УДК 517.977

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРИВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В. В. Карпук[1], **А. В. Метельский**[2]
e-mails: [1]vasvaskarpuk@gmail.com, [2]ametelskii@gmail.com

Рассмотрена задача замыкания обратной связью линейной автономной дифференциальной системы запаздывающего типа с несоизмеримыми запаздываниями дифференциально-разностным регулятором, обеспечивающим замкнутой системе конечный спектр. Результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: дифференциальная система; несоизмеримые запаздывания; регулятор по типу обратной связи; конечный спектр.

SPECTRAL REDUCTION OF A DIFFERENTIAL SYSTEM WITH INCOMMENSURABLE DELAYS

V. V. Karpuk[1], **A. V. Metel'skii**[2]
e-mail: [1]vasvaskarpuk@gmail.com, [2]ametelskii@gmail.com

The problem of closing a linear autonomous differential system of delayed type with incommensurate delays by a differential-difference controller providing a finite spectrum to the closed-loop system is considered. The results are illustrated by examples.

Keywords: differential system; incommensurable delays; feedback controller; finite spectrum.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 34K06, Secondary 93B55.

1 Введение

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему управления запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-d_i) + bu(t), t > 0, \quad x(t) = \eta(t), t \in [-d_m, 0]. \tag{1}$$

Здесь x — n-вектор-столбец решения системы (1) ($n \geq 2$); $0 < d_1 < ... < d_m$ — постоянные запаздывания; A_i — постоянные $n \times n$-матрицы ($i = \overline{0, m}$); b — постоянный n-столбец; η — начальная кусочно непрерывная функция; u — скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих $'$ обозначает операцию транспонирования.

Не ограничивая общности, полагаем $b = e_n = [0; \ldots; 0; 1]'$. Этого всегда можно достичь невырожденным преобразованием переменных $\breve{x} = Tx$ с постоянной матрицей T. Кроме того, выбрав управление $u(t) = -e_n'(A_0 x(t) + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i x(t-d_i)) + u_1(t)$ ($u_1(t)$ — новое управление), получим, что последняя строка матриц A_i ($i = \overline{0, m}$) — нулевая. Таким образом, считаем, что последнее уравнение системы (1) имеет вид $\dot{x}_n(t) = u_1(t)$. Если вход системы (1) содержит запаздывания: $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i u(t-d_i)$, b_i — постоянные n-столбцы ($i = \overline{0, m}$), то, введя вспомогательную переменную $u(t) = x_{n+1}(t)$, рассмотрим систему управления $(n+1)$-го порядка: $\dot{x}_{n+1}(t) = u_1(t)$.

Пусть E_n — единичная матрица n-го порядка, и

$$W(p) = pE_n - (A_0 + A_1 e^{-pd_1} + \ldots + A_m e^{-pd_m})$$

— характеристическая матрица ($p \in \mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), $w(p) = |W(p)|$ — характеристический квазиполином однородной ($b = 0$) системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ — определитель квадратной матрицы. Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbb{C} | w(p) = 0\}$ характеристического квазиполинома (с учетом их кратностей) называют спектром системы (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p)$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряженными парами.

Задача спектрального приведения заключается в замыкании системы (1) обратной связью по состоянию так, чтобы замкнутая система имела конечный спектр. При этом потребуем, чтобы замкнутая система сохраняла свой динамический тип. Конкретно в данном случае, замкнутая система должна оставаться дифференциально-разностной системой запаздывающего типа. Система вида (1) с конечным спектром это — по сути конечномерная система, что существенно упрощает решение задач управляемости и наблюдаемости для спектрально приведенной системы.

В работе [1] обосновано необходимое условие спектральной приводимости системы (1) в классе динамических дифференциально-разностных регуляторов: условие спектральной управляемости [2] системы (1) может нарушаться только в конечном числе точек

$$P = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, m_0} : \operatorname{rank}[W(p_i), b] < n\}. \tag{2}$$

Там же установлено, что для системы (1) с соизмеримыми запаздываниями условие (2) обеспечивает существование дифференциально-разностного регулятора, приводящего систему (1) к системе с конечным спектром. В настоящей статье показано (пример 3), что условие (2) не является достаточным для спектральной приводимости системы (1) с несоизмеримыми запаздываниями даже в случае, когда $P = \emptyset$, т. е. когда система (1) спектрально управляема.

