БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Ректор Белорусского
государственного университета
_____ А.Д.Король
15 июля 2024 г.
Регистрационный №УД-13439/уч.

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направления специальности:
1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)
1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, учебных планов № G31-1-003/уч. от 25.05.2021, № G31-1-061/уч.ин. от 31.05.2021, № G-31-1-004/уч. от 25.05.2021, № G31-1-207/уч. от 22.03.2022, № G31-1-243/уч.ин. от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

В.И. Бахтин, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

О.Н. Пыжкова, заведующая кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;
В.Г. Кротов, профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики БГУ
(протокол № 12 от 28.05.2024);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой ФАиАЭ,
Профессор _____ А.В.Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины — повышение уровня профессиональной компетентности в применении современных статистических методов анализа конкретных экономических данных в практической деятельности, в том числе изучение основных статистических методов решения экономических задач, а также расширение математического кругозора.

Задачи учебной дисциплины:

1. Ознакомление с основными понятиями и методами многомерного статистического оценивания.
2. Усвоение навыков построения многомерных статистических моделей экономических задач.
3. Усвоение навыков исследования с помощью статистических моделей зависимостей между экономическими переменными и построения прогнозов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Теория вероятностей и статистика» компонента учреждения высшего образования

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Изучение дисциплины базируется на знаниях дисциплин «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Теория вероятностей», «Математическая статистика».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Прикладная статистика» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

специализированные компетенции:

Анализировать основные закономерности случайных явлений, разрабатывать вероятностно-статистические модели для прикладных задач

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– свойства многомерного нормального распределения;
– методы линейной регрессии;
– основные методы многомерного статистического анализа;
– основные понятия и методы анализа стационарных временных рядов;

уметь:

– строить решающие правила для проверки статистических гипотез;
– проверять прикладные статистические гипотезы в пакете Statistica;

владеть:

– построения моделей множественной линейной регрессии;
– проведения дисперсионного анализа;
– применения метода главных компонент;
– проведения дискриминантного и кластерного анализа;
– построения моделей стационарных временных рядов.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в седьмом семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Прикладная статистика» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 200 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 28 часов, управляемая самостоятельная работа (УСР) – 8 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Многомерное нормальное распределение

Тема 1.1. Определения и свойства многомерного нормального распределения. Моменты нормального распределения. Линейные преобразования нормальных распределений. Плотность нормального распределения. Критерий независимости нормально распределенных случайных векторов

Тема 1.2. Метрика Махаланобиса. Определение метрики Махаланобиса. Распределение χ^2

Тема 1.3. Условное нормальное распределение. Вычисление его параметров.

Тема 1.4. Вращения и проекции нормальных распределений. Независимость взаимно ортогональных проекций и распределение их длин. Распределение Фишера.

Тема 1.5. Выборочное среднее и ковариации многомерного нормального распределения. Оценивание математического ожидания и ковариаций многомерного нормального распределения. Независимость выборочного среднего и выборочной матрицы ковариаций. Состоятельность выборочных средних и ковариаций

Тема 1.6. Оценки максимального правдоподобия для параметров нормальных распределений. Доказательство того, что выборочные математическое ожидание и смещенная матрица ковариаций являются ОМП.

Раздел 2. Линейная регрессия

Тема 2.1. Линейная регрессия случайных величин. Экстремальное свойство линейной регрессии. Построение линейной регрессии. Матрица ковариаций для регрессии

Тема 2.2. Множественная и частная корреляции. Матрица частных ковариаций. Частные и условные ковариации для нормальных распределений

Тема 2.3. Многомерные выборочные оценки. Общие принципы построения многомерных выборочных оценок. Примеры

Тема 2.4. Метод наименьших квадратов. Матрица проекции на конечномерное подпространство. Выборочная множественная линейная регрессия. Остаточная, полная и объясненная сумма квадратов. Коэффициент детерминации

Тема 2.5. Модель множественной линейной регрессии. Основная теорема о линейной регрессии. Статистики Фишера и Стьюдента. Проверка гипотез о параметрах линейной регрессии. Доверительные интервалы для параметров регрессии. Проверка гипотез о независимости

Раздел 3. Некоторые задачи многомерного статистического анализа

Тема 3.1. Метод главных компонент. Вариация случайного вектора, главные оси и главные компоненты, их некоррелированность. Проблема снижения размерности случайного вектора

Тема 3.2. Дискриминантный и кластерный анализ. Модель Фишера. Линейный и квадратичный дискриминантный анализ. Иерархическая кластеризация и метод
k-средних.

