УДК 539.42

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ГРАДИЕНТНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В. А. Нифагин[1], **О. В. Дубровина**[2]
e-mails: [1]nifagin@bsu.by, [2]doubrovinaov@bsu.by

Для оценки локальных механических свойств в окрестности вершины трещины общего вида в рамках градиентной теории пластичности на стадии квазистатического роста линейной трещины при плоской деформации сформулирована краевая задача в неголономной постановке с нелинейным упрочнением в производных тензоров напряжений и деформаций. Получены полные решения асимптотическим методом возмущений. Математическая формулировка основана на редукции краевой задачи к задаче о собственных значениях для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Исследовано перераспределение полей напряжений и деформаций в пластической области при квазистатическом росте трещины для сверхтонкой и промежуточной структуры. Найдена форма пластических зон. Даны оценки сингулярностей полей характеристик на каждом этапе метода. Получены условия корректности математической постановки краевых задач.

Ключевые слова: распространение докритической трещины; напряженно-деформированное состояние; метод асимптотических разложений; энергетический интегральный инвариант; корректность краевой задачи.

METHOD OF PERTURBATIONS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF GRADIENT FRACTURE MECHANICS

V. A. Nifagin[1], **O. V. Doubrovina**[2]
e-mail: [1]nifagin@bsu.by, [2]doubrovinaov@bsu.by

To estimate local mechanical properties in the neighbourhood of the crack tip of general form in the framework of the gradient theory of plasticity at the stage of quasi-static growth of a linear crack under plane deformation, a boundary value problem in nonholonomic formulation with nonlinear hardening in the derivatives of stress and strain tensors is formulated. Complete solutions are obtained by the asymptotic perturbation method. The mathematical formulation is based on the reduction of the boundary value problem to the problem of eigenvalues for a system of ordinary nonlinear differential equations. The redistribution of stress and strain fields in the plastic region at quasi-static crack growth is investigated for superfine and intermediate structure. The shape of plastic zones is found. Estimates of singularities of characteristic fields at each stage of the method are given. Conditions of correctness of mathematical formulation of boundary value problems are obtained.

Keywords: pre-critical crack propagation; stress-strain state; asymptotic expansion method; energy integral invariant; boundary value correctness.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 74R10, Secondary 34E10.

1 Введение

Важным направлением современной механики разрушения является изучение асимптотических разложений упругопластических полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины, которое активно развивается благодаря работам, которые фокусируются на аналитических, численных и гибридных подходах, связанных с описанием поведения материалов в нелинейной среде. Среди важнейших представлены:

1. Асимптотические разложения для оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) в упругопластических средах. Модель Хатчинсона-Райса-Розенгрэна (HRR). В работах [1–3] были заложены основы асимптотического анализа в окрестности вершины трещины в упругопластических

материалах (нелинейная упругость). Основной вывод: поля напряжений и перемещений вблизи вершины трещины имеют степенные зависимости от расстояния до вершины трещины. В дальнейшем классическая модель HRR получила развитие для материалов с усложненной зависимостью напряжений от деформаций, а также за счет учета многослойных структур (например, композитов) и анизотропных материалов, что потребовало новых подходов к выводу асимптотических формул.

2. Энергетические критерии разрушения и асимптотические оценки. J-интеграл Черепанова–Райса [4, 5]. Введение J-интеграла как меры изменения энергии в области с трещиной. Доказательство инвариантности энергетического интеграла для нелинейно упругопластических материалов и его тесной связи с асимптотическими разложениями НДС.

3. Градиентные модели пластичности (неголономные определяющие соотношения). Современные исследования показывают, что традиционные модели HRR могут быть расширены за счет введения градиентной пластичности. Это позволяет более точно описывать поведение напряжений вблизи вершины трещины, где локализация пластических деформаций наиболее выражена [6, 7].

