

ТЕРМОСИЛОВОЙ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю.В. Шафиева

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Разработке математических моделей деформирования трехслойных элементов конструкций в связи с их повсеместным распространением в машиностроении и строительстве, посвящен ряд публикаций. Постановки и методики решения краевых задач о деформировании слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–6]. Исследование свободных и вынужденных колебаний трехслойных и неоднородных цилиндрических оболочек и пластин проведено в статьях [7–8]. Публикации [9–12] посвящены квазистатическому изотермическому и термосиловому нагружению трехслойных стержней и пластин с несжимаемым наполнителем.

Предлагаемая работа отличается от проведенных ранее исследований [13–18] учетом воздействия температурного поля на деформирование трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

Рассматриваемая круговая трехслойная несимметричная по толщине пластина со сжимаемым наполнителем (рисунок 1) находится под действием распределенной нагрузки $q = q(r)$ и теплового потока q_t . Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью наполнителя. В тонких внешних несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В легком наполнителе нормаль остается прямолинейной, но поворачивается на дополнительный угол $\psi(r, t)$. Обжатие по толщине принимается линейным.

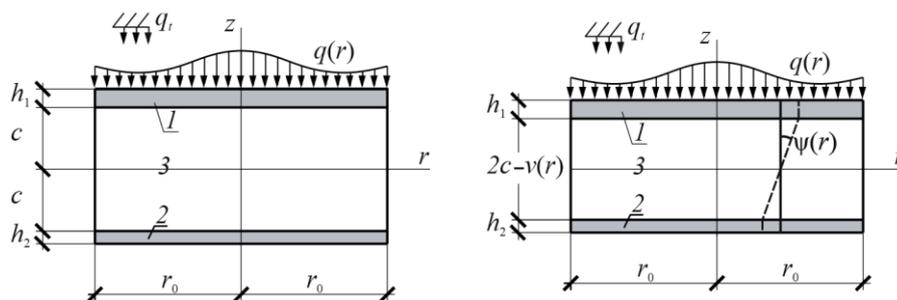


Рисунок 1. Расчетная схема пластины со сжимаемым наполнителем

На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию наполнителя. Через $w(r)$ и $u(r)$ обозначены прогиб и радиальное перемещение срединной

плоскости заполнителя, $v(r, t)$ – функция обжатия заполнителя. Температурное поле $T(z)$ изменяется по толщине пластины во времени t в соответствии с формулой [1]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где $\tau = at / H^2$; $s = z / H$; $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$; $H = h_1 + h_2 + h_3$, $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k / H$;

$a = \lambda / C$; коэффициенты: λ_k – теплопроводности, C_k теплоемкости; ρ_k – плотность материала; $k = 1, 2, 3$ – здесь и далее номер слоя; $h_1 \neq h_2$ – толщины несущих слоев, $h_3 = 2c$ – толщина заполнителя.

В силу осесимметричности нагрузки, окружные перемещения отсутствуют, а искомые величины – $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$, $v(r)$ не зависят от координаты φ . Радиальные перемещения $u^{(k)}(r, z)$ и прогибы $w^{(k)}(r, z)$ в k -ом слое выражаются через эти четыре искомые функции [16].

Для связи напряжений и деформаций используются термоупругие соотношения закона Гука в девиаторно-сферической форме:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k),$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad s_z^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_z^{(3)}, \quad \sigma^{(3)} = 3K_3 (\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03} T_3), \quad (2)$$

где $s_{\alpha}^{(k)}$, $\varepsilon_{\alpha}^{(k)}$ – девиаторные ($\alpha = r, \varphi$) и $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – сферические части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – модули сдвига и объемного деформирования, α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения.

С помощью вариационного принципа Лагранжа и закона Гука (2) в [17–19] получена система уравнений равновесия:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} = 0,$$

$$L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) = 0,$$

$$L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) = -q,$$

$$L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{6} K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) = -q,$$

где запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате; a_i – коэффициенты, выражаемые через упругие и геометрические параметры слоев, L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2); \quad K_k^- = K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k).$$

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям равновесия (3) граничных условий на контуре и условий ограниченности решения в центре пластины, например при шарнирном опирании контура

$$u = \psi = w = v = v_{,rr} = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0. \quad (4)$$

Из системы (3) для прогиба и функции обжатия следуют выражения:

$$w = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_3^{-1}(q) dr +$$

$$+ \frac{C_1 a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12},$$

$$v = -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \right.$$

$$\left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9,$$

где C_i – константы интегрирования.

