УДК 517.958(075.8)

ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В. И. Корзюк[1], **И. С. Козловская**[2]
e-mails: [1]korzyuk@bsu.by, [2]kozlovskaja@bsu.by

В работе рассматривается классическое решение задачи для простейшего гиперболического уравнения с интегральным и граничными условиями. Основная цель — показать, что метод характеристик является эффективным и в случае интегральных условий. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования для заданных функций на границе области в точках их соприкосновения, при выполнении которых наряду с определенной гладкостью всех функций задачи решение ее принадлежит множеству непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций (до заданного порядка).

Ключевые слова: классическое решение; метод характеристик; интегральное условие.

ARBITRARY SMOOTHNESS CLASSICAL SOLUTION OF THE PROBLEM IN A QUARTER PLANE FOR A WAVE EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION

V. I. Korzyuk[1], **I. S. Kozlovskaya**[2]
e-mail: [1]korzyuk@bsu.by, [2]kozlovskaja@bsu.by

The paper considers the classical solution to the problem for the simplest hyperbolic equation with integral boundary conditions. The main goal is to show that the method of characteristics is also effective in the case of integral conditions. Necessary and sufficient conditions for arbitrary smoothness of the solution are proved.

Keywords: classic solution; characteristics method; integral condition.
Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35A09, Secondary 35B65.

1 Введение

В работе рассматривается классическое решение задачи для простейшего гиперболического уравнения с интегральным и граничными условиями. В такой постановке решения задач в случае неограниченных областей с интегральными условиями для гиперболических уравнений нет (по крайней мере авторам не известны), тем более произвольной гладкости. Гладкость решения зависит не только от гладкости заданных функций, но и от условий согласования этих функций в точках соприкосновения. При этом условия согласования в настоящей статье выписаны в явном виде и доказано, что они являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи принадлежало заданной гладкости (условиям непрерывности в замыкании всей области) наряду с требованиями определенной гладкости заданных функций. В литературе и статьях условия согласования, как правило, не указываются, что приводит к проблеме численной реализации отыскания решения с помощью вычислительной математики.

Близкими работами к данной статье являются [1, 2, 3]. Однако в них полученные результаты отличаются от результатов, представленных здесь.

2 Постановка задачи

Обозначим через $C^s(G)$ множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до порядка s, заданных на G, где s — целое положительное число ($s \in N$). В замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,\infty)$ области $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ найти решение уравнения

$$\left(\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u\right)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0,x_2)=\varphi(x_2),\ \partial_{x_1}u(0,x_2)=\psi(x_2),\ x_2\in[0,\infty), \tag{2}$$

и интегральному условию

$$\int\limits_0^{ax_1} u(x_1,x_2)dx_2=\mu(x_1), x_1\in[0,\infty) \tag{3}$$

где $f\in C^{k-1}(\bar{Q})$ $k\in N$, $k\geq 2$, $\mu\in C^{k-1}([0,\infty))$, $\varphi\in C^{k}([0,\infty))$, $\psi\in C^{k-1}([0,\infty))$, $\partial^2_{x_j}$ – операторы одноименных частных производных второго порядка по переменным x_j, $j=1,2$.

Для краткости задачу (1), (2), (3) будем называть задачей $M(k)$.

3 Частное решение уравнения (1) задачи $M(k)$

Решение задачи (1)–(3) будем находить исходя из общего решения линейного уравнения (1) (см., например [4, гл. 4, § 4.1]).

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) &= u^{(0)}(\boldsymbol{x})+V_p(\boldsymbol{x})= \\ &= g^{(1)}(x_2-ax_1)+g^{(2)}(x_2+ax_1)+V_p(\boldsymbol{x}), \end{aligned} \tag{4}$$

где $u^{(0)}$ — общее решение однородного уравнения

$$\left(\partial^2_{x_1}u^{(0)}-a^2\partial^2_{x_2}u^{(0)}\right)(\boldsymbol{x})=0,$$

$g^{(1)}$ — произвольная функция из класса $C^k(R)$ при предположении для определенности $a>0$, $g^{(2)}$ —произвольная функция из класса $C^k\left([0,\infty)\right)$, V_p — частное решение уравнения (1) из класса $c^k(\bar{Q})$.

Здесь построим частное решение из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$, которое удовлетворяет не только однородным условиям Коши (2), но и однородному условию (3).

Таким образом, частное решение V_p есть решение следующей задачи. В замыкании $\bar{Q}$ найти функцию V_p из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$, $k\geq 2$, которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial^2_{x_1}V_p-a^2\partial^2_{x_2}V_p\right)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\bar{Q}, \tag{5}$$

однородным условиям Коши

$$V_p(0,x_2)=\partial_{x_1}V_p(0,x_2)=0 \tag{6}$$

и интегральному условию

$$\int\limits_0^{ax_1} V_p(x_1,x_2)dx_2=\sum_{m=1}^{k}\frac{b^{(m)}(-ax_1)^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{7}$$

Относительно коэффициентов $b^{(m)}$, $m=1,\ldots,k$, будет сказано ниже.