4. Численные методы анализа окрестности вершины трещины. Конечные элементы с особенностями. Методы конечных элементов (МКЭ) для задач механики разрушения часто используют специальные функции формы (конечные элементы с особенностями), которые описывают особенности НДС вблизи вершины трещины. Например, элементы типа “singularity elements”, учитывающие зависимость $r^{-\alpha}$ [10–12].

5. Гибридные методы, использующие совмещение аналитических асимптотических решений с численными методами. Так аналитические решения используются для задания граничных условий, а численные методы уточняют поля напряжений и перемещений вблизи трещины [6–8].

6. Многоосные нагрузки. Актуальность получили исследования полей напряжений и перемещений для материалов, подвергающихся сложным нагружениям (например, комбинации растяжения и сдвига). А также трещины в анизотропных и гетерогенных материалах. Сюда относятся задачи об аналитических разложениях для материалов с анизотропными свойствами. Например, для композитов, усиленных волокнами и материалов с градиентными механическими характеристиками [13].

7. Влияние микроструктуры на НДС. Отдельная область исследований занимается рассмотрением микроструктурных моделей (например, учетом пор и дефектов) для уточнения асимптотических разложений [14].

Таким образом, асимптотические разложения вблизи вершины трещины дают глубокое понимание локального поведения материалов, что критично для прогнозирования роста трещин. Энергетические подходы, такие как применение J-интеграла, остаются центральным инструментом, а современные численные методы продолжают уточнять эти модели для сложных материалов и условий.

2 Метод возмущений в градиентной теории пластичности

Анализ напряженно-деформированного состояния упругопластического материала является существенно более сложной в математическом плане задачей, чем аналогичные задачи линейной и нелинейной упругости. К числу основных осложняющих факторов относятся нелинейность диаграммы деформирования материала в зоне активного нагружения, возникновение зон упругой разгрузки, границы разделов которых неизвестны и требуют нахождения, многоэтапность развития упругопластических деформаций и, наконец, инкрементальный характер определяющих соотношений теории пластичности. Последний фактор является наиболее существенным, поскольку исключает при сложных траекториях нагружения возможность формулировки краевой задачи непосредственно для конечных значений внешних усилий и перемещений. Поэтому многие известные решения краевых задач для упрочняющихся тел были получены численно в рамках итерационного метода, предполагающего прослеживание развития пластических зон в теле на основе последовательного наращивания параметра нагружения, посредством достаточно малого его изменения или прямых численных схем.

Для учета эффектов истории нагружения, нелинейного упрочнения, Баушингера рассмотрим краевую задачу математической теории пластичности в градиентной постановке [6]. Полагаем, что сплошная упругопластическая среда, занимающая объем $D \in E_2$ с границей Γ удовлетворяет уравнениям равновесия в напряжениях внутри плоского тела и условиям на ее границе

$$\sigma_{ij,j} + P_i = 0, \;\; \sigma_{ij} n_j = T_i, \;\; i,j = 1,2, \;\; P_i = P_i\left(x,\lambda\right), \;\; T_i = T_i\left(x,\lambda\right) \in \Gamma, \tag{1}$$

здесь P_i, T_i — заданные компоненты массовых и поверхностных сил, $\overline{n} = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ, λ — параметр нагружения. Суммирование производится по повторяющимся индексам. Внешние нагрузки задаются удовлетворяющими условиям равновесия тела в целом $\int P_i dS = \int T_i d\Gamma$, где $dS = dx_1 dx_2$ — мера объема, $d\Gamma$ — мера граничной линии Γ, соответственно.

Определяющие соотношения теории течения с упрочнением

$$\begin{gathered} K\varepsilon = \sigma, \;\; 2Ge_{ij} = s_{ij} + p_{ij}, \;\; p_{ij} = \int\limits_0^t s_{ij} dF\left(Q\right), \;\; Q = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \\ \varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}, \;\; e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \;\; \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \;\; s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \end{gathered} \tag{2}$$

где ε, σ — средние деформация и напряжение, e_{ij}, s_{ij} — девиаторы деформаций и напряжений, Q — квадрат интенсивности касательных напряжений, K, G — материальные постоянные, F — заданная функция напряжения.