В случае шарнирного опирания контура константы определяются из граничных условий (4) и включают температуру (1) в явном виде. Зависимость параметров материалов от температуры рассчитывается по формуле Белла [1].

Численные результаты получены для пластины со слоями, выполненными из материалов Д16-Т-фторопласт-4-Д16-Т, механические характеристики которых приведены в [1]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу пластины, $c = 0,23$, $h_1 = 0,03$, $h_2 = 0,03$. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 1$ МПа. Температура в пластине принималась усредненной.

На рис. 3. 4 показано изменение прогиба нижнего слоя $w(r)$ и функции сжимаемости $v(r)$ при различных температурах: 1 – 293 К, 2 – 353 К, 3 – 413 К. Рост температуры на 60 градусов приводит каждый раз к увеличению прогиба на 5,0 %, обжатия заполнителя – на 7,5%.

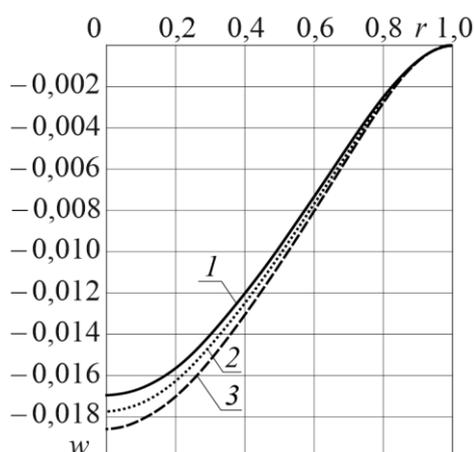


Рисунок 2. Прогиб пластины

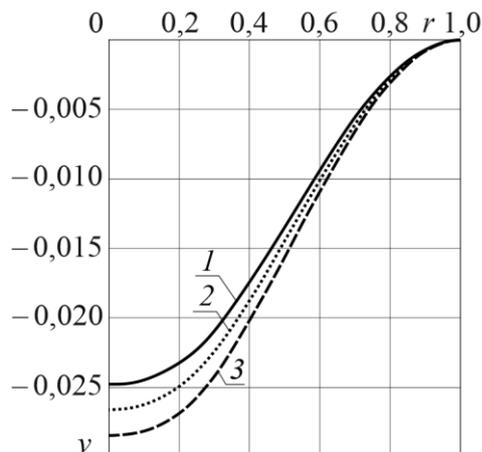


Рисунок 3. Функция обжатия

Заключение. Приведенные постановка и аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние круговой несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым легким заполнителем в температурном поле.

Работа выполнена при финансовой ГПНИ «Конвергенция-25».

Литература

1. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
2. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / УО БелГУТ Гомель, 2013.
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p. doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5
4. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
5. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376 с.
6. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.
7. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol, 43, no. 2, pp. 145–152.
8. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем //

Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, Т. 21, № 2, С. 162–169.

9. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, No. 4, pp. 1023-1029.

10. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // *Механика машин, механизмов и материалов*, 2013, т. 22, №., С. 31–35.

11. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2018, т. 2, № 3, С. 392–406.

12. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости // *Механика. Исследования и инновации*, 2019, т. 12, № 12, с. 152–157.

13. Захарчук Ю.В. Перемещения в упругой круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем // *Теоретическая и прикладная механика*. Минск, БНТУ, 2020, вып. 34, с. 61-69.

14. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2020, Т. 26, № 1, с. 58–73.

15. Starovoitov E.I., Zakharchuk Y.V., Kuznetsova E.L. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load // *Journal of the Balkan Tribological Association*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 175–188.

16. Захарчук Ю.В. Упругое деформирование круговых трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем осесимметричными нагрузками // *Теоретическая и прикладная механика*. Минск, БНТУ, 2022, вып. 36, с. 34-41.

17. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем // *Механика машин, механизмов и материалов*, 2019, т. 48, № 3, с. 26-33.

18. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем // *Механика. Исследования и инновации*, 2019, № 12, с. 66-75.