УДК 517.968.7

## ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ СО СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕЙ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

**А. П. Шилин**
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения являются постоянными. Особенность уравнения в том, что наряду с гиперсингулярными интегралами оно содержит регулярные интегралы с комплексно-сопряженной искомой функцией. Сначала уравнение сводится к смешанной краевой задаче Римана–Гильберта для аналитических функций. После решения задачи Римана–Гильберта решаются линейные дифференциальные уравнения с дополнительными условиями. Указываются в явном виде условия разрешимости исходного уравнения. При их выполнении решение дается в замкнутой форме. Приводится пример.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; задача Римана–Гильберта.

## INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION RELATED TO THE MIXED RIEMANN–HILBERT PROBLEM

**A. P. Shilin**
e-mail: a.p.shilin@gmail.com

We consider a linear integro-differential equation on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation are constant. The peculiarity of the equation is that, along with hypersingular integrals, it contains regular integrals with the complex conjugate of the unknown function. The equation is first reduced to a mixed Riemann–Hilbert boundary value problem for analytic functions. After solving the Riemann–Hilbert problem, it is solved linear differential equations with additional conditions. Solvability conditions for the of the original equation are are defined in an explicit form. When they are satisfied, the solution is given in a closed form. An example is given.

Keywords: integro-differential equation; hypersingular integral; Riemann–Hilbert problem.

Mathematics Subject Classification (2020):Primary 45J05, Secondary 30E25.

# 1 Введение

Пусть $L$ — простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Обозначим $D_+$ и $D_-$ соответственно внутренность и внешность этой кривой. Зададим комплексные числа $a_k,\ b_k,\ k=\overline{0,n},\ n\in\mathbb{N},\ a_n\pm b_n\neq 0$. Зададим также $H$-непрерывную (т.е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $h(t),\ t\in L$. Искомой будет в дальнейшем $n$ раз $H$-непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t),\ t\in L$.

Для предельных значений на кривой $L$ интеграла типа Коши

$$\Phi_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z\in D_\pm,$$

и его производных справедливы полученные в [1] обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_\pm^{(k)}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}},\quad k=\overline{0,n},\quad t\in L,\tag{1}$$

частным случаем которых при $k = 0$ являются классические формулы Сохоцкого. Гиперсингулярные интегралы в формулах (1) понимаются в смысле конечной части по Адамару, что согласно [1] приводит для их вычисления к формулам

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} = \frac{\pi i \varphi^{(k)}(t)}{k!} + \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!}(\tau-t)^j}{(\tau-t)^{k+1}} d\tau,$$

в правых частях которых интегралы сходятся в обычном смысле. При $k = 0$ получится то же, что и для интеграла в смысле главного значения по Коши.

В [2] с использованием формул (1) решено в замкнутой форме уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \left( a_k \varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} \right) = h(t), \quad t \in L. \tag{2}$$

В настоящей работе укажем решение уравнения вида (2) в случае, когда в левую часть добавляются также регулярные интегралы с искомой функцией. В интегральных уравнениях с сингулярными интегралами подобные добавки (такие уравнения называются полными) совсем в немногих случаях позволяют получить точное аналитическое решение. Случаи решения уравнений с гиперсингулярными и регулярными интегралами ("полные гиперсингулярные уравнения"), видимо, вообще ранее не указывались. Отметим еще, что есть несколько работ (напр., [3–5]), в которых уравнение вида (2) решено для частных случаев переменных коэффициентов $a_k$, $b_k$.

## 2 Исходное уравнение и его связь с краевой задачей

Пусть теперь кривая $L$ расположена целиком либо выше, либо ниже действительной оси. Пусть также справедливы равенства

$$\operatorname{Im} a_k = \operatorname{Im} b_k, \quad k = \overline{0,n}. \tag{3}$$

Будем решать уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} \left( a_k \varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k k!}{\pi i} \left( \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau}-t)^{k+1}} \right) \right) = h(t), \quad t \in L. \tag{4}$$

где $\sigma$ — дуговая абсцисса кривой $L$ (натуральный параметр).

