

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король



КЛАССИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлению)

направления специальности:

1-31 03 01-02 Математика (научно-педагогическая деятельность)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, учебных планов БГУ: № G31-1-016/уч. от 25.05.2021, № G31-1-010/уч.ин. от 31.05.2021, № G31-1-208/уч. от 22.03.2022, № G31-1-220/уч.ин от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Владимир Леонидович Тимохович - доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Анна Александровна Осиновская - ведущий научный сотрудник отдела алгебры Института математики НАН Беларуси, кандидат физ.-мат. наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ (протокол № 10 от 31.05.2024)

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 8 от 31.05.2024)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики



Д.Ф. Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Учебная дисциплина «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики» посвящена рассмотрению ряда классических фактов и теорем высшей математики с точки зрения их применения, как к решению задач элементарной школьной математики, так и к решению олимпиадных задач. Хотя круг таких задач достаточно широк, предлагается выделить несколько классов задач, для решения которых можно эффективно применять ряд классических результатов высшей математики.

Цель учебной дисциплины – представить студентам-педагогам некоторые классические аспекты высшей алгебры, теории чисел и геометрии в преподавании школьной математики, в том числе "нестандартной" школьной математики, изложить избранные результаты высшей математики, эффективно применяемые в задачах элементарной математики.

Образовательная цель: знакомство с фундаментальными понятиями и результатами высшей алгебры, геометрии и теории чисел, успешно применимыми в курсе школьной, а также олимпиадной математики.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, обучение студентов-педагогов умению применять классические математические результаты в преподавании школьной математики, привитие умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики»:

- Ознакомить студентов-педагогов с рядом классических результатов высшей математики, эффективно применяемых в задачах элементарной математики и в задачах олимпиадного характера;
- Углубить понимание фундаментальных понятий высшей математики и расширить область их применения;
- Развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
- Привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики и ее приложений.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики» относится к **циклу дисциплин специализации** компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Данная дисциплина опирается и использует изученные ранее сведения из дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Аналитическая геометрия».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики» должно обеспечить формирование следующих **базовых профессиональных компетенций**:

БПК. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

БПК. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать: основные понятия и результаты классической алгебры, геометрии и теории чисел; методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины; области применения этих результатов в школьной математике;

уметь: выполнять работу с комплексными числами и многочленами; решать простейшие диофантовы уравнения; решать соответствующие геометрические задачи с привлечением алгебро-аналитических подходов;

владеть: основными навыками решения задач, связанных с применением идей и результатов классической алгебры, геометрии и теории чисел; методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики»; навыками самообразования и способами использования аппарата алгебры, геометрии и теории чисел для проведения математических и учебно-методических исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики» отведено:

- для очной формы получения высшего образования: 90 часов, в том числе 52 аудиторных часа, из них: лекции – 48 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Теория делимости целых чисел. Теория сравнений

Тема 1.1. Делимость целых чисел

Делимость целых чисел. Деление с остатком.

Тема 1.2. Основные теоремы

Основная теорема арифметики. Сравнения и их свойства. Малая теорема Ферма. Теоремы Эйлера и Вильсона. Решение сравнений 1 степени. Китайская теорема об остатках.

Тема 1.3. Числа Ферма

Числа Ферма. Различные способы доказательства бесконечности множества простых чисел (Евклид, использование чисел Ферма, постулат Бертрана).

Тема 1.4. Теорема Дирихле

Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра.

Тема 1.5. Уравнение Каталана

Уравнение Каталана. Решение уравнений каталановского типа. Теоретико-числовые функции. Функция Эйлера.

Раздел 2. Многочлены одной переменной.

Тема 2.1. Алгоритм Евклида для многочленов

Аналогия арифметики целых чисел и арифметики многочленов. Теория делимости многочленов. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида для многочленов.

Тема 2.1. Теорема Безу.

Основная теорема арифметики многочленов. Основная теорема алгебры. Классификация неприводимых многочленов. Теорема Безу.

Тема 2.3. Признак Эйзенштейна

Целочисленные и целозначные многочлены. Признак Эйзенштейна.

Раздел 3. Комбинаторика и теория множеств.

Тема 3.1. Биективные отображения

Язык теории множеств, отображения множеств. Биективные отображения как способ сравнения бесконечных (и конечных) множеств.

