

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского

государственного университета

А.Д.Король



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-13-2023, учебного плана БГУ № 6-5.4-61/01 от 15.05.2024, учебного плана для студентов Совместного института БГУ и ДПУ № 6-5.4-62/01 от 15.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

Виталий Владимирович Багашенко – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Глеб Олегович Кукрак – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Владимир Леонидович Тимохович – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Владимир Владимирович Шлыков – профессор кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ (протокол № 10 от 31.05.2024)

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики

Д.Ф. Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» является одной из основных дисциплин, которые изучаются студентами-механиками на втором году обучения в университете. Понятия и основные факты этой дисциплины используются при изучении ряда других математических дисциплин, в первую очередь таких, как «Функциональный анализ», «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

Цели и задачи учебной дисциплины

Целями изучения учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» являются:

- Освоение фундаментальных понятий теории кривых, поверхностей и связанных с ними инвариантов (кривизны разных видов) в евклидовом пространстве;
- Приобретение студентами знаний в области основ теории линий и поверхностей, а также элементов полилинейной алгебры;
- Овладение методами исследования, характерными для дифференциальной геометрии и тензорного анализа;
- Приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области дифференциальной геометрии и теории тензоров для их использования при изучении других дисциплин математики и механики.

Для достижения этих целей решаются следующие задачи:

- Излагаются основные факты, относящиеся к линиям и поверхностям в трёхмерном евклидовом пространстве. Такие объекты являются основными для исследований в классической дифференциальной геометрии.
- Рассматриваются основные понятия полилинейной алгебры, опираясь на изученные ранее в курсе алгебры сведения о векторных пространствах и линейных отображениях.

На начальном этапе изучения дисциплины излагаются определения кривых и поверхностей, которые не могли быть сформулированы точным языком в рамках предшествующих дисциплин. При этом особое внимание уделяется сериям примеров.

Далее рассматриваются линии и поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве. Здесь излагается классический материал дифференциальной геометрии: репер Френе, кривизна и кручение линий, понятия и факты теории поверхностей, связанные с первой и второй квадратичными формами, вводится понятие геодезической на поверхности.

В заключительной части излагаются сведения о пространствах векторов и ковекторов, тензорах произвольного типа, тензорной алгебре. Приводятся примеры тензоров в геометрии и алгебре.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» относится к модулю «Математические методы» компонента учреждения

образования.

Изучение дисциплины «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» в течение 3-го семестра проходит во **взаимосвязи** с изучаемыми параллельно дисциплинами: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения».

Требования к компетенциям

Преподавание дисциплины «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» для студентов специальности 6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование должно обеспечить формирование следующей специализированной компетенции:

СК. Применять математический аппарат при исследовании задач механики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- понятия линии и поверхности в трехмерном евклидовом пространстве и их характеристики;
- основные сведения о тензорах и тензорной алгебре.

уметь:

- приводить примеры линий и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве;
- вычислять кривизну и кручение линии, использовать понятия первой и второй квадратичных форм для исследования поверхности;
- предъявлять примеры тензоров в дифференциальной геометрии и алгебре.

иметь навык:

- использования методов дифференциальной геометрии и теории тензоров при решении геометрических задач.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» отведено:

- для очной формы получения высшего образования: 120 часов, в том числе 70 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, практические – 30 часов, управляемая самостоятельная работа - 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Линии в E^3

Тема 1.1. Линии и способы их задания. Касательная к линии.

Параметризованные кривые в E^3 и вектор-функции одной переменной. Кривые как класс эквивалентных параметризованных кривых. Понятие линии. Примеры и способы задания линий. Касательная к линии.

Тема 1.2. Длина дуги. Натуральная параметризация.

Длина дуги линии. Натуральная параметризация. Касательная к линии как наиболее тесно прилегающая к ней прямая. Условие бигулярности, соприкасающаяся плоскость линии.

Тема 1.3. Кривизна линии.

Кривизна линии и формула для её вычисления. Механический смысл кривизны.

Тема 1.4. Репер Френе.