Решение V_p задачи (5)–(7) находим путем интегрирования уравнения (5) в области Q, а затем от полученного выражения требуем выполнения условий (6), (7).

Чтобы проинтегрировать уравнение (5) с помощью характеристических выражений приводим его ко второму каноническому виду. Для этого записываем уравнение характеристик

$$(dx_2)^2-a^2(dx_1)^2=(dx_2-adx_1)(dx_2+adx_1)=0,$$

соответствующее уравнению (5). Из последнего уравнения находим его решения, т.е. два семейства характеристик

$$x_2-ax_1=const,\quad x_2+ax_1=const$$

уравнения (5). Делаем замену независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ через новые $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ согласно формулам

$$y_1=x_2-ax_1,\quad y_2=x_2+ax_1$$

или

$$x_1=\frac{y_2-y_1}{2a},\quad x_2=\frac{y_2+y_1}{2}.$$

У нас $V_p(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{y}) = w(x_2 - ax_1, x_2 + ax_1)$. Вычисляем производные функции V_p через производные функции w как производные сложной функции. В результате получим

$$\partial_{x_1} V_p(\boldsymbol{x}) = \partial_{y_1} w(\boldsymbol{y})(-a) + a\partial_{y_2} w(\boldsymbol{y}),$$

$$\partial^2_{x_1} V_p(\boldsymbol{x}) = a^2 \partial^2_{y_1} w(\boldsymbol{y}) - 2a^2 \partial_{y_2}\partial_{y_1} w(\boldsymbol{y}) + a^2 \partial^2_{y_2} w(\boldsymbol{y}),$$

$$\partial_{x_2} V_p(\boldsymbol{x}) = \partial_{y_1} w(\boldsymbol{y}) + \partial_{y_2} w(\boldsymbol{y}),$$

$$\partial^2_{x_2} V_p(\boldsymbol{x}) = \partial^2_{y_1} w(\boldsymbol{y}) + 2\partial_{y_1}\partial_{y_2} w(\boldsymbol{y}) + \partial^2_{y_2} w(\boldsymbol{y}).$$

Отсюда, подставляя полученные соотношения производных $\partial^2_{x_j} V_p(\boldsymbol{x})$ через производные от функции w в уравнении (5), получим дифференциальное уравнение относительно функции w,

$$\partial_{y_1}\partial_{y_2} w(\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4a^2} f\left(\frac{y_2 - y_1}{2a}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2). \tag{8}$$

Область Q в декартовой системе координат x_1 и x_2 представляет собой четверть плоскости, представленной на рисунке 1. В результате замены $y_1 = x_2 - ax_1$, $y_2 = x_2 + ax_1$ перейдем в область Ω, представленную на рисунке 2 в декартовой системе координат y_1 и y_2.

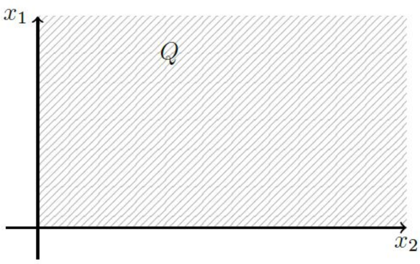

Рис. 1. Область Q.

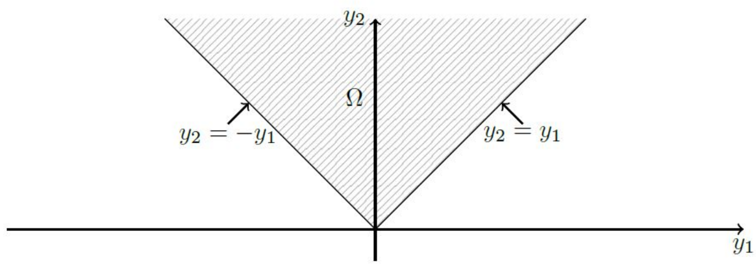

Рис. 2. Область Ω.

