

# УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ

А.В. Черняк

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

При работе трехслойных конструкций, содержащих жесткие и прочные внешние несущие слои и менее жесткий срединный наполнитель, отмечаются хорошие прочностные и жесткостные показатели при минимуме их весовых характеристик. Поэтому очевидна потребность в разработке эффективных методов расчета НДС данного типа конструкций.

Деформирование и колебания трехслойных конструкций было исследовано в ряде работ. Так, например, монографии [1–4] посвящены разработке математических моделей статического и динамического деформирования трехслойных элементов конструкций со слоями постоянной толщины. В статьях [5–9] рассматривалось деформирование трехслойных стержней и оболочек при квазистатических нагрузках. Работы [10, 11] посвящены статике трехслойных пластин со слоями переменной толщины.

Здесь приведены уравнения равновесия для трехслойной круговой пластины с несущими слоями, линейно изменяющимися по толщине

$$h_1 = h_2 = h_0(1 - r/2r_0).$$

Задача решается в цилиндрической системе координат. Для тонких несущих слоев толщиной  $h_1 = h_2$  принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого наполнителя  $h_3 = 2c$ , воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Перпендикулярно внешнему слою действует распределенная нагрузка  $q = q(r)$ . На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Искомыми перемещениями являются  $w$  – прогиб пластины,  $\psi$  – относительный сдвиг в наполнителе.

Система уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях получена с использованием метода Лагранжа. Она имеет вид

$$a_4^+ \psi_{,rr} \left[ \frac{a_4^+}{r} - \frac{c^2 K_0^+ h_0}{r_0} \right] \psi_{,r} - \left[ \frac{a_4^+}{r} + \frac{c^2 K_0^- h_0}{r_0} \right] \frac{\psi}{r} - a_5^+ w_{,rrr} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{2r_0^2} - \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rr} + \\
& + \left[ \frac{a_5^+}{r} - \frac{ch_0^2 K_0^- r}{2r_0^2} + \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^-}{r_0} \right] \frac{w_{,r}}{r} - 2cG_3 \Psi = 0 \\
& a_5^+ \Psi_{,rrr} + \left[ \frac{a_5^+}{r} - \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] \Psi_{,rr} - \\
& - \left[ \frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ + K_0^-) + \left( \frac{2ch_0^2 + 2c^2 h_0}{r_0 r} \right) \left( K_0^+ + \frac{K_0^-}{2} \right) \right] \Psi_{,r} + \\
& + \left[ \frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ - K_0^-) + \frac{3(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{2rr_0} \right] \frac{\Psi}{r} - a_6^+ w_{,rrrr} - \\
& - \left[ \frac{2a_6^+}{r} - \frac{2h_0^3 K_0^+ r^2}{r_0^3} + \frac{(h_0^3 + ch_0^2) K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rrr} + \\
& + \left[ \frac{a_6^+}{r^2} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left( \frac{5}{2} K_0^+ - K_0^- \right) - \left( \frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (2K_0^+ + K_0^-) + \right. \\
& + \left. \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) (K_0^+ + K_0^-)}{r_0 r} \right] w_{,rr} - \left[ \frac{a_6^+}{r^2} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left( 3K_0^+ - \frac{K_0^-}{2} \right) - \right. \\
& - \left. \left( \frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (K_0^+ - K_0^-) + \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0 r} \right] \frac{w_{,r}}{r} = -q.
\end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_i$  зависят от радиальной координаты  $r$  через толщину несущих слоев  $h_1$  и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
a_4^\pm &= c^2 \left( K_1^\pm h_1 + K_2^\pm h_2 + \frac{2}{3} K_3^\pm c \right), \\
a_5^\pm &= c \left( K_1^\pm h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^\pm h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^2 \right),
\end{aligned}$$

$$a_6^\pm = K_1^\pm h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^\pm h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^3,$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-.$$

Полученная система уравнений равновесия позволяет исследовать изгиб трехслойной пластины с линейно изменяющимися слоями.

### Литература

1. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела // М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов – Минск: БГУ, 2021 – 535 с.
2. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body // M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
3. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях // А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023 – 381 с.
4. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – 21, № 2. – С. 162–169.
5. Starovoitov, É.I. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / E.I. Starovoitov, Yu.M. Pleskachevskii, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovskii // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, N 4. – P. 1023-1029.
6. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.
7. Козел, А.Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. 2021. № 1 (54). С. 30-37.
8. Нестерович А.В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 2020. – Вып. 35. – С. 266-272.
9. Яровая, А.В. Термоупругий изгиб трехслойной пластины на деформируемом основании / А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2006. – Т.42, № 2. – С.96–103

10. Черняк, А.В. Изгиб сэндвич-пластины с внешними слоями, линейно изменяющимися по толщине. / А.В. Черняк // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15 . – С. 235–240.

11. Черняк, А.В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины с переменными толщинами несущих слоев / А.В. Черняк // Проблемы безопасности на транспорте : матер. XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж.д. : в 2 ч., Гомель, 24-25 ноября 2022 – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 269–271.