Репер Френе бигулярной линии. Координатные прямые и плоскости репера Френе. Свойства соприкасающейся плоскости.

Тема 1.5. Формулы Френе. Кручение.

Формулы Френе. Кручение, его механический смысл и формула для его вычисления. Натуральные уравнения простой бигулярной линии.

Раздел 2. Поверхности в E^3

Тема 2.1. Поверхности и способы их задания.

Вектор-функции двух переменных. Параметризованные поверхности. Поверхности и способы их задания. Линии на поверхности.

Тема 2.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательное пространство и касательная плоскость к поверхности. Нормаль к поверхности.

Тема 2.3. Первая квадратичная форма поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длины дуги линии на поверхности и величины угла между линиями. Площадь поверхности. Понятие об изометричных поверхностях.

Тема 2.4. Гладкие отображения поверхностей. Основной оператор.

Гладкие отображения поверхностей, дифференциал (производное отображение). Ориентация поверхности. Сферическое отображение поверхности, основной оператор. Матрица основного оператора.

Тема 2.5. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.

Нормальная кривизна линии на ориентированной поверхности и вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и главные направления на поверхности. Полная и средняя кривизны. Типы точек на поверхности.

Тема 2.6. Геодезические на поверхности.

Понятие геодезической на поверхности. Дифференциальные уравнения геодезических. Существование и единственность максимальной геодезической, проходящей через данную точку в данном направлении. Геодезические как локально кратчайшие.

Раздел 3. Тензоры и тензорная алгебра

Тема 3.1. Сопряженное пространство.

Векторы и ковекторы. Сопряженное пространство. Сопряженные базисы.

Тема 3.2. Тензорная алгебра.

Тензоры произвольного типа. Операции над тензорами. Тензорная алгебра. Примеры тензоров.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов			Иное	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Количество часов УСР		
1	2	3	6	7	8	9
1	Линии в E^3	12	10	2		
1.1	Линии и способы их задания. Касательная к линии.	4	2	1		Опрос
1.2	Длина дуги. Натуральная параметризация.	2	2			Опрос
1.3	Кривизна линии.	2	2			Опрос
1.4	Репер Френе	2	2			Опрос
1.5	Формулы Френе. Кручение	2	2	1		Контрольная работа
2	Поверхности в E^3	18	18	2		
2.1	Поверхности и способы их задания	4	4	1		Опрос
2.2	Касательная плоскость и нормаль к поверхности.	2	2			Опрос
2.3	Первая квадратичная форма поверхности	4	4	1		Опрос
2.4	Гладкие отображения поверхностей. Основной оператор.	2	2			Опрос
2.5	Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.	4	4			Контрольная работа
2.6	Геометрические на поверхности.	2	2			Опрос
3	Тензоры и тензорная алгебра	4	2			
3.1	Сопряженное пространство.	2				Опрос
3.2	Тензорная алгебра	2	2	2		Опрос
	Всего по учебной дисциплине	34	30	6		Экзамен

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии: учебник для государственных университетов / П. К. Рашевский. - Изд. стер. - Москва: URSS: ЛКИ, 2021. - 428 с.
2. Павлов, Е. А. Дифференциальная геометрия в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов / Е. А. Павлов, О. И. Рудницкий. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. - 74 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/195518>.
3. Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию: учебное пособие для студ. высших учебных заведений, обуч. по спец. "Математика" / В. И. Паньженский. - Изд. 2-е, испр. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2024. - 236 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212126>.
4. Постников, М. М. Линейная алгебра: учебное пособие / М. М. Постников. - Изд. 3-е, испр. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2024. - 400 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210350>.
5. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ: в 2 ч. / П. К. Рашевский; МГУ им. М. В. Ломоносова. - Москва: ЛЕНАНД, [2022]. - Ч. 2: Римановы пространства и пространства аффинной связности. Тензорный анализ. Математические основы общей теории относительности. - [2022]. - Изд. стер. - 334 с.