Интегрируем уравнение (8) в пределах области Ω по переменным y_1 и y_2. Затем возвращаемся к переменным x_1 и x_2. В результате получим

$$V_p(\boldsymbol{x}) = w(x_2 - ax_1, x_2 + ax_1) = f^{(1)}(x_2 - ax_1) + f^{(2)}(x_2 + ax_1) -$$

$$-\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{|x_2 - ax_1|}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi, \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q}, \tag{9}$$

где произвольно выбранные функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ из класса C^k на соответствующих областях определения $D\left(f^{(1)}\right) = \mathbb{R}$, $D\left(f^{(2)}\right) = [0, \infty)$, если $a > 0$ и $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$. В формуле (9) слагаемое

$$\widetilde{V_p}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{|x_2 - ax_1|}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi$$

за счет предела интегрирования $|x_2 - ax_1|$ не будет из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$ для $k \geq 2$ при любом предположении гладкости f. Поэтому гладкость V_p из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$ можно достичь не только от требований соответствующей гладкости подынтегральной функции f, но и при соответствующем выборе функций $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$.

Для этого характеристикой $x_2 - ax_1 = 0$ область Q разбиваем на две подобласти $Q^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, x_2 - ax_1 > 0\}$, $Q^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, x_2 - ax_1 < 0\}$. Формулу (9) запишем в модифицированном виде через числа $b^{(m)}$ условия (7)

$$V_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} V_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = v_p^{(1)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}) = v_p^{(2)}(\boldsymbol{x}) + \sum\limits_{m=1}^{k} \frac{b^{(m)}(x_2 - ax_1)^m}{m!}, & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$v_p^{(j)}(\boldsymbol{x}) = v_p(\boldsymbol{x}) = f^{(1,j)}(x_2 - ax_1) + f^{(2)}(x_2 + ax_1) -$$
$$-\frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_2 - ax_1} \left(\int\limits_{(-1)^j(ax_1 - x_2)}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi, \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(j)}},\ j = 1, 2, \tag{11}$$

$\overline{Q^{(j)}}$ — замыкания соответствующих подобластей $Q^{(j)}$. Из формул (10) и (11) видно, что если $f \in C^{k-1}\left(\bar{Q}\right)$, то $v_p^{(j)}, V_p^{(j)} \in C^k\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$.

Если $V_p^{(j)} \in C^k\left(\overline{Q^{(j)}}\right)$, то для того, чтобы функция V_p, определяемая формулой (9), принадлежала классу C^k на всем множестве $\bar{Q}$, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^m V_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^m V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

для $\boldsymbol{x} \in \gamma = \{\boldsymbol{x} |\, x_2 = ax_1\}$, $0 \le m + i \le k$, дополнительно к требованию $f \in C^{k-1}\left(\bar{Q}\right)$. Выполнение равенств (12) можно достичь за счет соответствующим образом выбора функций $f^{(1,j)}$, $j = 1, 2$, и $f^{(2)}$. Кроме этого эти функции должны быть такими, чтобы выполнялись условия (6) и (7).

Числа $b^{(m)}$, $m = 1, \ldots, k$, выбираем такими, чтобы функция

$$v_p(\boldsymbol{x}) = v_p^{(j)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2,$$

удовлетворяла однородному интегральному условию

$$\int\limits_0^{ax_1} v_p(x_1, x_2) dx_2 = \int\limits_0^{ax_1} v_p^{(2)}(x_1, x_2) dx_2 = 0.$$

В этом случае V_p удовлетворяет условию (7).

Далее согласно условиям (6) имеем равенства

$$\begin{gathered} v_p(0, x_2) = v_p^{(1)}(0, x_2) = f^{(1,1)}(x_2) + f^{(2)}(x_2) = 0, \quad x_2 \in [0, \infty), \\ \partial_{x_1} v_p(0, x_2) = \partial_{x_1} v_p^{(1)}(0, x_2) = -adf^{(1,1)}(x_2) + adf^{(2)}(x_2) - \\ -\frac{1}{2a} \int\limits_0^{x_2} f\left(\frac{x_2 - \xi}{2a}, \frac{x_2 + \xi}{2}\right) d\xi = 0, \quad x_2 \in [0, \infty). \end{gathered} \tag{13}$$

Решая систему (13), получим значения функций $f^{(1,1)}$, $f^{(2)}$, а именно:

$$f^{(1,1)}(z) = -\frac{1}{4a^2} \int\limits_0^z \left(\int\limits_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta, \quad z \in [0, \infty), \tag{14}$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^z \left(\int\limits_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta, \quad z \in [0, \infty).$$

Таким образом, из (11) и (14) функция $v_p^{(1)}$ определяется формулой

$$v_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_2 - ax_1} \left(\int\limits_{x_2 - ax_1}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi -$$
$$-\frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_2 - ax_1} \left(\int\limits_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta + \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_2 + ax_1} \left(\int\limits_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta. \tag{15}$$