Обозначим $\overline{D_+}$ и $\overline{L}$ область и кривую, симметричные относительно действительной оси соответственно области $D_+$ и кривой $L$, а $D_c = D_- \setminus (\overline{L} \bigcup \overline{D_+})$ — область, обладающую симметрией относительно действительной оси. Введем функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{\overline{\tau} - z} = \begin{cases} \Psi_+(z), & z \in D_+, \\ \Psi_c(z), & z \in D_c. \end{cases}$$

Функция $\Psi_+(z)$ будет аналитической в области $D_+$, а функция $\Psi_c(z)$ будет аналитической в области $D_c$ и обладать там свойством симметрии $\Psi_c(z) = \overline{\Psi_c(\overline{z})}$. Для предельных значений $\Psi_+(t)$, $\Psi_c(t)$ этих функций и их производных можно записать формулы

$$\Psi_+^{(k)}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau}-t)^{k+1}}, \tag{5}$$

$$\Psi_c^{(k)}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau}-t)^{k+1}}, \quad k = \overline{0,n}, \tag{6}$$

которые получаются после использования обобщенных формул Сохоцкого (1) для интеграла с $\varphi(\tau)$ и дифференцирования под знаком интеграла регулярного интеграла с $\overline{\varphi(\tau)}$. Вычитая и складывая формулы (5) и (6), получим

$$\varphi^{(k)}(t) = \Psi_+^{(k)}(t) - \Psi_c^{(k)}(t), \tag{7}$$

$$\frac{k!}{\pi i} \left( \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\,\overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau}-t)^{k+1}} \right) = \Psi_+^{(k)}(t) + \Psi_c^{(k)}(t), \quad k = \overline{0,n},$$

что позволяет придать уравнению (4) вид краевой задачи для аналитических функций

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\left(\Psi_+^{(k)}(t)-\Psi_c^{(k)}(t)\right)+b_k\left(\Psi_+^{(k)}(t)+\Psi_c^{(k)}(t)\right)\right)=h(t),\quad t\in L,$$

или

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\,\Psi_+^{(k)}(t)-\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)\,\Psi_c^{(k)}(t)=h(t),\quad t\in L. \tag{8}$$

Первая сумма в левой части равенства (8) является предельным значением на кривой $L$ функции $Y_+(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\,\Psi_+^{(k)}(z)$, аналитической в $D_+$. Вторая сумма является предельным значением аналитической в $D_c$ функции $Y_c(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)\,\Psi_c^{(k)}(z)$, $Y_c(\infty)=0$. Учитывая тот факт, что дифференцирование сохраняет свойство симметрии функций, и принимая во внимание равенства (3), заключаем, что функция $Y_c(z)$ обладает свойством симметрии $Y_c(z)=\overline{Y_c(\overline{z})}$ относительно действительной оси. Краевая задача (8), которую теперь можно записать в виде

$$Y_+(t)-Y_c(t)=h(t),\quad t\in L,$$

относится к типу смешанных краевых задач Римана—Гильберта. Из результатов [6], где такая задача возникла и была решена в более общем виде, вытекает ее безусловная разрешимость, а также формулы единственного решения

$$Y_+(z)=H_+(z),\quad Y_c(z)=H_c(z),$$

в которых

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h(\tau)d\tau}{\tau-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{h(\tau)}\;\overline{(\tau'(\sigma))^2}d\tau}{\overline{\tau}-z}=\begin{cases}H_+(z), & z\in D_+,\\ H_c(z), & z\in D_c.\end{cases}$$

Если обозначить

$$H_-(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z\in D_-,$$

то можно будет в дальнейшем использовать формулу

$$H_c(z)=H_-(z)+\overline{H_-(\overline{z})},\quad z\in D_c. \tag{9}$$

Теперь следует решать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\,\Psi_+^{(k)}(z)=H_+(z),\quad z\in D_+, \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k-b_k)\,\Psi_c^{(k)}(z)=H_c(z),\quad z\in D_c,\quad \Psi_c(\infty)=0, \tag{11}$$

и в случае нахождения их решений воспользоваться формулой (7) при $k=0$:

$$\varphi(t)=\Psi_+(t)-\Psi_-(t),\quad t\in L. \tag{12}$$

## 3 Решение дифференциальных уравнений

Решение уравнения (10), полученное методом вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$\Psi_+(z)=\sum_{j=1}^{n}f_j(z)\left(C_j+\int_{z_0}^{z}\frac{W_j(\zeta)d\zeta}{W(\zeta)}\right) \tag{13}$$