Дополнительная литература

6. Горлач, Б. А. Тензорная алгебра и тензорный анализ: учебное пособие / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 160 с. — ISBN 978-5-8114-1834-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211781>
7. Тужилин, А. А. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей / А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко. - Изд. стер. - Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2022. - 243 с.
8. Дифференциальная геометрия. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. — Минск: БГУ, 1982. — 255 с.
9. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. — 2-е издание. М: Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., 1979. — 272 с.
10. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Физматлит, 2004.
11. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: Физматлит, 2004.
12. Торп, Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии / Пер. с англ. И. Х. Сабитова. - Волгоград: ПЛАТОН, 1998. - 360 с. - Библиогр.: с. 354-

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- контрольные работы;
- устный опрос.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- опросы на практических занятиях – 50 %;
- контрольные работы – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) 30 % и экзаменационной отметки 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.1. Линии и способы их задания (1 час)

Указать серию примеров кривых и линий на плоскости и в пространстве.
Форма контроля – опрос.

Тема 1.5. Формулы Френе. Кручение (1 час)

Рассмотреть заданную параметризованную кривую в 3-мерном евклидовом пространстве и вычислить все элементы репера Френе. Вычислить кривизну и кручение. Для заданных линий указать их локальные параметризации. Указать, на какой поверхности 2-го порядка лежит данная

линия. Сделать схему рисунка.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 2.1. Поверхности и способы их задания (1 час)

Указать серию примеров параметризованных поверхностей и поверхностей в 3-мерном евклидовом пространстве.

Форма контроля – опрос.

Тема 2.3. Первая квадратичная форма поверхности (1 час)

Рассмотреть заданную параметризованную поверхность и две пересекающиеся кривые на ней. Вычислить угол между этими кривыми.

Форма контроля – опрос.

Тема 3.2. Тензорная алгебра (2 часа)

Указать примеры тензоров в теории поверхностей. Выяснить тип этих тензоров.

Форма контроля – опрос.

Примерные варианты контрольных работ

Раздел 1. Линии в E^3

Форма контроля - контрольная работа № 1 (примерный вариант).

1. Найти касательные к линии $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$, параллельные прямой $2x - y + 3 = 0$

2. Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.

3. Найти кривизну и кручение линии $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$ в произвольной точке.

4. Написать уравнение соприкасающейся плоскости линии $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = -t \sin t \\ z = at \end{cases}$ в начале координат.

5. Написать уравнение главной нормали и бинормали линии $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ при $t = 1$.

Раздел 2. Поверхности в E^3

Форма контроля - контрольная работа № 2 (примерный вариант).

6. Для поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$ в точке $M(u=2, v=\frac{\pi}{4})$ напишите
 (а) уравнение касательной плоскости, (б) уравнение нормали, (в) уравнение касательной к линии $u=2$.
2. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3; 1; -1)$.
3. Найти косинус угла, под которым пересекаются линии $u+v=0$ и $u-v=0$ на поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = uv \end{cases}$.
4. На поверхности $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$ найти длину дуги линии $v=au$ между точками её пересечения с линиями $u=1, u=2$.
5. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизну прямого геликоида в произвольной точке.

Примерная тематика практических занятий

Занятие № 1. Вектор-функции скалярного аргумента. Производная, дифференциал.

Занятие № 2. Вектор-функции специального вида.

Занятие № 3. Параметризованные кривые на плоскости. Примеры.

Занятие № 4. Явное и неявное задание линий на плоскости. Касательная прямая и нормаль.

Занятие № 5. Кривизна плоской линии. Задачи.

Занятие № 6. Пространственные линии. Примеры.

Занятие № 7. Кривизна и кручение пространственных линий.

Занятие № 8. Элементы репера Френе.

Занятие № 9. Параметризованные поверхности. Примеры.

Занятие № 10. Касательная плоскость и нормаль. Задачи.

Занятие № 11. Первая фундаментальная форма поверхности. Вычисление, свойства. Задачи, решаемые с помощью первой фундаментальной формы.

Занятие № 12. Сферическое отображение, примеры.