Итак, вторая составляющая частного решения $V_p^{(2)}$ определяется формулой

$$V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x_2 - ax_1} \left(\int\limits_{ax_1 - x_2}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi +$$

$$+f^{(1,2)}(x_2-ax_1)+f^{(2)}(x_2+ax_1)+\sum_{j=1}^{k}\frac{b^{(j)}}{j!}(x_2-ax_1)^j= \tag{16}$$
$$=-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_{ax_1-x_2}^{x_2+ax_1}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta\right)d\xi+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta+f^{(1,2)}(x_2-ax_1)+\sum_{j=1}^{k}\frac{b^{(j)}}{j!}(x_2-ax_1)^j.$$

Если $f\in C^{k-1}\left(\bar{Q}\right)$ и выполняются условия согласования на характеристике γ

$$\partial_{x_1}^i\partial_{x_2}^m v_p^{(1)}(\boldsymbol{x})=\partial_{x_1}^i\partial_{x_2}^m V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}),\qquad 0\le m+i\le k, \tag{17}$$

то $V_p(\boldsymbol{x})=V_p^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(j)}}$, $j=1,2$, принадлежит множеству $C^k(\bar{Q})$. Выполнение условий (17) всегда можно достичь при соответствующем выборе постоянных $b^{(j)}$, $j=1,\dots k$, и $f^{(1,2)}(0)=0$ в соотношении (16).

За счет соответствующего выбора функции $f^{(1,2)}$ потребуем выполнения для частного решения v_p однородного условия (3) (см. далее (18)).

Для определения функции $f^{(1,2)}$ используем однородное интегральное условие (3) и представление (16) без последнего слагаемого, т.е. $v_p^{(2)}(\boldsymbol{x})=V_p^{(2)}(\boldsymbol{x})-\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{b^{(j)}}{j!}(x_2-ax_1)^j$.

Итак, за счет соответствующего выбора функции $f^{(1,2)}$ функция $v_p^{(2)}$ удовлетворяет однородному уравнению (3), т.е.

$$\int\limits_0^{ax_1}v_p^{(2)}(x_1,x_2)dx_2=0,\quad x_1\in([0,\infty)), \tag{18}$$

где полагаем $f^{(1,2)}(0)=0$.

Действительно, согласно (16) и (18)

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{ax_1}\left(\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta\right)dx_2+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{ax_1}\left(\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_{ax_1-x_2}^{x_2+ax_1}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta\right)d\xi\right)dx_2= \tag{19}$$
$$=\int\limits_0^{ax_1}f^{(1,2)}(x_2-ax_1)dx_2,\quad x_1\in[0,\infty),\quad f^{(1,2)}(0)=0.$$

Чтобы определить значения функции $f^{(1,2)}$, продифференцируем равенство (19) по переменному x_1. В результате получим соотношение

$$a\int\limits_0^{ax_1}df^{(1,2)}(x_2-ax_1)dx_2=\frac{a}{4a^2}\int\limits_0^{2ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta+$$
$$+\frac{1}{4a}\int\limits_0^{ax_1}\left(\int\limits_0^{x_2+ax_1}f\left(\frac{x_2+ax_1-\xi}{2a},\frac{x_2+ax_1+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2+$$
$$+\frac{1}{4a}\int\limits_0^{ax_1}\left(\int\limits_{ax_1-x_2}^{ax_1+x_2}f\left(\frac{\eta-x_2+ax_1}{2a},\frac{\eta+x_2-ax_1}{2}\right)d\eta\right)dx_2- \tag{20}$$
$$-\frac{1}{4a}\int\limits_0^{ax_1}\left(\int\limits_0^{x_2-ax_1}f\left(\frac{x_2+ax_1-\xi}{2a},\frac{x_2+ax_1+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2+$$

$$+\frac{1}{4a}\int\limits_0^{ax_1}\left(\int\limits_0^{x_2-ax_1} f\left(\frac{ax_1-x_2-\xi}{2a},\frac{ax_1-x_2+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2.$$

Подынтегральная функция в левой части равенства (20) представляет собой фактически частную производную по x_2, т.е.

$$df^{(1,2)}(x_2-ax_1)=\partial_{x_2}f(x_2-ax_1).$$

Поэтому, интегрируя в левой части (20), получим

$$\int\limits_0^{ax_1} df^{(1,2)}(x_2-ax_1)dx_2=f^{(1,2)}(0)-f^{(1,2)}(-ax_1). \tag{21}$$

Делая замену независимых переменных $-ax_1=z$, где $a>0$, $x_1\in[0,\infty)$, $z\in(-\infty,0]$, получим

$$\begin{gathered}f^{(1,2)}(z)=\frac{1}{4a^2}\left[\int\limits_0^{-z}\left(\int\limits_0^{x_2+z} f\left(\frac{x_2-z-\xi}{2a},\frac{x_2-z+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2-\right.\\
-\int\limits_0^{-2z}\left(\int\limits_0^{\eta} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta-\int\limits_0^{-z}\left(\int\limits_0^{x_2-z} f\left(\frac{x_2-z-\xi}{2a},\frac{x_2-z+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2-\\
-\int\limits_0^{-z}\left(\int\limits_{-x_2-z}^{x_2-z} f\left(\frac{\eta-x_2-z}{2a},\frac{\eta+x_2+z}{2}\right)d\eta\right)dx_2-\\
\left.-\int\limits_0^{-z}\left(\int\limits_0^{x_2+z} f\left(\frac{-x_2-z-\xi}{2a},\frac{-x_2-z+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2\right].\end{gathered}\tag{22}$$