Оставаясь в рамках математической теории пластичности с малыми деформациями, тензор деформаций полагаем линейным

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}; \;\; \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi,\varphi}}{r} + \frac{u_r}{r}; \;\; \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(u_{\varphi,r} + \frac{u_{r,\varphi}}{r} - \frac{u_\varphi}{r}\right), \tag{3}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений точек деформируемого тела.

В [8] предложено решение статической упругопластической задачи с угловой точкой. Поскольку связь между напряжениями и деформациями является неголономной, то решение фундаментальной задачи пластичности в общем случае должно строиться на основе вспомогательных задач в приращениях. Если процесс внешнего нагружения является в достаточной мере гладким, а переход от упругой работы материала к пластической — плавным, то в силу вступает приближенный аналитический метод решения, основанный на представлении напряжений и деформаций в виде рядов по параметру нагружения. Была представлена реализация этого метода применительно к теории изотропного упрочнения для несжимаемого материала. Тогда внешние нагрузки изменяются с ростом параметра нагружения λ:

$$T_i = \sum_{n=1} T_i^{(n)} \lambda^n, \quad P_i = \sum_{n=1} P_i^{(n)} \lambda^n. \tag{4}$$

В качестве параметра нагружения может быть взято характерное внешнее усилие, или отношение к модулю сдвига в соответствии с представлением. Следовательно, и решение задачи для перемещений ищется в виде:

$$u_i(x) = \sum_{n=1} u_i^{(n)} \lambda^n, \;\; \sigma_{ij} = \sum_{n=1} \sigma_{ij}^{(n)}(x) \lambda^n. \tag{5}$$

Предполагаем также, что функция F в (2) разлагается в сходящейся области изменения Q степенной ряд $F = \sum\limits_{m=1} c_m Q^m$, где для Q имеет место разложение $Q = \sum\limits_{n=2} Q^{(n)} \lambda^n$,

$$Q^{(n)} = \sum_{\alpha+\beta=n} s_{ij}^\alpha s_{ij}^\beta. \tag{6}$$

Так что

$$\begin{gathered} Q^{(m)} = \sum_{n=2m} Q^{(mn)} \lambda^n, \;\; Q^{(mn)} = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} Q^{(n_1)} \ldots Q^{(n_m)} \lambda^n, \\ F = F_0 + \sum_{n=2} \psi^{(n)} \lambda^n, \;\; \psi^{(n)} = \sum_{m=1} c_n Q^{(mn)}. \end{gathered} \tag{7}$$

Из (6), (7) следуют выражения для коэффициентов разложения (2)

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha+\beta=n} \beta \psi^{(\beta)} s_{ij}^{(n)}, \quad n \geq 3. \tag{8}$$

Затем подставляя (4), (5) в (1) получим следующие уравнения и граничные условия на каждом этапе метода

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + P_i^{(n)} = 0, \;\; \sigma_{ij}^{(n)} n_j = T_i^{(n)}, \;\; i,j = 1,2. \tag{9}$$

Подставляя (4), (5) в (2) и (3) с учетом (8), находим определяющие соотношения на каждом этапе.

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} = 2G\varepsilon_{ij}^{(n)} + (K - 2G)\,\varepsilon^{(n)}\delta_{ij} - p_{ij}^{(n)}, \;\; \varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(u_{j,i}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}\right); \;\; \varepsilon^{(n)} = \frac{1}{3}u_{k,k}^{(n)}. \tag{10}$$