Достаточно полный обзор публикаций, посвященных различным задачам стабилизации и назначения спектра для линейных автономных систем с запаздыванием представлен в [3]. Большая часть известных работ относится к системам с одним или с соизмеримыми запаздываниями. Основные подходы здесь используют функционалы типа Ляпунова-Красовского, при этом критерий, как правило, формулируется в терминах линейных матричных неравенств [4, 5]. Эффективна теория устойчивости, развитая в работе [6] через изучение спектральных свойств инфинитезимального оператора полугруппы преобразований банахова пространства непрерывных функций, порождаемой системой нейтрального типа. На той же основе асимптотическая устойчивость и стабилизируемость системы нейтрального типа в гильбертовом пространстве состояний M_2 исследована в работе [7]. Частотные методы для дизайна стабилизирующих обратных связей применяются в работе [8]. Несмотря на огромный поток публикаций по обсуждаемой тематике, ощущается дефицит конструктивных, алгоритмизуемых результатов в задаче стабилизации и управления спектром систем с последействием.

Принципиально иной подход к решению задач, связанных с управлением спектром линейных автономных систем с запаздыванием, предлагается [9–11] авторами данной публикации. Основная идея этого подхода для системы с соизмеримыми запаздываниями следующая. Характеристический полином $d(p, \lambda)$ ($\lambda = e^{-ph}$, $h > 0$ — общая мера запаздываний) замкнутой системы принадлежит идеалу порожденному системой полиномов — алгебраических дополнений к элементам последней строки характеристической матрицы замкнутой системы. Поэтому класс возможных характеристических полиномов $d(p, \lambda)$ замкнутой системы может быть проанализирован через вычисление базиса Гребнера для системы алгебраических дополнений как полиномов переменных p, λ. Если выбранный полином $d(p, \lambda)$ принадлежит идеалу, то последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы, задающая искомый регулятор, может найдена методом неопределенных коэффициентов [9–11]. В настоящей статье этот подход демонстрируется на задаче спектрального приведения системы с несоизмеримыми запаздываниями.

2 Критерий спектральной приводимости системы с несоизмеримыми запаздываниями

Считаем, что в уравнении (1)

$$d_i = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij} h_j, \; i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где k_{ij} — целые числа, $0 < h_1 < ... < h_\mu$ — попарно несоизмеримые запаздывания. Обозначим

$$\theta_i = e^{-pd_i} = \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}, \lambda_j = e^{-ph_j}, \ i = \overline{1,m}, p \in \mathbb{C}.$$

В операторной записи уравнений полагаем: $\theta_i = e^{-pd_i}$ $(\lambda_j = e^{-ph_j})$ – оператор сдвига, p – оператор дифференцирования:

$$p^s \theta_i f(t) = p^s e^{-pd_i} f(t) = f^{(s)}(t - d_i)$$

или

$$p^s \theta_i f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}} f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} e^{-pk_{ij}h_j} f(t) = f^{(s)}(t - \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j),$$

$f(t)$ — функция; $s \geq 0, i = \overline{1,m}, k_{ij}$ — целые числа. Построим дифференциально-разностный регулятор, обеспечивающий приведение исходной системы (1) к системе с конечным спектром.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_\mu)$, $A(\Lambda) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i \prod\limits_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}, \lambda_j \in \mathbb{C}$. Обозначим

$$M(p, \Lambda) = [M_1(p, \Lambda), ..., M_n(p, \Lambda)], \tag{4}$$

— алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F\varphi(p, \Lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \dots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \dots & -a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ -\varphi_1(\Lambda) & \dots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $a_{ij}(\Lambda)$ — элементы матрицы $A(\Lambda)$; $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,r}$, — полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы

$$|F\varphi(p, \Lambda)| = d_0(p), \tag{5}$$

где $d_0(p)$ — некоторый полином степени $\nu = \deg d_0(p) \geq n$. Если это возможно, то систему назовем спектрально приводимой.

