

УДК 517.954

О СВОЙСТВАХ ОБЩЕГО ОПЕРАТОРА, ДВОЙСТВЕННОГО К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА–КИПРИЯНОВА

В. А. Калитвин¹, М. Г. Лапшина²e-mails: ¹ kalitvin@gmail.com, ² marina.lapsh@ya.ru

Преобразование Радона находит свое применение при решении различных прикладных задач, среди которых особенно большое значение занимают вопросы компьютерной томографии. Преобразование Радона–Киприянова (K_γ), введенное в 1998 г. является обобщением результатов, полученных с применением преобразования Радона. При проведении исследований необходимо ввести двойственное к нему преобразование. В данной работе рассматриваются свойства общего оператора, двойственного к преобразованию Радона–Киприянова в многомерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: Преобразование Радона–Киприянова; преобразование, двойственное преобразованию Радона–Киприянова; скрытая сферическая симметрия.

ON PROPERTIES OF THE GENERAL OPERATOR DUAL TO THE RADON–KIPRIYANOV TRANSFORM

V. A. Kalitvin¹, M. G. Lapshina²e-mail: ¹kalitvin@gmail.com, ²marina.lapsh@ya.ru

The Radon transform finds application at the solution of different applied problems. Among them the great importance have the problems of the computer tomography. Radon-Kipriyanov transform (K_γ), introduced in 1998, is using to generalize the results obtained by applying the Radon transform. When conducting the research it is necessary to introduce a dual to this transformation. In this article, the properties of a general operator dual to the Radon-Kipriyanov transform in the multi-dimensional euclidean space are considered.

Keywords: Radon–Kipriyanov transform; dual transform to Radon–Kipriyanov transform; hidden spherical symmetry.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 44A12, Secondary 47G30.

1 Введение

Рассмотрим преобразование Радона специального вида, впервые полученное в работе И.А. Киприянова и Л.Н. Ляхова [1]:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle) (x')^\gamma dx,$$

где $\mathcal{P}_{x'}^\gamma$ ($\gamma_i > 0$) – многомерный оператор Пуассона [2]:

$$\mathcal{P}_{x'}^\gamma g(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(x_1 \cos \alpha_1, x_2 \cos \alpha_2, \dots, x_m \cos \alpha_m, x'') \prod_{i=1}^m \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha,$$

$$C(\gamma) = \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma_i}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}, \quad d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_m.$$

Здесь $\delta(P(x))$ – обобщенная дельта функция Дирака, сосредоточенная на поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}_n$, $\langle x, \theta \rangle$ — скалярное произведение n - мерных векторов, θ — единичный вектор нормали к гиперплоскости, являющийся внешним по отношению к полупространству $\langle x, \theta \rangle < p$.

Пусть

$$\begin{aligned} x &= (x', x'') \in \mathbb{R}_n^+ = \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_{n-m}, \\ \mathbb{R}_m^+ &= \{x' : x_1 > 0, \dots, x_m > 0\}, \quad 1 \leq m \leq n, \\ \gamma &= (\gamma_1, \dots, \gamma_m), \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}. \end{aligned}$$

Это преобразование можно представить в виде *специального (весового) преобразования Радона* $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ [1, 2]:

$$\begin{aligned} K_\gamma[f](\tilde{\theta}; p) &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \tilde{\theta} \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dz = \\ &= C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+} \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z), \\ z &= (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, x'') = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}, x''), \\ \mathbf{z}_1 &= (z_1, z_3, \dots, z_{2n-1}), \quad \mathbf{z}_2 = (z_2, z_4, \dots, z_{2n}). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь единичный вектор нормали $\Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \dots, \theta_m, 0, \theta'') \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+}$, перпендикулярен координатным осям $0z_{2i}$, $C(\gamma)$ — константа, нормирующая интегральный оператор Пуассона, а интегрирование происходит по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+$, определенной неравенствами $z_{2i} > 0$.