Определенная формулой (22) функция $f^{(1,2)}$, очевидно, удовлетворяет условию $f^{(1,2)}(0)=0$ и $f^{(1,2)}\in C^{(k)}((-\infty,0])$, если $f\in C^{k-1}(\bar{Q})$.

Таким образом, вторая составляющая частного решения $V_p^{(2)}$ уравнения (1) определяется формулой

$$\begin{gathered}V_p(\boldsymbol{x})=V_p^{(2)}(\boldsymbol{x})=v_p^{(2)}(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{k}\frac{b^{(j)}}{j!}(x_2-ax_1)^j=\\
=\frac{1}{4a^2}\left[-\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_{ax_1-x_2}^{ax_1+x_2} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta\right)d\xi+\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta} f(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2})d\xi\right)d\eta+\right.\\
+\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_0^{2x_2-ax_1} f\left(\frac{x_2-ax_1-\xi}{2a},\frac{x_2-ax_1+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2-\\
-\int\limits_0^{2ax_1-2x_2}\left(\int\limits_0^{\eta} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta-\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_0^{ax_1} f\left(\frac{ax_1-\xi}{2a},\frac{ax_1+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2-\\
-\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_{ax_1-2x_2}^{ax_1} f\left(\frac{\eta-2x_2+ax_1}{2a},\frac{\eta+2x_2-ax_1}{2}\right)d\eta\right)dx_2-\\
\left.-\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_0^{2x_2-ax_1} f\left(\frac{ax_1-2x_2-\xi}{2a},\frac{ax_1-2x_2+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2\right]+\\
+\sum_{j=1}^{k}\frac{b^{(j)}}{j!}(x_2-ax_1)^j,\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(2)}}.\end{gathered}\tag{23}$$

Из формул (15) и (23) следует: если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, то $V_p^{(j)} \in C^k(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2$, где $V_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = v_p^{(1)}(\boldsymbol{x})$. При данном предположении гладкости f частное решение V_p будет из класса $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда еще будут выполняться условия непрерывности (17) на характеристике $\gamma = \{\boldsymbol{x}, x_2 = ax_1\}$. А для выполнения этого требования необходимо и достаточно равенство значений $F^{(1,j)}(z)$, $j = 1, 2$, и их производных до порядка k в точке $z = 0$, т. е.

$$d^m F^{(1,1)}(0) = d^m F^{(1,2)}(0), \quad m = 0, 1, \ldots, k, \tag{24}$$

где $F^{(1,1)}(z)$ из (15) определена формулой

$$F^{(1,1)}(z) = \int_0^z \left(\int_0^z f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi - \int_0^z \left(\int_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta, \tag{25}$$

$F^{(1,2)}(z)$ — некоторыми слагаемыми из (23).

$$\begin{gathered} F^{(1,2)}(z) = \int_0^z \left(\int_0^{-z} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi + \\ + \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2+z} f\left(\frac{z - \xi}{2a}, \frac{z + \xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 - \int_0^{-2z} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta - \\ - \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2-z} f\left(\frac{x_2 - z - \xi}{2a}, \frac{x_2 - z + \xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 - \\ - \int_0^{-z} \left(\int_{-x_2-z}^{x_2-z} f\left(\frac{\eta - x_2 - z}{2a}, \frac{\eta + x_2 + z}{2}\right) d\eta \right) dx_2 - \\ - \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2+z} f\left(\frac{-x_2 - z - \xi}{2a}, \frac{-x_2 - z + \xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{b^{(j)}}{j!} z^j. \end{gathered} \tag{26}$$

Из соотношений (25) и (26) легко видеть, что равенство (24) для $m = 0$ выполняется. Для производных выполнение равенств (24) ($m = 1, \ldots, k$) достигается за счет выбора для каждого порядка $m = 1, \ldots, k$ соответствующего числа $b^{(m)}$ из (26).

Таким образом, функция

$$V_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} V_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) = v_p^{(1)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases} \tag{27}$$

если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, будет из класса $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (24) при соответствующем выборе коэффициентов $b^{(m)}$, $m = 1, \ldots, k$, где значение $v_p^{(1)}(\boldsymbol{x})$ функции $v^{(1)}$ определяется формулой (15), а $V_p^{(2)}(\boldsymbol{x})$ функции $V_p^{(2)}$ — формулой (23), является решением уравнения (1).