Тема 3.3. T^2-статистика Хотеллинга. Ее распределение. Проверка гипотезы о значении математического ожидания при неизвестной дисперсии

Тема 3.4. Сравнение математических ожиданий.
Сравнение математических ожиданий разных выборок. Случаи одинаковых ковариационных матриц, выборок одинакового объема, произвольных выборок. Дисперсионный анализ.

Раздел 4. Временные ряды

Тема 4.1. Стационарные временные ряды. Отсчеты и реализации. Стационарность в узком и широком смысле. Гауссовские временные ряды. Ковариационная функция. Спектральная плотность

Тема 4.2. Оценки параметров временных рядов. Оценки для математического ожидания, ковариационной функции и спектральной плотности временного ряда. Периодограмма и выборочные спектральные плотности

Тема 4.3. Временные ряды авторегрессии. Характеристический многочлен. Условия устойчивости. Уравнение Юла–Уокера. Автокорреляционная и частная автокорреляционная функции для временных рядов авторегрессии. Оценивание параметров и прогнозирование авторегрессии

Тема 4.4. Временные ряды скользящего среднего. Характеристический многочлен. Условие обратимости. Поведение автокорреляционной и частной автокорреляционной функций

Тема 4.5. Временные ряды авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего. Модель случайных блужданий

Тема 4.6. Временные ряды с трендом. Типы трендов. Оценивание параметров и порядка тренда

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля занятий
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	**Многомерное нормальное распределение**	**8**			**5**			
1.1	Определение и свойства многомерного нормального распределения	2			1			опрос
1.2	Метрика Махаланобиса	1			1			опрос
1.3	Условное нормальное распределение.	1			1			опрос
1.4	Вращения и проекции нормальных распределений.	2						
1.5	Выборочное среднее и ковариации многомерного нормального распределения.	1			1			опрос
1.6	Оценки максимального правдоподобия для параметров нормальных распределений.	1			1			опрос
2	**Линейная регрессия**	**10**			**10**			
2.1	Линейная регрессия случайных величин.	2			2			контрольная работа
2.2	Множественная и частная корреляции.	1			2			проверка индивидуальных заданий
2.3	Многомерные выборочные оценки.	2					2	Отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий
2.4	Метод наименьших квадратов.	2			2			опрос
2.5	Модель множественной линейной регрессии.	3			4		2	Отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий
3	Некоторые задачи многомерного статистического анализа	**8**			**6**		**2**	
3.1	Метод главных компонент.	2			1			опрос

								индивидуальных заданий
4.4	Временные ряды скользящего среднего.	1			1			проверка индивидуальных заданий
4.5	Временные ряды авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего.	1			1			опрос
4.6	Временные ряды с трендом.	2						
	Всего	**36**			**28**		**8**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Носко, В. П. Эконометрика : учебник для студентов, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям, а также для студентов бакалавриата, магистратуры, аспирантов, преподавателей экономических факультетов и вузов / В. П. Носко. - Москва : Дело, 2021. - (Серия "Академический учебник"). - Кн. 1 : Ч. 1. Основные понятия, элементарные методы ; Ч. 2. Регрессионный анализ временных рядов. - 2021. - 703 с.

2. Многомерный статистический анализ в экономических задачах. Компьютерное моделирование в SPSS : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям / [авт.: Н. А. Концевая и др.] ; под ред. И. В. Орловой. - Москва : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2024. - 309 с. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1850713.

Дополнительная литература

1. Бахтин В.И. Введение в прикладную статистику. Курс лекций. Ч. 1. Математическая статистика. — Минск: Изд-во БГУ, 2011.

2. Бахтин В.И. Введение в прикладную статистику. Курс лекций. Ч. 2. Методы прикладной статистики. — Минск: Изд-во БГУ, 2012.

3. Харин Ю.С., Жук Е.Е. Математическая и прикладная статистика. — Минск: Изд-во БГУ, 2005.

4. Боровков А.А. Математическая статистика. — М.: Наука, 1984.

5. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. — М.: Бином, 2007.

6. Мардас А.Н. Эконометрика. — С.-Петербург, 2004.

7. Орлов А.И. Эконометрика. — М.: Экзамен, 2004.

8. Мынбаев К., Лемас А. Эконометрика. — Алматы, 2004.

9. Ковалёв Е. А., Медведев Г. А.Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов. – Москва: Юрайт, 2016.

10. Статистические методы экономики : учебно-методический комплекс / В. И. Бахтин, О. И. Пиндрик; БГУ, ММФ. – 2012. - URL: http://elib.bsu.by/handle/123456789/12993

Полный текст курса лекций доступен по адресу
http://elib.bsu.by/handle/123456789/12993

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущей и промежуточной аттестации.

Контроль работы студентов проходит в форме ответов у доски и домашних лабораторных работ с предоставлением отчетов и устной защитой.

