

УДК 332.82+519.863

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ДОЛЕЙ ВВОДА В ЭКСПЛУАТАЦИЮ ОБЩЕЙ ПЛОЩАДИ ЖИЛЫХ ДОМОВ ПО ОБЛАСТЯМ И г. МИНСКУ

А. А. Литвинович¹, Э. М. Аксень²
e-mails: ¹litvinovich@bsu.by, ²eaksen@mail.ru

В статье рассмотрена задача максимизации межвременного интегрального социально-экономического показателя. Приводится пример результатов вычисления на основе построенной оптимизационной задачи.

Ключевые слова: жилищная политика; интегральный показатель; оптимизация.

CALCULATION OF OPTIMAL PROPORTIONS OF COMMISSIONED HOUSING AREA BY REGIONS AND MINSK CITY

A. A. Litvinovich¹, E. M. Aksen²
e-mail: ¹litvinovich@bsu.by, ²eaksen@mail.ru

This paper considers the problem of maximizing an intertemporal integral socio-economic indicator. Results of calculations based on the constructed optimization problem is presented.

Keywords: housing policy; integral indicator; optimization.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B70, Secondary 90C30.

Динамика рынка жилой недвижимости имеет важное значение для уровня социально-экономического благополучия страны. Уровень обеспеченности населения жильем, его доступность для населения напрямую оказывают воздействие на качество жизни, демографические показатели, количество безработных и другие макроэкономические показатели. Оптимизация социально-экономических показателей жилищной политики Беларуси требует максимизации межвременного интегрального показателя, методика определения которого представлена в [1].

Пусть n — число регионов в некоторой социально-экономической системе. В рассматриваемом нами случае, когда в качестве социально-экономической системы выступает Республика Беларусь, регионами являются области Республики Беларусь и город Минск, поэтому $n = 7$. Через m обозначим число используемых в модели показателей результативности жилищной политики (например, общая площадь жилых домов, введенных в эксплуатацию, объем субсидий и т.п.). Через $x_{ij}(t)$ обозначим значение j -го показателя жилищной политики в i -м регионе для t -го периода времени ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$).

Пусть s — число социально-экономических показателей (число родившихся за некоторый период времени, обеспеченность граждан общей площадью жилья и т.п.). Значение k -го социально-экономического показателя жилищной политики в i -м регионе для t -го периода времени ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$) обозначим $y_{ik}(t)$. В соответствии с предлагаемой нами методикой имеет место зависимость с запаздыванием показателей $y_{ik}(t)$ от показателей $x_{ij}(t)$.

Для того, чтобы учесть запаздывание влияния объясняющих факторов $x_{ij}(t)$ на результирующие показатели $y_{ik}(t)$, определим ненаблюдаемые показатели $\tilde{x}_{ijk}(t)$ по следующей рекуррентной формуле:

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \tilde{x}_{ijk}(t-1) \cdot \left(\frac{x_{ij}(t)}{\tilde{x}_{ijk}(t-1)} \right)^{\gamma_{ijk}}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s}, \quad (1)$$

где γ_{ijk} — параметры, которые мы будем оценивать с помощью фактических данных.

Прологарифмировав формулу (1), получим:

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)] + \gamma_{ijk} \cdot (\ln[x_{ij}(t)] - \ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)]), \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s}. \quad (2)$$

Заметим, что $\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)]$ — взвешенное среднее значений $\ln[x_{ij}(t)]$ и $\ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)]$, поскольку из равенства (2) следует, что

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \gamma_{ijk} \ln[x_{ij}(t)] + (1 - \gamma_{ijk}) \ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)], \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s}.$$

Формулы (1) и (2) дают возможность найти траектории $\tilde{x}_{ijk}(t)$ и $\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)]$ с помощью заданного значения $\tilde{x}_{ijk}(t_0)$ в начальный момент времени t_0 , а именно можно показать, что

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = [\tilde{x}_{ijk}(t_0)]^{(1-\gamma_{ijk})^{t-t_0}} \prod_{\tau=t_0+1}^t [x_{ij}(\tau)]^{\gamma_{ijk}(1-\gamma_{ijk})^{t-\tau}}, \quad t \geq t_0 \quad (3)$$

Далее при оценке параметров полагаем $\tilde{x}_{ijk}(t_0) = x_{ij}(t_0 + 1)$.