С помощью равенства

$$\Theta_\perp^+ = \{z : \langle \Theta, z \rangle = p, \quad z_{2i} > 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+}.$$

определена полуплоскость интегрирования в выражении (1).

Заметим, что координаты z_{2i} не входят в уравнение плоскости $\Theta_\perp^+$, но являются переменными точками этой плоскости.

При фиксированном векторе Θ будем использовать обозначение

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p).$$

Аналогично [6], представим преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости $\Theta_\perp^+$ в евклидовом пространстве точек $\in \mathbb{R}_{n+2m}^+$:

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z). \tag{2}$$

Заметим, что интегрирование по переменным z_2 может рассматриваться как преобразование Меллина.

2 Двойственное преобразование в многомерном евклидовом пространстве

Определение 1. Функции $f(x')$, определенные в пространстве $\mathbb{R}_n^+$, будем называть x_i -четными по Киприянову (или x_i -четными), если они допускают четное продолжение с сохранением класса гладкости.

Определение 2. Функцию x_i -четную по каждой координате вектора $x' = (x_1, \dots, x_n)$ будем называть x' -четной по Киприянову (или x' -четной функцией).

Пусть функции $f = f(z)$ и $g = g(z)$ принадлежат подпространству $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ основных функций Л. Шварца, состоящему из x' -четных по Киприянову функций. Функция (2) является функцией одного переменного p , поэтому позволяет ввести линейную форму в $\mathbb{R}_1$ следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z) dp. \tag{3}$$

Введем новую переменную

$$y = p\Theta + z \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+} = \{y = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, x'') : z_{2i} \geq 0\}.$$

По построению, векторы Θ и z ортогональны: $\langle \Theta, z \rangle = 0$. Так как координаты z_{2i} отсутствуют в скалярном произведении векторов Θ и z , то

$$\langle y, \Theta \rangle = p\Theta^2 + \langle z, \Theta \rangle = p,$$

где

$$\Theta = (\Theta_1, 0, \Theta_2, 0, \dots, \Theta_m, 0, \Theta'') \quad |\Theta| = 1,$$

так как $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \dots + \Theta_m^2 + |\Theta''|^2 = 1$.

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p) g(p) dp &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^{\#}[g](y) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1} dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученное в (4) преобразование

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^{\#}[g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$$

будем называть *двойственным преобразованием Радона–Киприянова* в $\mathbb{R}_{n+2m}^+$. Заметим, что полученное преобразование является обобщением оператора, двойственного к преобразованию Радона, применение которого к задачам компьютерной томографии описано в [4].

Введем преобразование координат $y_i \in \mathbb{R}_{n+2m}^+$ ($i = 1, \dots, m$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{2i-1} = x_i \cos \alpha_i, & 0 < \alpha_i < \pi, \\ z_{2i} = x_i \sin \alpha_i, & x_i > 0 \\ x' = x' \end{array} \right| \begin{array}{l} y = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, x'') \rightarrow \\ \rightarrow \{x : (x', x''), x' = x_1, x_2, \dots, x_m > 0\} = x \in \mathbb{R}_n^+ \end{array} \quad (5)$$

Так как первоначальные координаты возникли в результате вращения осей координат, при котором оси Ox_{2i-1} совпали с направлением перпендикуляра к плоскости интегрирования, то учитывая равенство $f(x', x'') = \tilde{f}(z)$ и (4), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p) g(p) dp &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1} dy = \\ &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2m-1}^2 + z_{2m}^2}, \tau\right) \times \\ &\times g\left(\Theta, (x_1 \theta_1 \cos \alpha_1 + x_2 \theta_2 \cos \alpha_2 + \dots + x_m \theta_m \cos \alpha_m + x_{m+1} \theta_{m+1} + \dots + x_n \theta_n \theta)\right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^m \sin^{2\gamma_i} \alpha_i (t)^\gamma dx, \end{aligned}$$

где $(x')^\gamma = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}$, $dx = dx' dx''$.