Теорема 1. *Система (1) спектрально приводима, если и только если редуцированный базис Гребнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (4) содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть редуцированный базис Гребнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (4) содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$, множество корней которого обозначим $\widetilde{P}_0$. В частности, возможно $\widetilde{d}_0(p) = 1$ и тогда $\widetilde{P}_0 = \varnothing$. По свойству базиса Гребнера найдется векторный полином $\widetilde{\varphi}'(p, \Lambda) = (\widetilde{\varphi}_1(p, \Lambda), \ldots, \widetilde{\varphi}_n(p, \Lambda))$ такой, что справедливо разложение

$$\widetilde{\varphi}'(p, \Lambda) M(p, \Lambda) = \widetilde{d}_0(p). \tag{6}$$

Если степень полинома $\widetilde{\nu} = \deg \widetilde{d}_0(p)$ меньше чем n, то обе части равенства (6) домножим на полином $\delta(p)$ с действительными коэффициентами степени $n - \widetilde{\nu}$. Обозначим $d_0(p) = \delta(p)\widetilde{d}_0(p)$. Если $\deg \widetilde{d}_0(p) \geq n$, то полагаем $\delta(p) = 1$. Таким образом, $\nu = \deg d_0(p) \geq n$.

Согласно [12, следствие 1], равенство (5) можно преобразовать к виду

$$[-\varphi_1(\Lambda), ..., -\varphi_{n-1}(\Lambda), p^r - \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i}] M(p, \Lambda) = d_0(p), \tag{7}$$

где $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$; $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,r}$, $(r = \nu - n + 1 \geq 1)$ — некоторые полиномы. Полиномы $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n-1}$; $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1,r}$, можно найти методом неопределенных коэффициентов, используя (7). Равенство (7) означает, что замкнутая система с характеристической матрицей $F\varphi(p, \Lambda)$ имеет конечный спектр.

Необходимость. Если система (1) спектрально приводима, то имеет место равенство (7). В таком случае по свойству базиса Гребнера редуцированный базис для системы полиномов (4), построенный в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_\mu} > p$ для системы полиномов (4), необходимо содержит некоторый полином $\widetilde{d}_0(p)$ такой, что $d_0(p) = \delta(p)\widetilde{d}_0(p)$. Теорема доказана. □

Считаем, что старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен 1. Множество различных корней полинома $d_0(p)$ обозначим $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, \mu_0}\}$.

Замечание 1. В силу равенства (7) значения $p_k \in \widetilde{P}_0$ войдут в состав корней полинома $d_0(p)$ при любом выборе полиномов $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, обеспечивающих равенство (7). Поэтому $d_0(p) = \delta(p)\widetilde{d}_0(p)$ и $\widetilde{P}_0 \subseteq P_0$. Значения $p_k \in \widetilde{P}_0$ будем называть инвариантными спектральными значениями, полином $\widetilde{d}_0(p)$ — инвариантным полиномом.

Если система полиномиальных уравнений

$$M(p, \Lambda) = 0$$

несовместна (редуцированный базис Гребнера имеет вид $\{1\}$), то $\widetilde{P}_0 = \varnothing$, и множество корней полинома $d_0(p) = \delta(p)$ при спектральном приведении может быть произвольным самосопряженным.

3 Примеры

Набор запаздываний $h_1 < ... < h_\mu$, порождающий переменные $\lambda_i = e^{-ph_i}$, $i = \overline{1, \mu}$, назовем базисным. Этот набор, для заданных $0 < d_1 < ... < d_m$ (см. представление (3)) очевидно, можно сформировать по-разному. Следующий пример показывает, что для одного базисного набора спектрально управляемая система (1) с несоизмеримыми запаздываниями будет спектрально приводимой, а для другого — нет. В этом принципиальное отличие систем вида (1) от систем с соизмеримыми запаздываниями: $d_i = ih$, $h > 0$, $i = \overline{1, m}$, которые в случае спектральной управляемости всегда спектрально приводимы [1].