Тема 3.2. Основные понятия комбинаторики

Метод математической индукции. Основные понятия комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания.

Тема 3.3. Бином Ньютона

Бином Ньютона. Полиномиальная теорема. Числа Каталана.

Тема 3.4. Производящая функция

Производящая функция числовой последовательности. Использование производящей функции в комбинаторных вычислениях.

Раздел 4. Замечательные свойства кривых второго порядка.

Тема 4.1. Кривые второго порядка

Эллипс. Гипербола. Парабола. Кривые второго порядка, их классификация.

Тема 4.2. Свойства кривых второго порядка

Оптическое свойство эллипса, параболы и гиперболы. Равносторонняя гипербола и ее свойства.

Раздел 5. Неравенства, методы их доказательства.

Тема 5.1. Основные усреднения

Среднее арифметическое, среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее квадратичное.

Тема 5.2 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Тема 5.3. Использование производной и интеграла

Выпуклые и вогнутые функции. Использование производной и интеграла. Неравенство Шура.

Раздел 6. Методы линейной алгебры в решении задач.

Тема 6.1. Векторное пространство

Векторное пространство над произвольным полем, базис, матрица перехода от одного базиса к другому.

Тема 6.2. Теорема Гамильтона-Кэли.

Характеристический многочлен матрицы. Линейный оператор на векторном пространстве. Теорема Гамильтона-Кэли.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСП	
1.	Теория делимости целых чисел. Теория сравнений.	12					
1.1.	Делимость целых чисел.	2					Опрос
1.2.	Основные теоремы	4					Опрос
1.3.	Числа Ферма.	2					Опрос
1.4.	Теорема Дирихле	2					Опрос
1.5.	Уравнение Каталана	2					Опрос
2.	Многочлены одной переменной	8				2	
2.1.	Алгоритм Евклида для многочленов.	2					Опрос
2.2.	Теорема Безу.	2					Опрос
2.3.	Признак Эйзенштейна.	4				2	Опрос
3	Комбинаторика и теория множеств	8					Опрос
3.1.	Биективные отображения	2					Опрос
3.2.	Основные понятия комбинаторики.	2					Опрос
3.3.	Бином Ньютона	2					Опрос
3.4.	Производящая функция	2					Опрос
4	Замечательные свойства кривых второго порядка	6					
4.1.	Кривые второго порядка	4					Опрос
4.2.	Свойства кривых	2					Опрос
5	Неравенства, методы их доказательства	8				2	
5.1.	Основные усреднения	2					Опрос
5.2.	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.	2				2	Опрос
5.3.	Использование производной и интеграла	4					Опрос
6	Методы линейной алгебры в решении задач	6					
6.1.	Векторное пространство	2					Опрос
6.2.	Теорема Гамильтона-Кэли.	4					Опрос
	Итого	48				4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Бибииков П.В. Неравенства в задачах. М.: МЦНМО, 2020.
2. В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров. Геометрия. М.: МЦНМО, 2017.
3. Л.И. Головина, И.М. Яглом. Индукция в геометрии. М.: МЦНМО, 2019.
4. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. М.:Лань, 2013.
5. Л.А. Калужнин, В.И.Сущанский. Преобразования и перестановки. М.:Наука, 1985.
6. З.А. Скопец. Геометрические миниатюры. М.: Просвещение, 1990.
7. И.Х. Сивашинский. Неравенства в задачах. М.: Наука, 1967.
8. В.Г. Болтянский, Н.Я. Виленкин. Симметрия в алгебре. М.:МЦНМО, 2002.
9. И.М. Яглом. Комплексные числа и их применение в геометрии. М.: МЦНМО, 2009.

Дополнительная литература

1. Н.М. Седракян, А.М. Авоян. Неравенства. Методы доказательства. М.: Физматлит. 2002.
2. Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука. 1970.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- опрос.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики» учебным планом предусмотрен зачет.