Результат исследований относительно частного решения уравнения (1) в случае задачи $M(k)$ сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$ уравнения (1), то функция V_p согласно формуле (27), формуле (15) для $v_p^{(1)}$, (23) — для $v_p^{(2)}$, принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (24), удовлетворяет однородным условиям Коши (2), является решением уравнения (1). Кроме этого функция $v_p^{(2)}$ удовлетворяет однородному интегральному условию (18), выполнение условий (24) всегда достигается за счет соответствующих в последнем слагаемом (23) коэффициентов $b^{(m)}$ из расчета один коэффициент $b^{(m)}$ для соответствующего одного уравнения для того же числа m.*

4 Решение задачи $M(k)$

Классическое решение задачи $M(k)$ находим из представления общего решения (4) уравнения (1), где частное решение V_p этого уравнения построено выше в этом параграфе и согласно теореме 1 принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$, $k \geq 2$, если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, удовлетворяет однородным условиям Коши (2) и $v_p^{(2)}$ — однородному интегральному условию (18). За счет произвольно выбранных в (4) функций $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ из класса C^k из общего решения (4) выбираем то, которое удовлетворяет неоднородным заданным условиям Коши (2) и интегральному условию (3).

Представление (4) подставляем в условия Коши (2). В результате получим значения функций $g^{(j)}$, $(j = 1, 2)$ для $z \in ([0, \infty))$ — внешних аргументов $z = x_2 - ax_1$, $z = x_2 + ax_1$, $a > 0$, $\boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1)}}$.

$$g^{(1)}(z) = g^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^z \psi(\xi)d\xi - C,$$

$$g^{(2)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^z \psi(\xi)d\xi + C. \tag{28}$$

Заметим, что для $z \in ([0, \infty))$ функция $g^{(2)}(x_2 + ax_1)$ определена соответствующей формулой из (28) для всех $x \in (\bar{Q})$. Для этих же $z \in ([0, \infty))$ значения $g^{(1)}(x_2 - ax_1)$ определены только для $\boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1)}}$.

Для определения $g^{(1)}(x_2 - ax_1)$ для $\boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}}$ используем интегральное условие (3). Подставляя выражение (4) в уравнение (3), получим интегральное соотношение

$$\int\limits_0^{ax_1} [g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1)]dx_2 =$$

$$= \mu(x_1) + \sum_{m=1}^{k} \frac{b^{(m)}(-ax_1)^{m+1}}{(m+1)!} = \tilde{\mu}(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \tag{29}$$

относительно функции $g^{(1)}$. Здесь для функции $v_p^{(2)}$ использовано однородное условие (3). Согласно (28) уравнение (2) записывается в виде

$$\int\limits_0^{ax_1} g^{(1,2)}(x_2 - ax_1)dx_2 = \tilde{\mu}(x_1) -$$

$$-\int\limits_0^{ax_1} \left[\frac{1}{2}\varphi(x_2 + ax_1) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x_2+ax_1} \psi(\xi)d\xi + C\right] dx_2,\ x_1 \in ([0, \infty)), \boldsymbol{x} \in Q^{(2)}, \tag{30}$$

где $g^{(1)}(x_2 - ax_1) = g^{(1,2)}(x_2 - ax_1)$ для $\boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}}$.

Пусть $\mu \in C^{k+1}([0, \infty))$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$, $k \geq 2$. В этом случае $g^{(1,2)}(z) \in C^k((-\infty, 0])$ или $G^{(1,2)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1,2)}(x_2 - ax_1) \in C^k(\overline{Q^{(2)}})$. Это видно из уравнения (30).

Чтобы записать в аналитическом виде значения функции $g^{(1,2)}$, продифференцируем равенство (30) по x_1. В результате получим соотношение

$$ag^{(1,2)}(0) - a\int\limits_0^{ax_1} dg^{(1,2)}(x_2 - ax_1)dx_2 = d\tilde{\mu}(x_1) - \frac{a}{2}\varphi(2ax_1) -$$

$$-\frac{a}{2}\int\limits_0^{ax_1} d\varphi(x_2 + ax_1)dx_2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2ax_1} \psi(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{ax_1} \psi(x_2 + ax_1)dx_2 - aC,\ x_1 \in ([0, \infty)). \tag{31}$$