Зачет по дисциплине проходит в устной форме.

Для диагностики компетенций используются следующие средства текущего контроля: опросы, контрольные работы, отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Прикладная статистика» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 2.3. Многомерные выборочные оценки.

Выписать формулы для выборочных матриц ковариаций и корреляций, множественных и частных корреляций, выборочных коэффициентов линейной регрессии. Получить численные значения указанных величин в программе Statistica для конкретных выборок (2 часа).

Форма контроля – отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий

Тема 2.5. Модель множественной линейной регрессии.

Построить модель множественной линейной регрессии одной зависимой выборки на заданный набор независимых выборок. Исключить из модели переменные и/или свободный член, зависимость от которых статистически незначима. Проверить линейную гипотезу о коэффициентах регрессии. Построить доверительный интервал для указанного коэффициента регрессии (2 часа).

Форма контроля – отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий

Тема 3.2. Дискриминантный и кластерный анализ.

Используя разные проекции многомерной выборки, визуально определить число кластеров, из которых она состоит. Проверить ответ с помощью иерархической кластеризации. Выбрать начальные центры классов и разбить выборку на кластеры методом k-средних. Найти коэффициенты классифицирующих функций (2 часа).

Форма контроля – отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий

Тема 4.3. Временные ряды авторегрессии.

Для данного стационарного временного ряда построить графики автокорреляционной и частной автокорреляционной функций. С помощью этих функций идентифицировать тип временного ряда авторегрессии и скользящего среднего. Вычислить коэффициенты для выбранной модели временного ряда. Проверить гипотезу о некоррелированности остатков для выбранной модели временного ряда (2 часа).

Форма контроля – отчет по лабораторной работе, проверка индивидуальных заданий

Примерный перечень заданий для лабораторных работ

Примеры исходных файлов для выполнения лабораторных работ доступны по адресу http://elib.bsu.by/handle/123456789/12993.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

В лабораторной работе следует использовать переменные x, y, z, u, v, w из файла **Lab3.sta**. Выбирайте переменные с номером Вашего варианта, который равен Вашему номеру в списке группы. Не забудьте указать этот номер в начале отчета. Уровень значимости для проверки всех гипотез равен 5%.

Задание 1. С помощью Z-статистики Фишера проверить гипотезу о том, что Corr{x,y} =0.7.

Задание 2. Построить (с объяснением) критерий для проверки гипотезы о некоррелированности двух выборок одинаковой мощности на основе t$-статистики.

Задание 3. Проверить гипотезы о попарной некоррелированности переменных x, y, z, u, v.

Задание 4. Построить (с объяснением) критерий для проверки гипотез о независимости каждой из пяти переменных x, y, z, u, v от совокупности четырех остальных.

Задание 5. Проверить гипотезы о независимости каждой из пяти переменных x, y, z, u, v от совокупности остальных четырех.

Задание 6. Построить линейную регрессию переменной v на совокупность x, y, z, u (оставив необходимое число независимых переменных). Объяснить выбор независимых переменных.

Задание 7. Для построенной регрессии проверить гипотезу о нормальной распределенности остатков и оценить их дисперсию.

Задание 8. Объяснить, как для регрессии $v = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 y$ строится доверительный интервал для θ_1 с доверительной вероятностью 90% и построить его.

Задание 9. Для линейной регрессии $v = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 y$ построить (с объяснением) критерий для проверки гипотезы $\theta_1 = 2\,\theta_2$.

Задание 10. Для регрессии $v = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 y$ проверить гипотезу $\theta_1 = 2\,\theta_2$.

Задание 11. Считая, что среднеквадратическая погрешность измерения переменной u равна 0.5$ построить критерий проверки (с объяснением) и проверить гипотезу о том, что u является (неоднородной) линейной функцией от x, y, z.

Задание 12. В предположении независимости выборок x и y построить критерий проверки гипотезы о том, что Dx =2Dy.

Задание 13. Дать определение, описать способ вычисления и вычислить частную корреляцию Corr{u,v|x,y,z}.

Задание 14. С помощью дисперсионного анализа построить (с объяснением) критерий проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий для трех подвыборок ($w_1, \ldots, w_{30}$), ($w_{31}, \ldots, w_{60}$) и ($w_{61}, \ldots, w_{100}$).

Задание 15. Проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий для трех подвыборок ($w_1, \ldots, w_{30}$), ($w_{31}, \ldots, w_{60}$) и ($w_{61}, \ldots, w_{100}$).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

В файле **Principal Components.sta** выберите переменные с именами N-1, N-2, N-3, N-4, N-5, где N — номер Вашего варианта.