и относится к классическим математическим результатам (напр., [7], с. 94). В формуле (13) $C_j\in\mathbb{C}$, функции $f_j(z)$, явный вид которых известен и здесь не приводится, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, $z_0\in D_+$, интегрирование ведется по любой кривой в области $D_+$, $W(\zeta)$ — вронскиан функций $f_j(\zeta)$, $W_j(\zeta)$ — определители, получаемые из $W(\zeta)$ заменой элементов $j$-го столбца на $0, 0, ..., 0, \frac{H_+(\zeta)}{a_n+b_n}$, $j = \overline{1,n}$. Отметим, что в частности, когда корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ соответствующего характеристического многочлена являются однократными, формулу (13) можно упростить (см. [8]):

$$\Psi_+(z) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j z} \left( C_j + \frac{(-1)^{n+1}}{(a_n+b_n)\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}(\lambda_m - \lambda_j)} \int_{z_0}^{z} e^{-\lambda_j \zeta} H_+(\zeta) d\zeta \right).$$

(При $n = 1$ произведение $\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{n}(\lambda_m - \lambda_j)$ следует заменить на 1.)

Решение уравнения (11) требует более подробных рассуждений. Пусть $\gamma_k$ — действительные корни характеристического многочлена этого уравнения, имеющие соответствующие кратности $m_k$, $k = \overline{1,m}$, а $\alpha_k \pm i\beta_k$ ($\beta_k > 0$) — пары комплексно-сопряженных корней характеристического многочлена, имеющие соответствующие кратности $s_k$, $k = \overline{1,l}$, $\sum_{k=1}^{m} m_k + 2\sum_{k=1}^{l} s_k = n$. Тогда фундаментальную систему решений однородного уравнения (11) образуют функции

$$z^p e^{\gamma_k z},\ p = \overline{0, m_k - 1},\ k = \overline{1,m};\ z^q e^{\alpha_k z}\cos\beta_k z,\ z^q e^{\alpha_k z}\sin\beta_k z,\ q = \overline{0, s_k - 1},\ k = \overline{1,l}. \tag{14}$$

Все эти функции обладают свойством симметрии в $\mathbb{C}$ относительно действительной оси и имеют существенно особую точку на бесконечности. Для дальнейшего как-либо занумеруем все эти функции и будем обозначать $g_j(z)$, $j = \overline{1,n}$. Из-за линейной независимости этих функций всякая линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^{n} R_j g_j(z)$$

будет также иметь на бесконечности существенно особую точку при ненулевом наборе значений действительных постоянных $R_j$. Следовательно, однородное уравнение (11) имеет лишь нулевое решение, а ненулевым может оказаться разве что частное решение неоднородного уравнения. Это частное решение записывается по формуле

$$\Psi_c(z) = \sum_{j=1}^{n} g_j(z) \left( R_j + \int_0^z \frac{U_j(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)} \right), \tag{15}$$

аналогичной формуле (13), где действительные постоянные $R_j$ подлежат нахождению. В формуле (15) $U(\zeta)$ — вронскиан функций $g_j(\zeta)$, а $U_j(\zeta)$ — определители, получаемые из $U(\zeta)$ заменой элементов $j$-го столбца на $0, 0, ..., 0, \frac{H_c(\zeta)}{a_n-b_n}$, $j = \overline{1,n}$. Интегрирование в формуле (15) происходит по любой кривой, принадлежащей области $D_c$. В отличие от интегралов в (13), где интегрирование ведется по кривым в конечной односвязной области и приводит к однозначным функциям, здесь кривые интегрирования принадлежат бесконечной двусвязной области, поэтому следует наложить ограничения, приводящие к однозначности функции $\Psi_c(z)$. Такими ограничениями будут требования выполнения условий

$$\int_L \frac{U_j(t)dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

$$\int_{\overline{L}} \frac{U_j(t)dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{17}$$

С учетом (9) равенствам (16) придадим вид

$$\int_L \frac{(H_-(t) + \overline{H_-(\overline{t})})M_j(t)dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{18}$$