**Примерный перечень заданий
для управляемой самостоятельной работы студентов**

Тема 2.3. Признак Эйзенштейна. (2 часа)

1. Используя алгоритм Евклида, найдите $\text{НОД}(f(x), g(x))$, где:
 - а) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$;
 - б) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^5 - 1$;
 - в) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 2x + 1$, $g(x) = x^4 - 1$.
2. Найти НОД многочленов $f(x) = 3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$ и $g(x) = 3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$.
3. Чему равен показатель кратности корня 2 для многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.
4. Используя схему Горнера, разложить:
 - а) многочлен $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$ по степеням $x + 1$;
 - б) многочлен $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 1$ по степеням $x - 1$.
5. Найти многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням: двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$.
6. Доказать, что многочлен $f(x) = (n - 2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n - 2m)$ имеет число 1 тройным корнем.
7. При каких значениях a и b многочлен $ax^{n+1} + bx^n + 1$ делится на $(x - 1)^2$?
8. При каких значениях a и b многочлен $ax^4 + bx^2 + 1$ делится на $(x - 1)^2$?
9. Определить коэффициенты a, b, c так, чтобы многочлен $f(x) = -2ax^4 + 3bx^2 + 2cx - 4$ имел 1 корнем не ниже третьей кратности.
10. Доказать, что многочлен $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.
11. Разложить многочлен $f(x) = x^6 + 27$ на неприводимые множители над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

Форма контроля – опрос.

Тема 5.2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

1. Докажите неравенство
$$a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{n}.$$
2. Пусть $x_1, \dots, x_n$ положительные числа. Докажите неравенство

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

3. Пусть $S = a_1 + \dots + a_n$, где $a_1, \dots, a_n$ положительные числа и $n \geq 2$. Докажите, что

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

4. Пусть $a, b > 0$. Докажите, что $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.
 5. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ имеют место неравенства

$$n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right) + 1.$$

6. Пусть x и y произвольные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^2+y^2}{2} \cdot \frac{x^3+y^3}{2} \leq \frac{x^6+y^6}{2}.$$

7. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.

8. Пусть a – рациональное число, причем $0 < a < 1$. Докажите, что для любого $x > 0, x \neq 1$, выполняется неравенство $x^a - ax + a - 1 < 0$.

Форма контроля – опрос.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

- **метод учебной дискуссии**, предусматривающий участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме;

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

В процессе **самостоятельной работы** по дисциплине «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к опросам, проводимым во время занятий.
- поиск и изучение понятий и фактов прежде изучаемых дисциплин

«Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия и топология», необходимых для усвоения дисциплины «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики»;

- выполнение домашних заданий;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики», является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при проведении опросов во время занятий и при сдаче зачета.

Видами отчетности УСР являются ответы во время опросов.

Контроль УСР по дисциплине «Классические аспекты высшей математики в задачах элементарной математики» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- опроса на аудиторных занятиях.

Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Теория делимости целых чисел.
2. Основная теорема арифметики. Сравнения и их свойства.
3. Малая теорема Ферма. Теоремы Эйлера и Вильсона. Решение сравнений 1 степени. Китайская теорема об остатках.
4. Числа Ферма. Различные способы доказательства бесконечности множества простых чисел
5. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра.
6. Уравнение Каталана. Решение уравнений каталановского типа. Теоретико-числовые функции. Функция Эйлера
7. Теория делимости многочленов. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида для многочленов.
8. Основная теорема арифметики многочленов. Основная теорема алгебры. Классификация неприводимых многочленов
9. Теорема Безу. Целочисленные и целозначные многочлены. Признак Эйзенштейна.
10. Язык теории множеств, отображения множеств. Биективные отображения как способ сравнения бесконечных (и конечных) множеств.
11. Метод математической индукции. Основные понятия комбинаторики. Перестановки, размещения, сочетания.
12. Бином Ньютона. Полиномиальная теорема. Числа Каталана.

13. Производящая функция числовой последовательности. Использование производящей функции в комбинаторных вычислениях.
14. Эллипс. Гипербола. Парабола. Кривые второго порядка, их классификация.
15. Оптическое свойство эллипса, параболы и гиперболы.
16. Равносторонняя гипербола и ее свойства.
17. Средние: среднее арифметическое, среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее квадратичное.
18. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Выпуклые и вогнутые функции.
19. Использование производной и интеграла. Неравенство Шура.
20. Векторное пространство над произвольным полем, базис, матрица перехода от одного базиса к другому.
21. Характеристический многочлен матрицы. Линейный оператор на векторном пространстве.
22. Теорема Гамильтона-Кэли

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
геометрии, топологии и
методики преподавания математики
К.ф.-м.н., доцент

Баф

Д.Ф. Базылев

31. 05 2024 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)