»:

- повторить основные базовые математические понятия: множества, отображений, отношений и их свойства;
- ознакомить студентов с основными понятиями и операциями логики высказываний, логики предикатов и теории алгоритмов;
- изучить булевы функции их способы задания и их применения;
- показать возможность применения изучаемых понятий в различных математических дисциплинах;
- показать основные принципы применения логики в обучении математике;
- привить студентам навыки самостоятельной работы с учебной и научной литературой..

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к **дополнительным видам обучения** компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Математическая логика» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Специализированные компетенции:

Применять основные понятия, утверждения и методы решения базовых задач дискретной математики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен **знать:**

– основные понятия логики высказываний, логики предикатов, представления и задания булевых функции, методы минимизации ДНФ;

– методы доказательства результатов, изучаемых в рамках данной дисциплины;

- алгоритмы решения основных задач курса «Математическая логика»;

уметь:

– проверять и доказывать справедливость равенств в теории множеств

– проверять и доказывать справедливость равенств логики высказываний;

– строить нормальные формы логики высказываний;

– строить предваренные нормальные формы логики предикатов;

– строить выводы формул в исчислении высказываний;

- строить выводы формул в исчислении высказываний, полученные в результате применения теоремы дедукции;

владеть:

– методами решения задач по математической логике;

– навыками доказательства основных теорем курса;

– навыками самообразования и использования аппарата математической логики для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Математическая логика» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 54 часа, в том числе аудиторных – 36 часов, из них: лекции — 18 часов, лабораторные занятия — 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Элементы теории множеств.

Понятие множества, способы задания множества. Операции на множествах. Диаграммы Эйлера – Венна. Свойства операций на множествах. Булева алгебра множеств. Отображения множеств и их свойства. Мощности множеств и их свойства. Отношения на множествах.

Тема 2. Элементы логики высказываний.

Понятие логического высказывания. Элементарные и сложные высказывания. Логические операции, способы задания множества. Пропозиционные формулы, тавтологии. Булева алгебра высказываний. Равносильные формулы логики высказываний.

Тема 3. Булевы функции.

Понятие булевой функции. Число булевых функций от n переменных. Элементарные булевы функции. Представление булевых функций пропозиционными формулами. Дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма. Полином Жегалкина.

Тема 4. Полные системы функций и замкнутые классы.

Полные системы булевых функций. Основные замкнутые классы булевых функций. Теоремы о функциональной полноте. Базисы пространства булевых функций.

Тема 5. Минимизация булевых функций в классе ДНФ.

Постановка задачи минимизации. Метод Квайна-Маккроски. Карты Карно. Реализации булевых функций: контактные схемы; схемы из функциональных элементов.

Тема 6. Логика предикатов.

Понятие предиката. Виды предикатов. Область истинности предиката. Операции над предикатами. Кванторы. Равносильные формулы логики предикатов. Приведенная и предваренная нормальная форма предиката. Применение логики предикатов в логико-математической практике. Математические утверждения, как предикаты.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСП	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Элементы теории множеств	2			2			Устный опрос
2	Элементы логики высказываний	4			4			Устный опрос
3	Булевы функции	4			2		2	Контрольная работа 1
4	Полные системы функций и замкнутые классы	2			2			Устный опрос
5	Минимизация булевых функций в классе ДНФ	4			2		2	Контрольная работа 2
6	Логика предикатов	2			2			Устный опрос
	Всего за семестр	18			14		4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов. Учебник и практикум для вузов / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – Москва: Юрайт, 2024. – 207 с.
2. Гуц, А.К. Математическая логика и теория алгоритмов / А. К. Гуц. – Москва: Ленанд, 2023. – 160 с.
3. Матросов, В.Л. Математическая логика. Учебник для бакалавриата / В.Л. Матросов, М.С. Мирзоев. – Москва: Прометей, 2020. – 229 с.