Таким образом, из (9) и (10) вытекает граничная задача для $n \geq 3$ ($p_{ij}^{(n)} = 0$, $n = 1,2$):

$$\begin{gathered} -A_{ij}u_j^{(n)} = P_i^{(n)} - p_{ij,j}^{(n)}; \quad A_{ij} = G\delta_{ij}\Delta + \frac{1}{3}(K+G)\,(\cdot)_{,ij}\,, \\ B_{ij}u_j^{(n)} = T_j^{(n)} + p_{ij}^{(n)}n_j; \;\; B_{ij} = G\left(\delta_{ij}n_k\,(\cdot)_{,k} + n_j\,(\cdot)_{,i}\right) + \frac{1}{3}(K-2G)\,n_i\,(\cdot)_{,j}\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Решения представимые в виде рядов (5) сходятся, по крайней мере асимптотически, для малых значений λ. Это означает, что коэффициенты разложений (5) растут не быстрее, чем это требуется для сходимости рядов решений в методе разложения по параметру нагружения. В работе [6] исследовались решения на уровне сверхтонкой структуры, когда отыскивался главный член асимптотического разложения напряжений и деформаций для трещины общего вида, причем этот член был нелинейным. В работе [7] рассматривалось асимптотическое решение задачи о квазистационарном росте трещины для важных частных случаев в упругопластическом материале в рамках теории течения с квадратичным упрочнением. Такой подход позволил оценить локальные характеристики макроскопического разрушения, такие как порядок сингулярностей для малой окрестности вершины ($r \to 0$), включая поведение решений на разных этапах в областях сверхтонкой и промежуточной структуры окрестности вершины. Получение математически строгих решений, учитывающих комплекс осложняющих эффектов упругопластического деформирования было ориентировано на рассмотрение краевых задач механики разрушения для фиксированных и распространяющихся трещин, которые составляют базу исследований практически важных плоских задач.

3 Краевая задача о полной асимптотике полей напряжений и деформаций в окрестности вершины распространяющейся трещины общего вида

Рассмотрим задачу о распространяющейся трещине общего вида при условиях плоской деформации [6]. Математическая постановка сводится к задаче на собственные значения дифференциального оператора 4-го порядка и обратной задаче интегральной геометрии для энергетического инварианта. Линейная трещина продвигается в стационарном режиме, так что поля напряжений и деформаций не зависят явным образом от параметра нагружения. Ищем решение граничной задачи для упругопластического материала с конечной трещиной под действием растягивающего на бесконечности постоянного напряжения P и неравномерного распределения напряжений в окрестности трещины.

Построим асимптотику напряжений для случая плоской деформации на основе метода возмущений, описанного в разделе 2.

Декартову систему координат ξ_i $(i = 1,2)$ отнесем к концу трещины, нормируя переменные

$$x_1 = \frac{(\xi_1 - l)\,G^2}{K^2}, \;\; x_2 = \frac{\xi_2 G^2}{K^2}, \;\; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \;\; \varphi = arctg\frac{x_2}{x_1},$$

где $k = P\sqrt{\pi l}$, здесь P — нагрузка, приложенная на бесконечности, $2l$ — длина трещины.

Начало подвижной полярной системы координат (O, r, φ) поместим в вершину трещины. Страгивается вершина трещины вместе с сопутствующей системой координат (O, r_1, φ_1). При этом ориентация площадки, на которой рассматривается изменение напряжений, остается фиксированной и координаты вектора нормали к этой площадке не изменяются при перемещении начала координат вместе с вершиной трещины. Однако, отметим, что координаты вектора нормали к этой площадке меняются при перемещении полюса O в точку O_1, т.е. являются функцией длины трещины. Этот необходимо учитывать при выборе представлений разложений напряжений и перемещений.

Рассмотрим некоторую функцию $\zeta(l, r, \varphi)$. Пусть производная по длине представляется формулой $\dot{\zeta}\,(r(l), \varphi(l)) = -\zeta_{,r}\cos\varphi + \zeta_{,\varphi}\dfrac{\sin\varphi}{r}$.

Под производной напряжений по длине в полярной системе координат понимается величина $\dot{\sigma}_{ij}(l,r,\varphi)=\lim\limits_{\delta l\to 0}\dfrac{\sigma_{ij}(l+\delta l,r_1,\varphi_1)-\sigma_{ij}(l,r,\varphi)}{\delta l}$, $i,j=r,\varphi$.