Используя определение многомерного оператора Пуассона, получим следующее представление линейной формы (3):

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma g(\theta, \langle x, \theta \rangle) (x')^\gamma dx' dx''.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 1.

Для функций $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p) g(p) dp &= \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\#[g](y) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx' dx'', \end{aligned} \quad (6)$$

первое из которых выполняется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ (в результате вращения (5)) с двойственным оператором

$$\mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\#[g](y) = C(\gamma)g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle), \quad y \in \mathbb{R}_{n+2m}^+, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \dots, \theta_m, 0, \theta''), \quad (7)$$

а второе справедливо в исходном евклидовом полупространстве $\mathbb{R}_n^+$ с двойственным оператором

$$K_{\gamma,\theta}^\# g(x) = \mathcal{P}_{x'}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)). \quad (8)$$

В теореме 1 определены виды общих двойственных операторов Радона—Киприянова.

Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n$ определим интегрированием по взвешанной сфере в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) &= \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) (x')^\gamma dx' dx'', \\ \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) &= \int_{S_1^+(n)} g(\Theta, \langle \Theta, x \rangle) \Theta^\gamma dS, \end{aligned}$$

где $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $(x')^\gamma = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}$,

$$\mathcal{K}_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx = \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_{x'}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) (\theta')^\gamma dS(\theta),$$

а $(\theta')^\gamma = \prod_{i=1}^m \theta_i^{\gamma_i}$.

Доказательство. Согласно равенству (6), имеем

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp (\theta')^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx' dx'' dS(\theta),$$

Теперь воспользуемся определением оператора $K_{\gamma,\theta}^\#$ формулой (8). Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp (\theta')^\gamma dS(\theta) = \\ &= \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) dx' dx'' dS(\theta) \end{aligned}$$

Функции f и g принадлежат пространству Л.Шварца. Поэтому можно изменить порядок интегрирования. Поменяв порядок интегрирования, получим утверждение доказываемой теоремы. $\square$

Отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}_\gamma^\#$ получен дополнительным интегрированием функции $K_{\gamma,\theta}^\# g(x)$ по полусфере $S_1^+(n)$, поэтому не зависит от вектора нормали к плоскости. Этим отличается от $K_{\gamma,\theta}^\#$ — двойственному преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n^+$ (первое из равенств в (1) и от оператора $\mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\#$ — двойственного к преобразованию Радона—Киприянова, полученного вращением, которое приводит к интегрированию по $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ (второе из равенств в (1)).

3 Заключение

Использование общего оператора, двойственного к преобразованию Радона-Киприянова, позволяет рассмотреть решение задач, связанных с обращением преобразования Радона-Киприянова, что может быть использовано при решении большого класса задач. Заметим, что данная работа является обобщением результатов, часть которых получена ранее в [6].

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. *О преобразованиях Фурье, Фурье–Бесселя и Радона.* // Докл. АН СССР. 1998. V. 360, N. 2. С. 157–160.
2. Левитан Б.М. *Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя.* // УМН. 1951. Т. 6, N. 2. С. 102–143.
3. Ляхов Л.Н. *Преобразование Киприянова–Радона.* // Тр. МИАН. 2005. Т. 248. С. 153–163.
4. Наттерер Ф. *Математические основы компьютерной томографии.* М.: Мир. 1990.
5. Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука. 1997.
6. Kalitvin V.A., Lapshina M.G. *Radon–Kipriyanov Transform of Laplace Series by Weight Spherical Functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023 Vol. 44, No. 8. P. 3323–3330. DOI 10.1134/S1995080223080231.
5. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи (М.: Наука. 1997.)
6. Kalitvin V.A., Lapshina M.G. *Radon–Kipriyanov Transform of Laplace Series by Weight Spherical Functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 8, pp. 3323–3330. – 2023. – Т. 44, № 8. – С. 3323–3330. – DOI 10.1134/S1995080223080231. – EDN XHKVSC.