где $M_j(t)$ — миноры определителей $U_j(t)$, полученные из них вычеркиванием $j$-го столбца и $n$-ой строки. (При $n = 1$ следует брать $M_1(t) = 1$.) Поскольку элементы определителей $M_j(z)$ и

$U(z)$ состоят из симметричных функций вида (14), то функции $\frac{M_j(z)}{U(z)}$ будут аналитическими в $\mathbb{C}$ и удовлетворять там условию симметрии. Равенства

$$\int_L \frac{\overline{H_-(\overline{t})} M_j(t)dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

справедливы согласно интегральной теореме Коши, поскольку подынтегральные функции аналитически продолжимы в области $D_+$. Для выполнения равенств (18) теперь требуется, чтобы

$$\int_L \frac{H_-(t) M_j(t)dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

что, очевидно, равносильно равенствам

$$\mathrm{res}_{z=\infty} \frac{H_-(z) M_j(z)}{U(z)} = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Аналогично будет получаться, что равенства (17) сводятся к равенствам

$$\mathrm{res}_{z=\infty} \frac{\overline{H_-(\overline{z})}\; \overline{M_j(\overline{z})}}{\overline{U(\overline{z})}} = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Так как вычеты на бесконечности функций $\frac{H_-(z)M_j(z)}{U(z)}$ и $\frac{\overline{H_-(\overline{z})}\;\overline{M_j(\overline{z})}}{\overline{U(\overline{z})}}$ являются комплексно-сопряженными числами, то равенства (19) и (20) окажутся равносильными. Итак, для однозначности функций (15) необходимо и достаточно выполнения условий (19), что мы будем в дальнейшем предполагать. Отметим еще, что первообразные в формуле (15) в виде $\int_0^z$ от симметричных функций сами являются симметричными функциями.

Осталось добиться у функции (15) аналитичности на бесконечности с условием $\Psi_c(\infty) = 0$. Для этого разложим функцию (15) в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем к нулю соответствующие коэффициенты. В результате придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных $R_j$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} R_j = \beta_k, \quad k = 1,2,3,..., \tag{21}$$

где

$$\alpha_{kj} = \int_{|t|=\rho} \frac{g_j(t)dt}{t^k}, \quad \beta_k = -\sum_{j=1}^{n} \int_{|t|=\rho} \frac{g_j(t)dt}{t^k} \int_0^t \frac{U_j(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)},$$

$\rho$ — достаточно большое положительное число.

Не будем останавливаться на несложном обосновании того, что ранг бесконечной матрицы системы (21) равен $n$: ее минор хотя бы из первых $n$ строк уже будет отличен от нуля. Следовательно, система имеет не более одного решения.

## 4 Формулировка результата. Пример

Теперь может быть сформулирован результат исследования.

**Теорема.** *Для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (19) и была совместна система (21). Если эти условия выполняются, то искомая функция вычисляется по формуле*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \left( f_j(t) \left( C_j + \int_{z_0}^{t} \frac{W_j(\zeta)d\zeta}{W(\zeta)} \right) - g_j(t) \left( R_j + \int_0^t \frac{U_j(\zeta)d\zeta}{U(\zeta)} \right) \right),$$

*где $C_j$ — произвольные комплексные постоянные, а действительные постоянные $R_j$ являются решением системы (21).*

Приведем пример уравнения (4) в случае $n = 1$, $i \in D_+$:

$$(4-i)\varphi(t) + \left(\frac{3}{2} + i\right)\varphi'(t) + \frac{2-i}{\pi i}\left( \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\;\overline{(\tau'(\sigma))^2}d\tau}{\overline{\tau} - t} \right) +$$

$$+\frac{1+2i}{2\pi i}\left(\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\;\overline{(\tau'(\sigma))^2}d\tau}{(\overline{\tau}-t)^2}\right) = \frac{2it+2-i}{2(t-i)^2}, \quad t \in L.$$

Без вычисления квадратур несложно найти представление

$$\frac{2it+2-i}{2(t-i)^2} = \frac{2it-2-i}{2(t+i)^2} - \frac{2(t^2-t+1)}{(t^2+1)^2},$$

и тогда, очевидно,

$$H_+(t) = \frac{2it-2-i}{2(t+i)^2}, \quad H_c(t) = \frac{2(t^2-t+1)}{(t^2+1)^2}.$$