Через $\hat{y}_{ik}(t)$ обозначим прогнозное значение k -го социально-экономического показателя результативности жилищной политики в i -м регионе для t -го периода времени $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$. Будем использовать следующую формулу для нахождения прогнозных значений:

$$\hat{y}_{ik}(t) = a_{ik} \prod_{j=1}^m \tilde{x}_{ijk}^{b_{ijk}}(t), \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, s}, \quad (4)$$

где a_{ik} и b_{ijk} — параметры, которые мы будем оценивать с помощью фактических данных.

Прологаривмировав формулы (3), (4), получим соответственно:

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \gamma_{ijk} \cdot \sum_{\tau=t_0+1}^t (1 - \gamma_{ijk})^{t-\tau} \ln[x_{ij}(\tau)] + (1 - \gamma_{ijk})^{t-t_0} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t_0)], \quad (5)$$

$$t \geq t_0, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s};$$

$$\ln[\hat{y}_{ik}(t)] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^m b_{ijk} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t)], \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, s}. \quad (6)$$

Введем межвременной (динамический) интегральный показатель для социально-экономических показателей за период с T_1 -го по T_2 -ой год следующим образом:

$$Y(T_1, T_2) = \prod_{t=T_1}^{T_2} \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^s y_{ik}^{\alpha_{ik}(t)}(t), \quad (7)$$

где $\alpha_{ik}(t)$ — весовой коэффициент для k -го социально-экономического показателя для i -го региона в t -ом периоде, причем

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) = 1.$$

Заметим, что для разных социально-экономических показателей $y_{ik}(t)$ (при разных значениях индекса k) могут использоваться разные единицы измерения. В таких случаях значения $y_{ik}(t)$ должны быть приведены к одним и тем же единицам измерения (например, стать безразмерными). Достичь этого можно с помощью деления указанных показателей на соответствующие единицы измерения, либо на значения соответствующих показателей в некотором базовом году (например, в начальном T_1 -ом году, т.е. $y_{ik}(t)$ для использования в формуле (7) нужно будет предварительно разделить на $y_{ik}(T_1)$, ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$, $t = \overline{T_1, T_2}$).

Предположим, что в t -ом году в Беларуси суммарное взвешенное значение j -ого показателя результативности жилищной политики не должно превышать планового значения $B_j(t)$. Например, общий объём строительства жилья в Беларуси может быть ограничен планом в X тысяч квадратных метров общей площади. Тогда при планировании показателей результативности жилищной политики по регионам нужно учитывать следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, t = \overline{T_1, T_2}, \quad (8)$$

где $c_{ij}(t)$ — известные коэффициенты, $[T_1, T_2]$ — период планирования.

Следовательно, в задаче максимизации межвременного интегрального показателя (7) для планового периода с T_1 -го по T_2 -ой год должны учитываться условия (8), а также соотношения (3) и (4) (либо эквивалентные им (5), (6)).

Прологарифмировав формулу (7), а также используя соотношения (5), (6), будем иметь оптимизационную задачу, равносильную задаче максимизации межвременного интегрального показателя (7):

$$\ln Y(T_1, T_2) = \sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \ln y_{ik}(t) \rightarrow \max; \quad (9)$$

$$\ln[y_{ik}(t)] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^m b_{ijk} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t)], \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t = \overline{T_1, T_2}; \quad (10)$$

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \gamma_{ijk} \cdot \sum_{\tau=t_0+1}^t (1 - \gamma_{ijk})^{t-\tau} \ln[x_{ij}(\tau)] + (1 - \gamma_{ijk})^{t-t_0} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t_0)], \quad (11)$$

$$t \geq t_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t = \overline{T_1, T_2};$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2}; \quad (12)$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2}. \quad (13)$$

Здесь для удобства восприятия формул не используем диакритический знак "крышечка" в соотношениях (9), (10) (хотя в данном случае под y_{ik} имеются ввиду прогнозные значения этих показателей). Подставив формулу (10) в (9), а после этого (11) в полученное равенство, имеем:

$$\begin{aligned} \ln Y(T_1, T_2) = & \sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \ln a_{ik} + \sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^m \alpha_{ik}(t) b_{ijk} (1 - \gamma_{ijk})^{t-t_0} \ln[\tilde{x}_{ijk}(T_1 - 1)] + \\ & + \sum_{\tau=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \ln[x_{ij}(\tau)] \sum_{t=\tau}^{T_2} \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) b_{ijk} \gamma_{ijk} (1 - \gamma_{ijk})^{t-\tau}. \end{aligned}$$