Поясним это замечание следующими примерами, иллюстрирующими приемы решения задачи спектрального приведения.

Пример 1. Пусть система задана своей характеристической матрицей ($\Theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_i = e^{-pd_i}, i = \overline{1, 2}$)

$$pE_2 - \widetilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p - \theta_2 & -\theta_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \ln 2,\ d_2 = \ln 3. \tag{8}$$

Система (8) имеет бесконечный спектр, ее характеристический квазиполином: $w(p) = p(p - 3^{-p})$. Алгебраические дополнения $\widetilde{M}(p, \Theta) = [\widetilde{M}_1(p, \Theta), \widetilde{M}_2(p, \Theta)]'$ к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p, \Theta)$:

$$\widetilde{M}_1(p, \Theta) = \theta_1,\ \widetilde{M}_2(p, \Theta) = p - \theta_2.$$

Очевидно, что при любых запаздываниях d_1, d_2 данная система спектрально управляема, т. к. $\theta_1 = e^{-pd_1} \neq 0$ для всех $p \in \mathbb{C}$. В то же время система

$$\widetilde{M}(p, \Theta) = 0$$

относительно p имеет бесконечно много решений, поэтому для базисного набора $h_1 = \ln 2$, $h_2 = \ln 3$ спектральное приведение невозможно. Действительно, тогда $\lambda_1 = \theta_1$, $\lambda_2 = \theta_2$. Полагая $\theta_1 = 0$, получаем:

$$\begin{vmatrix} p - \theta_2 & 0 \\ -\varphi_1(\Theta) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Theta)p^{r-i} \end{vmatrix} = (p - \theta_2)(p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Theta)p^{r-i}),\ \theta_2 = e^{-pd_2}, \tag{9}$$

т. е. система (8) не приводится к системе конечного спектра.

Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_1 \neq 0$. Представим $d_2 = (\ln 3 - \ln 2) + \ln 2$ и возьмем $h_1 = \ln 3 - \ln 2$, $h_2 = \ln 2$. Тогда $\theta_2 = e^{-pd_2} = e^{-ph_1}e^{-ph_2} = \lambda_1\lambda_2$ ($\lambda_i = e^{-ph_i}, i = \overline{1, 2}$); $\lambda_1 = \theta_2/\theta_1$ и $\theta_1 \neq 0$.

Имеем ($\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$):

$$pE_2 - A(\Lambda) = \begin{bmatrix} p - \lambda_1\lambda_2 & -\lambda_2 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Отсюда $M_1(p,\Lambda) = \lambda_2, M_2(p,\Lambda) = p - \lambda_1\lambda_2$. Находим базис Гребнера: $\{p,\lambda_2\}$ для системы полиномов $M(p,\Lambda)$, значит в разложении (6) $\widetilde{d}_0(p) = p$. Возьмем $\delta(p) = (p+1)$, тогда $d_0(p) = p(p+1)$, $P_0 = \{0;-1\}$. Равенство (7) примет вид

$$[\lambda_1 + \lambda_2\lambda_1^2, p+1+\lambda_1\lambda_2]M(p,\Lambda) = p(p+1),$$

или

$$\begin{vmatrix} p-\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2\lambda_1^2 & p+1+\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix} = p(p+1).$$

С учетом $\lambda_2 = \theta_1$, $\lambda_1 = \theta_2/\theta_1$ получаем

$$\begin{vmatrix} p-\theta_2 & -\theta_1 \\ \theta_2/\theta_1+\theta_2^2/\theta_1 & p+1+\theta_2 \end{vmatrix} = p(p+1).$$

Таким образом, второе уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t-(d_2-d_1)) - x_1(t-(2d_2-d_1)) - x_2(t) - x_2(t-d_2).$$

Заметим, что везде аргумент запаздывающего типа: $d_2 - d_1 > 0$, $2d_2 - d_1 > 0$

Следующий пример показывает, что при построении контура спектрального приведения можно использовать сугубо операторную запись системы управления, т.е. ее характеристическую матрицу.