Дополнительная литература

1. Лихтарников, Л.М. Математическая логика: курс лекций: задачник-практикум и решения / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар: Лань, 2009. – 288 с.
2. Шапоров, С.Д. Математическая логика: курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапоров. – Санкт-Петербург: БВХ-Петербург, 2005. – 410 с.
3. Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова; - Москва: [Инфра-М]; Новосибирск: [Изд-во НГТУ], 2004. – 224с.
4. Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика: учеб. пособие для студ. ун-тов по спец. "Прикладная математика" / В. Г. Карпов, В. А. Мощенский. – Минск: Вышэйшая школа, 1977. – 254 с.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3. Булевы функции.

Примерный перечень заданий

1. Найти формулу для числа булевых функций от n переменных, которые: 1) сохраняют константу 0; 2) сохраняют константу 1; 3) являются самодвойственными; 4) являются линейными.
 2. Доказать, что из каждой немонотонной булевой функции от n переменных с помощью подстановки вместо ее переменных 0, 1 или x можно получить функцию $\bar{x}$.
 3. Построить полином Жегалкина, минимальные ДНФ и КНФ для заданной булевой функции 3-х переменных.
 4. Доказать, что любая полная независимая система, состоящая из 4-х булевых функций, содержит обе константы.
- Форма контроля – контрольная работа 1.

Тема 5. Минимизация булевых функций в классе ДНФ. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Доказать неполноту систем функций:

- 1) $\wedge$; 2) $\vee$; 3) $\rightarrow$; 4) $\neg$; 5) $+$; 6) $\wedge, \vee$; 7) $\vee, \rightarrow$; 8) $\wedge, \rightarrow$; 9) $\rightarrow, 1$; 10) $+, \neg$;
11) $\wedge, \vee, \rightarrow$; 12) $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

Привести примеры функций, которые нельзя выразить через данные системы функций.

2. Выразить через основные логические операции следующие булевы функции, заданные в алгебре Жегалкина:

- 1) $XY + Y + 1$;
- 2) $(X + Y)(Z + 1)$;
- 3) $(X + 1)Y + X + 1$;
- 4) $X + Y + Z + 1$;
- 5) $(X + Y)Z + 1$;
- 6) $(XY + 1)Z + X + 1$;
- 7) $XY + YZ + XZ$;
- 8) $(X + Y + Z)Y + XY + 1$;
- 9) $(XY + 1)(X + Y + 1)$;
- 10) $(X + Y + Z)(X + 1)Y$;
- 11) $(XY + YZ + XZ)(X + 1)$;
- 12) $X + Y + Z + T$.

3. Представить высказывательную схему в виде многочлена Жегалкина.

- 1). $\neg(\neg X \vee X \wedge \neg Y)$; 2) $X \vee Y \vee Z$; 3) $X \wedge Y \vee Y \wedge Z \vee X \wedge Z$;
- 4) $(Y \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow Y) \vee \neg(X \vee Y)$; 5) $\neg(X \vee \neg Y \vee Z) \wedge X \wedge \neg(Y \wedge Z)$.

Форма контроля – контрольная работа 2.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа 1.

1. Выразить: 1) $\wedge$ и $\rightarrow$ через $\vee$ и $\neg$; 2) $\vee$ и $\rightarrow$ через $\wedge$ и $\neg$.
2. Доказать, что следующие множества логических операций являются полными: 1) $\{\wedge, \vee, \neg\}$.
3. Доказать полноту и независимость систем функций: 1) $\rightarrow, \not\subset$, где $x \not\subset y = \neg(y \rightarrow x)$.
4. Найти многочлен над списком переменных X, Y, Z, V , принимающий значение 1 только на наборах 1110, 1101, 1011, 0111.
5. Выразить через основные логические операции следующую булеву функцию, заданную в алгебре Жегалкина: $XY + Y + 1$.

Контрольная работа 2.