Функцию $\sigma_{ij}(l+\delta l,r_1,\varphi_1)$ понимаем в виде линейной асимптотики δl: $\sigma_{ij}(l+\delta l,r_1,\varphi_1)=\sigma_{ij}(l,r,\varphi)+\dot{\sigma}_{ij}(l,r,\varphi)\cdot\delta l+O\left(\delta l^2\right)$.

В отличие от статического случая, решение задачи о докритическом росте ищется в виде рядов по параметру приращения длины для производных напряжений по длине. Также, область пластического деформирования может быть разделена на зоны активного нагружения и разгрузки, которые требуют сращивания решений на линии раздела.

Рассматривается несжимаемый материал при квадратичном законе упрочнения под действием равномерно распределенной нагрузки на бесконечности для трещины общего вида. Для плоского деформированного состояния в полярной системе координат используются стандартные соотношения, связывающие среднее давление и компоненты тензоров и девиаторов напряжений и деформаций:

$$\varepsilon_{zz}=0,\ \ \varepsilon_{ij}=e_{ij},\ \ e_{rr}+e_{zz}=0,\ \ s_{rr}+s_{\varphi\varphi}=0,\ \ \sigma=\tfrac{1}{2}(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}),\ \ s_{rr}=\tfrac{1}{2}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}),$$
$$s_{\varphi\varphi}=\tfrac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}),\ \ s_{r\varphi}=\sigma_{r\varphi}.$$

Уравнение совместности деформаций в производных деформаций по длине имеет вид:

$$2\left(r\dot{e}_{r\varphi,\varphi}\right)_{,r}=\dot{e}_{rr,\varphi\varphi}-r\dot{e}_{rr,r}+r\left(r\dot{e}_{\varphi\varphi}\right)_{,rr}. \tag{12}$$

тогда переходя в определяющих соотношениях неголономной теории пластичности, учитывающих наличие зоны активного нагружения и зоны разгрузки, от приращений к производным по длине трещины, получим:

$$\dot{e}_{rr}=\dot{s}_{rr}+\mu\dot{F}(T)s_{rr},\ \ \dot{e}_{r\varphi}=\dot{s}_{r\varphi}+\mu\dot{F}(T)s_{r\varphi},\ \ \dot{e}_{\varphi\varphi}=\dot{s}_{\varphi\varphi}+\mu\dot{F}(T)s_{\varphi\varphi} \tag{13}$$

при $\mu=\vartheta\left(\dfrac{G}{M}-1\right)$, $\vartheta=\begin{cases}1, & \delta T\geq 0,\\ 0, & \delta T<0.\end{cases}$ где M — модуль упрочнения, $F(T)=\dfrac{A_3}{2}\left(s_{rr}^2+s_{\varphi\varphi}^2+2s_{r\varphi}^2\right)$ — квадратичная функция интенсивности касательных напряжений, $A_3=2A_2$, где A_2 — постоянная материала, характеризующая нелинейность диаграммы деформирования, определяемая, например, из опыта на простое растяжение.

Краевая задача формулируется из условий свободных от усилий поверхностей трещины и условий симметрии. Тогда в производных по длине трещины имеем:

$$\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\pi}=0,\ \ \dot{\sigma}_{r\varphi}|_{\varphi=\pi}=0,\ \ \dot{\sigma}_{r\varphi}|_{\varphi=-\pi}=0,\ \ \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}|_{\varphi=-\pi}=0, \tag{14}$$

где σ_{ij} — безразмерные компоненты тензора напряжений, отнесенные к сдвиговому модулю G.

Введем функцию напряжений $\Phi(r,\varphi)$ в виде полного разложения по параметру нагружения Λ в окрестности особой точки $\Phi(r,\varphi)=\sum\limits_{k\leq 0}\psi_k(\varphi)r^{\lambda_k}$, причем r и φ являются функциями длины трещины, а Λ содержится в них неявно.