Уравнение (10) принимает вид

$$(2+2i)\Psi_+'(z) + (6-2i)\Psi_+(z) = \frac{2iz-2-i}{2(z+i)^2},$$

или

$$\Psi_+'(z) + (1-2i)\Psi_+(z) = \frac{2iz-2-i}{4(1+i)(z+i)^2},$$

откуда

$$\Psi_+(z) = e^{(2i-1)z}\left(\int_{z_0}^{z} \frac{(2i\zeta-2-i)e^{(1-2i)\zeta}d\zeta}{4(1+i)(\zeta+i)^2} + C\right), \quad C \in \mathbb{C}.$$

Уравнение (11) примет вид

$$\Psi_c'(z) + 2\Psi_c(z) = \frac{2(z^2-z+1)}{(z^2+1)^2}$$

и имеет решение

$$\Psi_c(z) = e^{-2z}\left(\int_0^z \frac{2(\zeta^2-\zeta+1)e^{2\zeta}d\zeta}{(\zeta^2+1)^2} + R\right), \quad R \in \mathbb{R}.$$

Последний интеграл удается вычислить:

$$\int_0^z \frac{2(\zeta^2-\zeta+1)e^{2\zeta}d\zeta}{(\zeta^2+1)^2} = \frac{e^{2z}}{z^2+1} - 1,$$

поэтому

$$\Psi_c(z) = \frac{1}{z^2+1} + (R-1)e^{-2z}.$$

Полагая $R=1$, получаем решение $\Psi_c(z) = \frac{1}{z^2+1}$ с условием $\Psi_c(\infty) = 0$. Из-за возможной единственности такого решения записывать и анализировать систему вида (21) здесь не требуется. Окончательно получим в примере

$$\varphi(t) = e^{(2i-1)t}\left(\int_{z_0}^{t} \frac{(2i\zeta-2-i)e^{(1-2i)\zeta}d\zeta}{4(1+i)(\zeta+i)^2} + C\right) - \frac{1}{t^2+1}.$$

## 5 Заключительные замечания

Отметим любопытный факт. Если в линейном уравнении наряду с искомой функцией содержится ее комплексно-сопряженное значение, то произвольные постоянные, входящие в решение, являются обычно действительными, поскольку в этом случае линейная независимость решений однородного уравнения понимается над полем действительных чисел. Произвольные постоянные, входящие в решение уравнения (4), остаются комплексными, поскольку в формуле (12) они содержатся лишь в $\Psi_+(t)$. При $t \in L$ будет $\overline{t} \in D_-$ и по свойству интегралов Коши получится

$$\int_L \frac{\overline{\Psi_+(\tau)}\;\overline{(\tau'(\sigma))^2}d\tau}{(\overline{\tau}-t)^{k+1}} = \overline{\int_L \frac{\Psi_+(\tau)d\tau}{(\tau-\overline{t})^{k+1}}} = 0.$$

В результате окажется, что слагаемые с $\overline{\varphi(\tau)}$, содержащиеся в уравнении, не влияют на слагаемые с произвольными комплексными постоянными, содержащимися в формуле (12) для решения. Отметим еще, что наличие $H$-непрерывных производных до порядка $n$ включительно у функций $\Psi_+(t)$ и $\Psi_c(t)$ (а тогда и у искомой функции $\varphi(t)$) обосновывается несложно и вполне аналогично [4].

**Литература**

1. Зверович, Э. И. *Обобщение формул Сохоцкого* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 24–28.

2. Зверович, Э. И. *Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2010. Т. 54, № 6. С. 5–8.

3. Зверович, Э. И., Шилин, А. П. *Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2018. Т. 54, № 4. С. 404–407. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407

4. Шилин, А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58, № 4. С. 358–369. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369

5. Shilin, A. P. *Hypersingular Integro-Differential Equation Containing Polynomials and Their Derivativts in Coefficients* // Mathematics. 2023. MDPI. V. 11(24). P.1–19. https://doi.org/10.3390/math11244940

6. Шилин, А. П. *Сингулярное интегральное уравнение с сопряжением в регулярной части* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1998. № 3. С. 52–54.

7. Камке, Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, 6-е издание. СПб.: Лань, 2003.

8. Шилин, А. П. *Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах* // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56