Занятие № 13. Вторая фундаментальная форма поверхности. Вычисление, примеры.

Занятие № 14. Основной оператор. Главные направления. Главные кривизны.

Занятие № 15. Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности. Тип точек на поверхности.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие **подходы и методы:**

- **эвристический**, ориентированный на: - осуществление студентами лично-значимых открытий в процессе подготовки к практическим занятиям по методике преподавания математики; - демонстрацию многообразия решений математических задач, методов, форм, средств и приемов организации учебной деятельности школьников; - творческую самореализацию студентов в процессе создания планов-конспектов уроков и их видеофрагментов; - индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- **практико-ориентированный**, предполагающий: - освоение содержания образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- **метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности студентов, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями;

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

В процессе *самостоятельной* работы по дисциплине «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и практических занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;

подготовка к различным формам промежуточной аттестации (например, контрольная работа);

поиск и изучение понятий и фактов из параллельно изучаемых дисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», необходимых для усвоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ»;

выполнение домашних заданий;

самостоятельное выполнение упражнений, сформулированных в лекциях;

подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети

Интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ», является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных работ, при опросе на практических занятиях и при сдаче экзамена.

К организационным формам проведения УСР по дисциплине «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» относится аудиторная деятельность на практических занятиях. Видами отчетности УСР являются: контрольные работы и опросы на практических занятиях. Контроль УСР по дисциплине «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы.

Учет результатов контроля текущей аттестации студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой отметки по дисциплине в рамках рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Вектор-функции скалярного аргумента.
2. Параметризованные кривые. Кривые. Примеры.
3. Линии. Примеры.
4. Параметрическое задание линий на плоскости и в пространстве.
5. Явное задание линий на плоскости и в пространстве.
6. Неявное задание линий на плоскости и в пространстве.
7. Касательная прямая.
8. Соприкасающаяся плоскость.
9. Уравнения касательной прямой и соприкасающейся плоскости.
10. Натуральная параметризация линий.
11. Геометрический смысл касательной прямой и соприкасающейся плоскости.
12. Вектор кривизны и кривизна. Геометрический смысл кривизны.
13. Вычисление кривизны для произвольной параметризации.
14. Базис и репер Френе. Формулы Френе.
15. Кручение и его геометрический смысл.
16. Кручение плоской линии.
17. Вычислительные формулы для кручения.
18. Уравнения элементов репера Френе.
19. Натуральные уравнения кривой.
20. Вектор-функции 2-х скалярных аргументов.
21. Параметризованные поверхности. Примеры.

22. Поверхности. Примеры.
23. Явное и неявное задание поверхности.
24. Криволинейные координаты. Внутренние уравнения кривой на поверхности.
25. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
26. Уравнения касательной плоскости и нормали.
27. Ориентация поверхности.
28. Первая фундаментальная форма поверхности.
29. Задачи, решаемые с помощью первой фундаментальной формы поверхности.
30. Нормальная кривизна линии на поверхности.
31. Нормальная кривизна поверхности в заданном направлении.
32. Вычисление нормальной кривизны.
33. Вторая фундаментальная форма поверхности.
34. Гладкие отображения поверхностей. Дифференциал гладкого отображения поверхностей.
35. Сферическое отображение поверхности.
36. Основной оператор поверхности и его свойства.
37. Матрица основного оператора.
38. Формула Эйлера.
39. Главные кривизны.
40. Главные направления.
41. Полная(гауссова) и средняя кривизны поверхности.
42. Тип точек на поверхности.
43. Векторы и ковекторы.
44. Тензоры и операции над ними.
45. Тензорная алгебра.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Дифференциальные уравнения	Дифференциальных уравнений и системного анализа	Изменений не требуется	Протокол №10 от 31.05.2024

Заведующий кафедрой

Канд.ф.-м.наук, доцент

Д.Ф.Базылев

31. 05 2024 г.

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
 _____ (название кафедры) (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

 (ученая степень, ученое звание)

 (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
 Декан факультета

 (ученая степень, ученое звание)

 (И.О.Фамилия)