Опуская для простоты представления функции упрочнения, напряжений и девиаторов деформаций в области активного нагружения, приведем для произвольного приближения из уравнения совместности деформаций вид рекуррентной последовательности краевых задач о собственных значениях.

$$\begin{gathered}
\sum_{k\geq 0}(2(-(\lambda_k-2)(1-\lambda_k)(\psi_k''\cos(\varphi)-\psi_k'\sin(\phi))+(1-\lambda_k)(\psi_k'''\sin(\varphi)+\psi_k''\cos(\phi)))+\\
+2(\lambda_k-3)(-(\lambda_k-2)(1-\lambda_k)(\psi_k''\cos(\varphi)-\psi_k'\sin(\varphi))+(1-\lambda_k)(\psi_k'''\sin(\varphi)+\psi_k''\cos(\varphi)))-\\
-\tfrac{1}{2}((\psi^{(4)}{}_k+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k''-(\lambda_k-2)((\psi^{(4)}{}_k+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k''))\cos(\varphi)-(\psi_k'''\lambda_k(2-\lambda_k)\times\\
\times\psi_k'-(\lambda_k-2)((\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi)+(\psi_k^{(5)}+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k'''-\psi_k'''+\\
+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi)+(\psi_k^{(4)}+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k''-\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)\cos(\varphi)))+\\
+\tfrac{1}{2}(\lambda_k-3)(-(\lambda_k-2)(\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)\cos(\varphi)+(\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi))-\\
-(\lambda_k-3)((\lambda_k-2)(\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)\cos(\phi)-(\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi))-\\
-\frac{1}{2}(\lambda_k-3)(\lambda_k-4)((\lambda_k-2)(\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)\cos(\varphi)-(\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi)))r^{\lambda_k-3}+
\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
+\frac{\mu}{2}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0} 2(((-(\lambda_k+\lambda_l-4)(a'_{kl}\cos(\varphi)-a_{kl}\sin(\varphi))+(a''_{kl}\sin(\varphi)++a'_{kl}\cos(\varphi)))\times \\
\times(1-\lambda_m)\psi'_m+(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+a'_{kl}\sin(\varphi))(1-\lambda_m)\psi''_m)+2(\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7)\times \\
\times(((4-\lambda_k-\lambda_l)(a'_{kl}\cos(\varphi)-a_{kl}sin(\varphi))+(a''_{kl}\sin(\phi)+a'_{kl}\cos(\varphi)))(1-\lambda_m)\psi'_m+ \\
+(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+a'_{kl}\sin(\varphi))(1-\lambda_m)\psi''_m)-1/2((-(\lambda_k+\lambda_l-4)(a''_{kl}\cos(\varphi)- \\
-2a'_{kl}\sin(\varphi)-a_{kl}\cos(\varphi))+(a'''_{kl}\sin(\varphi)+2a''_{kl}\cos(\varphi)-a'_{kl}\sin(\varphi)))(\psi''_m+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m)+ \\
\\
+(-(\lambda_k+\lambda_l-4)(a'_{kl}\cos(\varphi)-a_{kl}\sin(\varphi))+(a''_{kl}\sin(\varphi)+a'_{kl}\cos(\varphi)))(\psi'''_m+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi'_m)+ \\
+(-(\lambda_k+\lambda_l-4)(a'_{kl}\cos(\varphi)-a_{kl}\sin(\varphi))+(a''_{kl}\sin(\varphi)+a'_{kl}\cos(\varphi)))(\psi'''_m+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi'_m)+ \\
+(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+a'_{kl}\sin(\varphi))({\psi^{(4)}}_m+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi''_m))+ \\
+\tfrac{1}{2}(\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7)(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+a'_{kl}\sin(\varphi))(\psi''_m+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m) \\
-(\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7)((\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)-a'_{kl}\sin(\varphi))(\psi''_m+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m) \\
-\tfrac{1}{2}(\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7)(\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-8)\times((\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}cos(\varphi)-a'_{kl}\sin(\varphi))\times \\
\times(\psi''_m+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m))r^{\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7}=0.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