1. Найти какое-нибудь предложение с одной свободной числовой переменной, которое выполняется для всех значений переменной, кроме 3, 5, 17.

2. Верно ли, что 1) $(\exists p)(\exists q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)$? 2) $(\forall p)(\exists q)(\exists x)(x^2 + px + q = 0)$?
3. Докажите, что $(\forall x)(\forall y)(x - y \geq 4 \rightarrow x^2 - 5x \geq y - 5)$.
3. Привести к предваренной нормальной форме следующую формулу:
 $\neg(\exists x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)p(x, y, z, u)$.
4. Упростить с помощью равносильных преобразований: $(X \rightarrow (X \rightarrow Y)) \rightarrow (X \rightarrow Y)$.
5. Представить высказывательную схему в виде многочлена Жегалкина:
 $\neg(\neg X \vee X \wedge \neg Y)$.

Примерная тематика лабораторных занятий

Лабораторное занятие 1. Понятие множества, способы задания множества. Операции на множествах. Диаграммы Эйлера – Венна. Свойства операций на множествах. Булева алгебра множеств. Отображения множеств и их свойства. Мощности множеств и их свойства. Отношения на множествах.

Лабораторное занятие 2. Понятие логического высказывания. Элементарные и сложные высказывания. Логические операции способы задания множества. Пропозиционные формулы, тавтологии.

Лабораторное занятие 3. Булева алгебра высказываний. Равносильные формулы логики высказываний.

Лабораторное занятие 4. Понятие булевой функции. Число булевых функций от n переменных. Элементарные булевы функции. Представление булевых функций пропозиционными формулами. Дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма. Полином Жегалкина.

Лабораторное занятие 5. Полные системы булевых функций. Основные замкнутые классы булевых функций. Теоремы о функциональной полноте. Базисы пространства булевых функций.

Лабораторное занятие 6. Постановка задачи минимизации. Метод Квайна-Маккласки. Карты Карно. Реализации булевых функций: контактные схемы; схемы из функциональных элементов.

Лабораторное занятие 7. Понятие предиката. Виды предикатов. Область истинности предиката. Операции над предикатами. Кванторы. Равносильные формулы логики предикатов. Приведенная и предваренная нормальная форма предиката. Применение логики предикатов в логико-математической практике. Математические утверждения, как предикаты.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;
- выполнение домашних заданий;

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Математическая логика» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Понятие множества, способы задания множества. Операции на множествах. Диаграммы Эйлера – Венна. Свойства операций на множествах.
2. Булева алгебра множеств. Отображения множеств и их свойства.
3. Мощности множеств и их свойства. Отношения на множествах.
1. Понятие логического высказывания. Элементарные и сложные высказывания.
2. Логические операции, способы задания множества.
3. Пропозиционные формулы, тавтологии.
4. Булева алгебра высказываний.
5. Равносильные формулы логики высказываний.
6. Понятие булевой функции. Число булевых функций от n переменных.
7. Элементарные булевы функции. Представление булевых функций пропозиционными формулами.

8. Дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма.
9. Полином Жегалкина.
10. Полные системы булевых функций.
11. Основные замкнутые классы булевых функций.
12. Теоремы о функциональной полноте.
13. Базисы пространства булевых функций.
14. Постановка задачи минимизации. Метод Квайна-Маккроски.
15. Карты Карно.
16. Реализации булевых функций: контактные схемы; схемы из функциональных элементов.
17. Понятие предиката. Виды предикатов. Область истинности предиката.
18. Операции над предикатами. Кванторы.
19. Равносильные формулы логики предикатов.
20. Приведенная и предваренная нормальная форма предиката.
21. Применение логики предикатов в логико-математической практике.
22. Математические утверждения, как предикаты.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
высшей алгебры и защиты
информации кандидат
физико-математических наук, доцент



С.В. Тихонов

26.06.2024

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО
на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____(протокол № ____ от _____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)