

ЛОКАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГЛОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

В.С. Салицкий

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Необходимость разработки математических моделей деформирования слоистых элементов конструкций обусловлена их широким применением в машиностроении и строительстве. Методы расчета и постановки задач для слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–6]. Динамическое нагружение слоистых оболочек и пятислойных пластин исследовано в работах [7–11]. Квазистатическому деформированию трехслойных стержней и пластин посвящены публикации [12–16].

Решение задачи об изгибе пятислойной круговой пластины равномерно распределенной нагрузкой приведено в [17–19]. Здесь исследован изгиб пятислойной пластины локальной круговой нагрузкой.

1 Постановка краевой задачи. Рассматривается симметричная по толщине пятислойная круговая пластина, деформируемая равномерно распределенной по кругу относительного радиуса $r \leq b$ нагрузкой (рисунок 1):

$$q(r) = q_0 H_0(b - r), \quad (1)$$

где $H_0(x)$ – функция Хэвисайда; q_0 – интенсивность распределенной нагрузки.

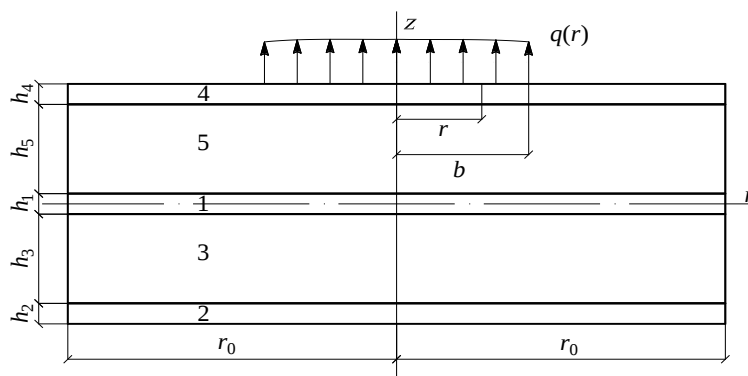


Рисунок 1. Расчётная схема пятислойной круговой пластины

В тонких несущих слоях толщиной h_1 , $h_2 = h_4$ справедливы гипотезы Кирхгофа, в более толстых заполнителях ($h_3 = h_5$) – гипотеза Тимошенко. Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. Все геометрические размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 . Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях получена в [18] при равномерно

распределенной нагрузке. В случае нагрузки (1) она принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q_0H_0(b-r), \end{aligned} \quad (2)$$

где w – прогиб, ψ – относительны сдвиг в заполнителях; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; коэффициенты a_i выражаются через геометрические и упругие характеристики слоев; L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

К системе уравнений (2) необходимо добавить граничные условия. Например, при заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (3)$$

2 Решение краевой задачи. После элементарных преобразований систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L_2(\psi) - \beta^2\psi &= f, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q_0H_0(b-r), \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты и функция, входящие в первое уравнение

$$\beta^2 = \frac{2a_6h_3G_3}{(a_4a_6 - a_5^2)}, \quad \gamma_1 = \frac{a_5}{(a_4a_6 - a_5^2)},$$

$$f(r) = \frac{a_5}{r(a_4a_6 - a_5^2)} \left(\int q_0H_0(b-r)rdr + C_1 \right) = \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0(r^2 - b^2)}{2} H_0(b-r) + C_1 \right).$$

Решение системы дифференциальных уравнений (4) будет

$$\psi = C_2I_1(\beta r) + C_3K_1(\beta r) + \psi_r,$$

$$w = \frac{a_5}{a_6} \int \psi dr + \frac{q_0}{a_6} \int L_3^{-1}(H_0(b-r))dr - \frac{C_1}{4a_6} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4a_6} + C_6 \ln r + C_4, \quad (5)$$

где $I_1(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя; $K_1(\beta r)$ – функция Макдональда; интегралы берутся в пределах от 0 до r ; L_3^{-1} – интегральный оператор, обратный соответствующему дифференциальному оператору в (2).