Пример 2.

$$pE_2 - \widetilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < d_1 < d_2. \tag{10}$$

При любых запаздываниях d_1, d_2 данная система спектрально управляема, т. к. $\theta_2 = e^{-pd_2} \neq 0$ для всех $p \in \mathbb{C}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $d_1 = \ln 2$, $d_2 = \ln 3$. Полагая $\theta_2 = 0$, имеем равенство, аналогичное (9). Поэтому для базисного набора $h_1 = \ln 2$, $h_2 = \ln 3$ спектральное приведение невозможно. Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_2 \neq 0$.

Поскольку $2d_1 > d_2$, то первую строку характеристической матрицы (10) представим следующим образом:

$$(p - (\theta_1^2/\theta_2)(\theta_2/\theta_1), -(\theta_2/\theta_1)^2(\theta_1^2/\theta_2)).$$

Это равносильно преобразованию запаздываний

$$d_1 = (2d_1 - d_2) + (d_2 - d_1),\ d_2 = 2(d_2 - d_1) + (2d_1 - d_2).$$

Введя новые базисные запаздывания $h_1 = 2d_1 - d_2 > 0$, $h_2 = d_2 - d_1 > 0$, первую строку характеристической матрицы получим в виде

$$(p - \lambda_1\lambda_2, -\lambda_2^2\lambda_1),\ \lambda_1 = \theta_1^2/\theta_2, \lambda_2 = \theta_2/\theta_1.$$

Теперь базис Гребнера для полиномов $\{\lambda_2^2\lambda_1, p-\lambda_1\lambda_2\}$ содержит полином p^2: $\{p^2, p\lambda_2, p-\lambda_1\lambda_2\}$. Решая полиномиальное уравнение (7), где $d_0(p) = p^2$, $M(p,\Lambda) = (\lambda_2^2\lambda_1, p-\lambda_1\lambda_2)$, находим вторую строку спектрально приведенной системы $(\lambda_1, p+\lambda_1\lambda_2)$:

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^2/\theta_2 & p+\theta_1 \end{vmatrix} = p^2,\ \theta_i = e^{-pd_i}, i = \overline{1,2}.$$

2) Пусть $d_1 = \ln 2$, $d_2 = \ln 5$. Поскольку $2d_1 < d_2$, а $3d_1 > d_2$, то первую строку характеристической матрицы (10) преобразуем таким образом:

$$(p - (\theta_1^3/\theta_2)(\theta_2/\theta_1^2), -(\theta_2/\theta_1^2)^3(\theta_1^3/\theta_2)^2).$$

Введем базисные запаздывания: $h_1 = d_2 - 2d_1 > 0$, $h_2 = 3d_1 - d_2 > 0$. Первая строка характеристической матрицы (10) примет вид

$$(p - \lambda_1\lambda_2, -\lambda_1^3\lambda_2^2),\ \lambda_1 = \theta_2/\theta_1^2, \lambda_2 = \theta_1^3/\theta_2.$$

Аналогично п. 1), находим базис Гребнера: $\{p^3, \lambda_1 p^2, \lambda_1\lambda_2 - p\}$ для системы полиномов $\{\lambda_1^3\lambda_2^2, p - \lambda_1\lambda_2\}$ и вторую строку спектрально приведенной системы

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^3/\theta_2 & p^2+p\theta_1+\theta_1^2 \end{vmatrix} = p^3.$$

Запишем ее в нормальной форме

$$\begin{vmatrix} p-\theta_1 & -\theta_2 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ \theta_1^3/\theta_2 & \theta_1^2 & p+\theta_1 \end{vmatrix} = p^3.$$

В случае спектральной управляемости система вида (1) с соизмеримыми запаздываниями всегда спектрально приводима [1]. Для систем того же вида с несоизмеримыми запаздываниями это не так. Приведем простой пример спектрально управляемой системы с несоизмеримыми запаздываниями, которая не является спектрально приводимой ни при каком базисном наборе запаздываний (см. (3)).