Следовательно, оптимизационная задача (9)-(13) эквивалентна следующей задаче:

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln[x_{ij}(t)] \rightarrow \max;$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2};$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2},$$

где

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{k=1}^s b_{ijk} \gamma_{ijk} \sum_{\tau=t}^{T_2} \alpha_{ik}(\tau) (1 - \gamma_{ijk})^{\tau-t}. \quad (14)$$

Раметим, что полученная оптимизационная задача эквивалентна следующим $T_2 - T_1 + 1$ статическим задачам:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln[x_{ij}(t)] \rightarrow \max; \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad (16)$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} \quad (17)$$

для каждого в отдельности значения $t = \overline{T_1, T_2}$.

Для решения оптимизационных задач (15)–(17) можно использовать метод множителей Лагранжа [2]. Функция Лагранжа в нашем случае будет иметь вид

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln[x_{ij}(t)] - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \left[\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) - B_j(t) \right],$$

а полученные решения:

$$x_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) B_j(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1 + 1, T_2}, \quad (18)$$

где

$$\omega_{ij}(t) := \frac{\beta_{ij}(t)}{c_{ij}(t) \sum_{i=1}^n \beta_{ij}(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1 + 1, T_2}. \quad (19)$$

Формулы (18), (19) дают единственное оптимальное решение задачи максимизации межвременного интегрального показателя (7) для планового периода с T_1 -го по T_2 -ой год.

В соответствии с формулой (18) $\omega_{ij}(t)$ – это доли суммарного значения j -го показателя по регионам в периоде t , и при этом они (в силу формулы (19)) не зависят от суммарного значения $B_j(t)$.

В случае использования в модели только одного показателя результативности жилищной политики и только одного социально-экономического показателя ($m = 1, s = 1$) формулы (14), (19), (18) примут более простой вид:

$$\beta_i(t) = b_i \gamma_i \sum_{\tau=t}^{T_1} \alpha_i(\tau) (1 - \gamma_i)^{\tau-t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad (20)$$

$$w_i(t) := \frac{\beta_i(t)}{c_i(t) \sum_{i=1}^n \beta_i(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad (21)$$

$$x_i(t) = w_i(t) B(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}.$$

Подставив найденные значения β_i , γ_i , $\alpha_i(\tau)$ (см. [1]) в формулу (20), получим значения коэффициентов $\beta_i(\tau)$, подставление которых в (21) позволяет рассчитать оптимальные доли ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску (табл. 1).

Таблица 1: Оптимальные доли $w_i(t)$ ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску, %

Номер года	Брестская обл.	Витебская обл.	Гомельская обл.	Гродненская обл.	г. Минск	Минская обл.	Могилевская обл.
1	12,20	12,53	10,71	17,21	16,75	14,15	16,45
2	12,57	11,76	10,38	17,34	17,18	15,12	15,65
3	13,00	10,86	9,92	17,38	17,62	16,57	14,66
4	13,42	9,80	9,31	17,24	18,00	18,77	13,45
5	13,77	8,58	8,51	16,82	18,22	22,11	11,98

Таким образом, рассмотрена задача максимизации межвременного социально-экономического показателя с учетом ограничений на показатели результативности жилищной политики (в частности, объема ввода в эксплуатацию жилых домов) и получено аналитическое решение данной задачи, в соответствии с которым показатели результативности жилищной политики должны быть распределены по регионам таким образом, чтобы это приводило к максимизации указанного интегрального показателя.

Литература

1. Литвинович, А. А., Еременко М. М., Аксень Э. М. *Методика моделирования оптимального распределения показателей результативности жилищной политики с учетом запаздывания*. Белорусский экономический журнал. №2. С. 81–97. 2024.
2. Галеев, Э. М. *Оптимизация: теория, примеры, задачи*. Москва: Едиториал УРСС. 2002.