Частное решение первого из уравнений системы (4) ψ_r будет

$$\psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}. \quad (6)$$

Интегралы, входящие во второе уравнение системы (5) будут

$$\int L_3^{-1}(q) dr = q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r),$$

$$\int \psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times$$

$$\times \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right]. \quad (7)$$

После определения констант интегрирования $C_1, \dots, C_6$ из условий (3), прогиб и сдвиг (5) для пластины, заделанной по контуру, с учетом соотношений (6), (7) принимает следующий конечный вид:

$$w = \frac{a_5}{a_6} \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left\{ \frac{I_0(\beta r)}{\beta I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right) - \frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2\beta^2 I_1(\beta)} + \frac{b I_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)} - \frac{b I_1(\beta b) K_0(\beta r)}{\beta} - \right.$$

$$\left. - \frac{b^2}{2} \ln(r) \frac{H_0(b-r)}{2} \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{q_0}{8a_6} \left\{ \left(\frac{r^4 - 5b^4}{8} - \frac{b^4}{2} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - b^2 r^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{2} \right) H_0(b-r) + \right.$$

$$\left. + b^2 r^2 (\ln r - 1) + \frac{b^2}{4} r^2 (2 - b^2) + \frac{b^4}{2} \ln r + \frac{b^4}{4a_6} + \frac{b^2}{2a_6} \right\},$$

$$\psi = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} \left\{ \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right) + b I_1(\beta b) K_1(\beta r) + \right.$$

$$\left. + \frac{H_0(b-r)}{2} \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b (K_1(\beta b) I_1(\beta r) - I_1(\beta b) K_1(\beta r)) \right] - \frac{b^2}{2r} \right\}.$$

3 Численные результаты получены для пластины, слои которой набраны из материалов Д16-Т – фторопласт – Д16-Т – фторопласт – Д16-Т. Толщины слоев $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$, $h_3 = h_5 = 0,1$; величина нагрузки $q_0 = 10$ МПа. Рис. 2 а, б иллюстрирует изменение прогиба и относительного сдвига вдоль радиуса пластины при различных радиусах b пятна нагрузки: 1 – $b = 0,25$; 2 – $b = 0,5$; 3 – $b = 0,75$; 4 – $b = 1$. При увеличении радиуса нагрузки перемещения растут нелинейно. При этом экстремум относительного сдвига (б) сдвигается к контуру пластины.

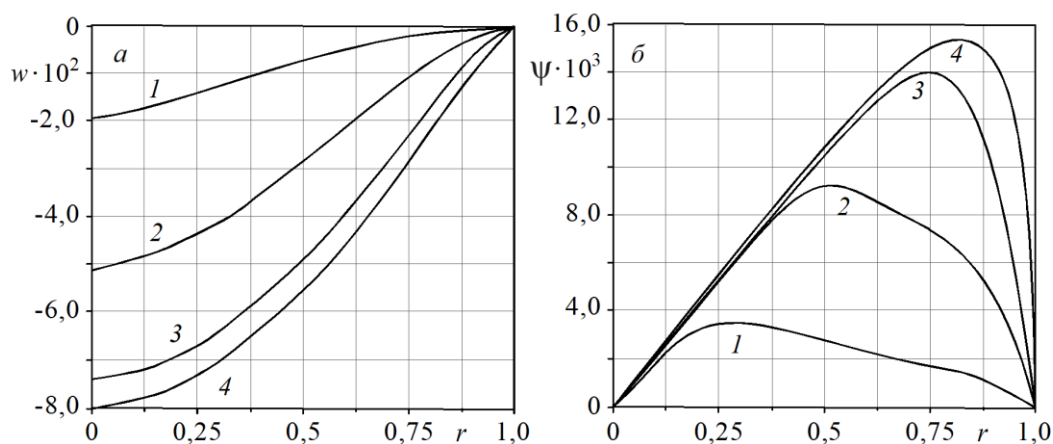


Рисунок 2. Перемещения в пятислойной пластине

Закключение. Предложенное в работе решение позволяет моделировать напряженно-деформированное состояния круговых пятислойных пластин при локальных поверхностных нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005, 576 с.
2. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p.
4. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
5. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376 с.
6. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.
7. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, Т. 21, № 2. С. 162–169.
8. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol, 43, no. 2, pp. 145–152.

9. Leonenko D. V., Starovoitov E.I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367.
10. Лачугина Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями // Механика. Исследования и инновации, 2022, вып. 15, с. 212–219.
11. Лачугина Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины // Теоретическая и прикладная механика, Минск, БНТУ, 2023, вып. 38, с. 227-233.
12. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, vol. 88, No. 4, pp. 1023-1029.
13. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // Механика машин, механизмов и материалов, 2013, т. 22, №., С. 31–35.
14. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций, 2018, т. 2, № 3, С. 392–406.
15. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 66–75.
16. Нестерович А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 152–157.
17. Салицкий В.С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях // Мат. XXVII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, 2021, т. 1, с. 199–201.
18. Салицкий В.С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины // Механика. Исследования и инновации, 2022, т. 15, № 15, с. 209–213.
19. Салицкий В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 2023, вып. 38, с. 234 – 239.