Пример 3.

$$pE_2 - \widetilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p-\theta_2 & 1-\theta_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \ln 2,\, d_2 = \ln 3.$$

Можно убедиться, что при любых несоизмеримых запаздываниях d_1, d_2 данная система спектрально управляема, т. к. система уравнений $p - e^{-pd_2} = 0$, $1 - e^{-pd_1} = 0$ относительно p при несоизмеримых d_1, d_2 несовместна.

При любом представлении запаздываний можно положить $\theta_1 = 1$ (даже если переменная θ_1 окажется в знаменателе), и тогда получаем равенство вида (9). Таким образом, данная система дифференциально-разностным регулятором к конечному спектру не приводится.

4 Заключение

1. Система вида (1) с конечным спектром это — по сути конечномерная система, что существенно упрощает решение задач управляемости и наблюдаемости для спектрально приведенной системы.

2. Характеристический полином $d(p, \Lambda)$ замкнутой системы принадлежит идеалу порожденному системой полиномов (4) — алгебраических дополнений к элементам последней строки характеристической матрицы замкнутой системы. Поэтому класс возможных характеристических полиномов $d(p, \Lambda)$ замкнутой системы может быть проанализирован через вычисление базиса Гребнера для системы алгебраических дополнений (4) как полиномов переменных p, Λ. Если выбранный полином $d(p, \Lambda)$ принадлежит идеалу, то последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы может найдена методом неопределенных коэффициентов.

3. Изложенный выше подход к построению регулятора спектральной приводимости является по своей сути алгебраическим, а его реализация использует стандартные операции над полиномами и полиномиальными матрицами.

Литература

1. Булатов В. И. *Спектральная приводимость систем с запаздываниями* // Вестник БГУ. Сер. 1. 1979. № 3. С. 78–80. http://elib.bsu.by/handle/123456789/12045

2. Manitius A., Triggiani R. *Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions* // SIAM J. Control Optimization. 1978. V. 16, № 4. P. 599–645. https://doi.org/10.1137/0316041

3. Pekar L., Gao Q. *Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results* // IEEE Access. 2018. № 6. P. 35457–35491. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2851453

4. Chen J. D., Lien C. H., Fan K. K., Chou J. H. *Criteria for asymptotic stability of a class of neutral systems via a LMI approach* // IEE Proceedings - Control Theory and Applications. 2001. V. 148, № 6. P. 442–447. https://doi.org/10.1049/ip-cta:20010772

5. Park J. H., Won S. *Asymptotic Stability of Neutral Systems with Multiple Delays* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1999. V. 103, № 1. P. 183–200. https://doi.org/10.1023/A:1021781602182

6. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. *Strong stabilization of neutral functional differential equations* // IMA J. Math. Control Inf. 2002. V. 19, № 1-2. P. 5–23. https://doi.org/10.1093/imamci/19.1_and_2.5

7. Rabah R., Sklyar G. M., Barkhayev P. Y. *Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems* // ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. 2012. V. 18, № 3. P. 656–692. https://doi.org/10.1051/cocv/2011166

8. Hu G.-D. *An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems* // Siberian Mathematical Journal. 2022. V. 63, № 4. P. 789–800. https://doi.org/10.1134/S003744662204019X

9. Карпук В. В., Метельский А. В. *Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28. https://elibrary.ru/kyfygz

10. Метельский А. В., Карпук В. В. *Финитная стабилизация дифференциальных систем с несоизмеримыми запаздываниями* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 1. С. 105–119. https://doi.org/10.31857/S0374064122010113

11. Метельский А. В. *Стабилизация дифференциально-разностной системы запаздывающего типа* // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 4. С. 531–553. https://doi.org/10.31857/S0374064123040106

12. Метельский А. В. *Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 396–408. https://doi.org/10.1134/S0374064119030130