Заметим, что $dg^{(1,2)}(x_2 - ax_1) = \partial_{x_2} g^{(1,2)}(x_2 - ax_1)$. Также $d\varphi(x_2 + ax_1) = \partial_{x_2}\varphi(x_2 + ax_1)$. В силу последнего замечания равенство (31) записывается в виде

$$ag^{(1,2)}(0) - ag^{(1,2)}(0) + ag^{(1,2)}(-ax_1) = d\mu(x_1) - \frac{a}{2}\varphi(2ax_1) +$$

$$+\frac{a}{2}\varphi(ax_1)-\frac{a}{2}\varphi(2ax_1)-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2ax_1}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_0^{ax_1}\psi(x_2+ax_1)dx_2+$$

$$+a\sum_{m=1}^{k}\frac{b^{(m)}(-ax_1)^m}{m!}-aC,$$

или, после замены независимой переменной $-ax_1=z$,

$$g^{(1,2)}(z)=\frac{1}{a}d\mu\left(-\frac{z}{a}\right)-\varphi(-2z)+\frac{1}{2}\varphi(-z)-\int\limits_0^{-2z}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_0^{-z}\psi(\xi)d\xi-$$

$$-\sum_{m=1}^{k}\frac{b^{(m)}z^m}{m!}-C,\quad z\in((-\infty,0]). \tag{32}$$

Таким образом, в аналитическом виде (32) определена и функция $g^{(1,2)}(x_2-ax_1)$ для $\boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(2)}}$.

Согласно представлению (4) составляющие $u^{(j)}$, $j=1,2$, решения u задачи $M(k)$ записываются в виде

$$u^{(j)}(\boldsymbol{x})=g^{(1,j)}(x_2-ax_1)+g^{(2)}(x_2+ax_1)+V_p^{(j)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(j)}}, j=1,2. \tag{33}$$

Все составляющие формул (33) в случае задачи $M(k)$ определены в явном виде. Собирая воедино можно выписать в виде формул $u^{(j)}(\boldsymbol{x})$ $(j=1,2)$ функций $u^{(j)}$.

Итак,

$$\begin{aligned}u^{(1)}(\boldsymbol{x})=&\frac{1}{2}\left[\varphi(x_2-ax_1)+\varphi(x_2+ax_1)\right]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x_2-ax_1}^{x_2+ax_1}\psi(\xi)d\xi-\\&-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_{x_2-ax_1}^{x_2+ax_1}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta\right)d\xi-\\&-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta+\\&+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta,\quad \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(1)}}.\end{aligned} \tag{34}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}u^{(2)}(\boldsymbol{x})=&\frac{1}{a}d\mu(x_1-\frac{x_2}{a})+\frac{1}{2}\left[\varphi(ax_1-x_2)+\varphi(ax_1+x_2)\right]-\\&-\varphi(2ax_1-2x_2)-\int\limits_0^{-2x_2-2ax_1}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_0^{-x_2-ax_1}\psi(\xi)d\xi+\\&+\frac{1}{4a^2}\Bigg[\int\limits_0^{x_2+ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta-\int\limits_0^{x_2-ax_1}\left(\int\limits_{ax_1-x_2}^{ax_1+x_2}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\eta\right)d\xi+\\&+\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_0^{2x_2-ax_1}f\left(\frac{x_2-ax_1-\xi}{2a},\frac{x_2-ax_1+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2-\\&-\int\limits_0^{-2x_2+2ax_1}\left(\int\limits_0^{\eta}f\left(\frac{\eta-\xi}{2a},\frac{\eta+\xi}{2}\right)d\xi\right)d\eta-\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_0^{ax_1}f\left(\frac{ax_1-\xi}{2a},\frac{ax_1+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2-\\&-\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_{ax_1-2x_2}^{ax_1}f\left(\frac{\eta-2x_2+ax_1}{2a},\frac{\eta+2x_2-ax_1}{2}\right)d\eta\right)dx_2-\end{aligned} \tag{35}$$

$$-\int\limits_0^{ax_1-x_2}\left(\int\limits_0^{2x_2-ax_1} f\left(\frac{ax_1-2x_2-\xi}{2a},\frac{ax_1-2x_2+\xi}{2}\right)d\xi\right)dx_2\Bigg].$$

Из формул (34) и (35) видно: если $f\in C^{k-1}(\bar{Q})$, $\varphi\in\in C^k([0,\infty))$, $\psi\in C^{k-1}([0,\infty))$, $\mu\in C^{k+1}([0,\infty))$, то функции $u^{(j)}$, $j=1,2$, определяемые этими формулами, принадлежат классам $C^k(\overline{Q^{(j)}})$ соответственно для $j=1$ и $j=2$. Отсюда следует: для того чтобы функция

$$u(\boldsymbol{x})=\begin{cases}u^{(1)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(1)}},\\ u^{(2)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(2)}},\end{cases}\tag{36}$$

принадлежала классу $C^k(\bar{Q})$ необходимо и достаточно выполнения на характеристике $\gamma=\{\boldsymbol{x}|\,x_2=ax_1\}$ условий согласования

$$D^{(\boldsymbol{\alpha})}u^{(1)}(\boldsymbol{x})=D^{(\boldsymbol{\alpha})}u^{(2)}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\gamma,\quad |\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2\le k,\tag{37}$$

где $D^{(\boldsymbol{\alpha})}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}$.