Задание 1. Для выбранных пяти переменных найдите главные компоненты с помощью матрицы корреляций. Выпишите формулы для вычисления первых двух главных компонент через нормализованные и через исходные выборочные значения переменных.

Задание 2. Найдите минимальное число главных компонент, объясняющих 99% дисперсии и 95% дисперсии. Напишите, какая здесь имеется в виду дисперсия: исходных переменных или нормализованных?

Задание 3. Найдите вклад первой главной компоненты в дисперсию второй переменной, вычисленной для ненормализованных переменных.

В файле **Classes.sta** выберите переменные с именами N-1, N-2, N-3, N-4, N-5, где N — номер Вашего варианта.

Задание 4. Визуально определите число классов, из которых состоит Ваша пятимерная выборка. Чтобы не ошибиться в выборе числа классов, посмотрите проекции выборки на разные пары исходных координат и на разные пары главных компонент.

Задание 5. Проведите классификацию выборки методом k-средних. Определите число элементов и центр каждого класса.

Задание 6. Для следующих трех векторов найдите апостериорные вероятности попадания в каждый из классов (априорные вероятности взять пропорциональными мощностям классов): (10,2,4,-2,6), (-2,25,17,5,0), (7,14,-6,1,31).

В файле **ARMA.sta** выберите временной ряд x(t)N, где N — номер Вашего варианта.

Задание 7. С помощью выборочных автокорреляций и частных автокорреляций идентифицируйте временной ряд x(t)N (то есть определите p и q, при которых этот ряд является ARMA(p,q)).

Задание 8. Найдите коэффициенты выбранной модели ARMA(p,q) и их p-уровни.

Задание 9. Докажите корректность выбранной Вами модели ARMA(p,q) (то есть что ее порядки не следует увеличивать).

Задание 10. Докажите, что остатки в построенной модели некоррелированы.

Задание 11. Определите закон распределения остатков, его параметры и p-уровень критерия согласия.

Задание 12. Найдите доверительные интервалы для следующих двух значений временного ряда с доверительной вероятностью 0,75.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

При организации образовательного процесса используются ***методы и приёмы развития критического мышления,*** которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией, понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа проводится с целью:

– систематизации и закрепления, углубления и расширения полученных теоретических знаний, обучающихся;

– формирования умений использовать специальную литературу;

– развития познавательных способностей и активности обучающихся творческой инициативы, ответственности и организованности;

– формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине на учебных занятиях выполняется под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия. При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы обучающийся имеет право обращаться к преподавателю за консультацией.

Основным видом аудиторной самостоятельной работы при изучении учебной дисциплины являются подготовка ответов на тесты, решение качественных задач, предложенных в ходе занятия, участие в дискуссиях во время лекций.

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;

– изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку.

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале смешанного и дистанционного обучения БГУ.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Многомерное нормальное распределение. Его простейшие свойства.
2. Метрика Махаланобиса и распределение χ^2.
3. Проекции и вращения нормальных распределений. Распределение Фишера.
4. Распределение выборочных среднего и ковариаций для многомерного нормального распределения.
5. ОМП для параметров многомерных нормальных распределений.
6. Линейная регрессия случайных величин. Ее свойства.
7. Множественная и частная корреляции.
8. Построение многомерных выборочных оценок. Выборочные множественные и частные корреляции.
9. Метод наименьших квадратов. Коэффициент детерминации.
10. Модель множественной линейной регрессии. Основная теорема о регрессии.
11. Проверка гипотез о значимости линейной регрессии, о независимости двух выборок одинакового объема, о значении коэффициента регрессии.
12. Метод главных компонент.
13. Дискриминантный анализ.
14. Кластерный анализ.
15. Статистика T^2 Хотеллинга. Проверка гипотезы о значении вектора математического ожидания.
16. Сравнение математических ожиданий двух выборок.
17. Дисперсионный анализ.
18. Стационарные временные ряды и их характеристики.
19. Периодограмма и выборочная спектральная плотность.

20. Временные ряды авторегрессии. Существование устойчивой авторегрессии.

21. Уравнения Юла–Уокера. Поведение АКФ и ЧАКФ для временных рядов AR.

22. Оценивание параметров и прогнозирование AR.

23. Временные ряды скользящего среднего, их обратимость. Поведение АКФ и ЧАКФ для временных рядов MA.

24. Временные ряды ARIMA.

25. ВР с трендом. Способы выделения тренда. Оценивание тренда и его порядка.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			протокол № 9 от 28.06.2024

Заведующий кафедро
доктор физ.-мат. наук, профессор _____ А.В.Лебедев

28.05.2024

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры _____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

_____ _____

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_____ _____