Так как $V_p\in C^k(\bar{Q})$ и $g^{(2)}(x_2-ax_1)\in C^k(\bar{Q})$, то условия (37) эквивалентны условиям

$$d^m g^{(1,1)}(0)=d^m g^{(1,2)}(0),\quad m=0,1,\dots,k.\tag{38}$$

Выпишем условия (38) через заданные функции задачи (1), (2), (3). Согласно (28)

$$g^{(1,1)}(z)=\frac{1}{2}\varphi(z)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^z\psi(\xi)d\xi-C,\quad z\in([0,\infty)).\tag{39}$$

Из (32)

$$g^{(1,2)}(z)=\frac{1}{a}d\mu(-\frac{z}{a})-\varphi(-2z)+\frac{1}{2}\varphi(-z)-\int\limits_0^{-2z}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_0^{-z}\psi(\xi)d\xi-$$

$$-\sum_{j=1}^{k}\frac{b^{(j)}}{j!}z^j-C,\quad z\in((-\infty,0]).\tag{40}$$

Вычисляя производные функций (39) и (40), получим соотношения

$$d^m g^{(1,1)}(z)=\frac{1}{2}d^m\varphi(z)-\frac{1}{2a}d^{m-1}\psi(z),\quad m=1,\dots,k,\tag{41}$$

$$\begin{gathered}d^m g^{(1,2)}(z)=(-1)^m\frac{1}{a^{m+1}}d^{m+1}\mu(-\frac{z}{a})-(-2)^m d^m\varphi(-2z)+\\ +(-1)^m\frac{1}{2}d^m\varphi(-z)-(-2)^m d^{m-1}\psi(-2z)-(-1)^m\frac{1}{2}d^{m-1}\psi(-z)-\\ -\sum_{j=m}^{k}\frac{b^{(j)}}{(j-m)!}z^{j-m},\quad m=1,\dots k.\end{gathered}\tag{42}$$

Подставляя значения соотношений (39)– (42) в равенства (38), получим новые равенства

$$\begin{gathered}\varphi(0)-\frac{1}{a}d\mu(0)=0,\quad m=0,\\ d^m\varphi(0)-2^m d^m\varphi(0)-(\frac{1}{2a}-2^m)d^{m-1}\psi(0)+\\ +\frac{1}{a^{m+1}}d^{m+1}\mu(0)+b^{(m)}=0,\quad m=1,3,\dots\le k,\\ 2^m d^m\varphi(0)+2^m d^{m-1}\psi(0)-\frac{1}{a^{m+1}}d^{m+1}\mu(0)+b^{(m)}=0,\quad m=2,\dots,\le k,\end{gathered}\tag{43}$$

где числа $b^{(m)}$ определены через значения функции f и ее производных (см. теорему 1). Полученные условия эквивалентны условиям (37), являются необходимыми и достаточными для того, чтобы решение u задачи $M(k)$, представленное формулами (34) и (35) было из класса $C^k(\bar{Q})$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть заданные функции задачи $M(k)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости: $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, $\varphi \in C^k([0,\infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0,\infty))$, $\mu \in C^{k+1}([0,\infty))$. Тогда функция u, определенная формулами (36), (34) и (35):*

1) принадлежит классу классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (43);

2) является на $\bar{Q}$ решением задачи (1)–(3);

3) является единственным из класса $C^k(\bar{Q})$ решением задачи (1)–(3).

Единственность классического решения из класса $C^k(\bar{Q})$ задачи $M(k)$ доказывается методом от противного. Тогда для разности их в силу линейности задачи $M(k)$ получаем однородное уравнение(1) и однородные условия (2) и (3). В силу тех же формул (34) и (35) получаем нулевые решения для разности, т.е. единственность из класса $C^k(\bar{Q})$ классического решения задачи $M(k)$.

Литература

1. Корзюк, В. И., Наумовец, С. Н., Козловская, И. С. *Классическое решение задачи для одномерного волнового уравнения с интегральными условиями второго рода*// Дифференциальные уравнения. 2019. Т 55, №.3. С. 361–369.

2. Корзюк, В. И., Ерофеенко, В. Т., Пулко Ю. В. *Классическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с интегральным по времени граничным условием*// Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 82. № 5 С. 36–41.

3. Пулькина, Л. С. *Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения*//Математические заметки 2003. Т. 74, выпуск 3. С. 435–445.

4. Корзюк, В. И. *Уравнения математической физики.* М.: Ленанд, 2021.