с граничными условиями

$$
\psi_n|_{\varphi=\pi}=0,\ \ \psi'_n|_{\varphi=\pi}=0,\ \ \psi_n|_{\varphi=-\pi}=0,\ \ \psi'_n|_{\varphi=-\pi}=0,\ \ \psi''_n|_{\varphi=\pi}=0. \tag{16}
$$

Применяемый вариант метода возмущений предполагает, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($\lambda_{k+1}>\lambda_k>0$) подлежит определению наряду с функциями $\psi_k(\varphi)$. Для начала ведется поиск значения параметра λ_0, соответствующего нетривиальному решению, и функции ψ_0 на промежутке $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Когда нелинейный член асимптотики строится на основе линейного, то для разрешимости указанных задач должны выполняться дополнительные условия, возникающие из-за того, что функции $a_{klm}(\varphi)$ зависят от $\psi_n(\varphi)$ с индексами $\min\{k,l,m\}\leq n\leq\max\{k,l,m\}$. В общем случае сверхтонкой структуры данный подход не применим, так как на начальном этапе решается нелинейная задача.

4 Энергетические инварианты в краевых задачах механики разрушения

В [15] введен контурный интеграл, вычисляемый на заданном распределении σ_{ij}, u_i, допускающий энергетическое толкование, как компоненты вектора потока энергии в вершину трещины инвариантный относительно выбора контура

$$
J=\int\limits_{\Gamma}\left(\left(W_0\left(\varepsilon_{ij}\right)+\frac{1}{2}\rho\dot{\gamma}^2u_{i,x_1}u_{i,x_1}\right)n_1-\sigma_{ij}n_ju_{i,x_1}\right)ds. \tag{17}
$$

Здесь контур Г охватывает вершину трещины в тонкой пластинке (для определенности будем рассматривать плоскую деформацию) и выходит своими концами на берега трещины, свободные от напряжений, u_{i,x_1} — производные компонент вектора перемещений, ρ —плотность материала, W_0 — полная работа напряжения на соответствующих деформациях (потенциал, характеризующий свойства упругопластического материала), $\dot{\gamma}$ — скорость распространения вершины трещины.

Сущность энергетического критерия локального разрушения состоит в следующем. Пусть имеется упругопластическое тело с линейной трещиной. Для того, чтобы трещина стала распространяться, увеличивая свою поверхность, требуется израсходовать энергию, равную по величине той, которую надо затратить, чтобы осуществить целостность материала перед кромкой разреза. Эту энергию можно назвать энергией разрушения. Одновременно с образованием поверхности, свободной от нагрузок, деформация в некотором объеме тела уменьшается. Это приводит к соответствующему выделению из тела потенциальной энергии деформации. При этом выяснилось, что затраты энергии при создании новых поверхностей при развитии трещины связаны, главным образом, с работой пластической деформации объемов материала, расположенных перед вершиной трещины. Этот интеграл берется по криволинейному контуру без самопересечений, окружающему вершину трещины. Концы контура должны лежать на противоположных берегах трещины, но не обязательно в одной и той же точке плоскости. Интеграл вычисляется через заданное поле напряжений и перемещений при отсутствии массовых сил и термодинамических членов.

Необходимо заметить, что примеров аналитического вычисления интеграла (17) практически не существует, поскольку для этого требуется решение задачи для тела с трещиной в замкнутой форме. При численном подходе, его расчет производится после решения задачи на основе метода конечных элементов.

Были рассмотрены поля напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины различных типов в момент страгивания. Предполагая, что напряженное состояние упругопластической среды, предшествующее началу движения трещины, достигается в условиях нагружения, отличающегося от лучевого. В силу этого определяющие соотношения выбирались в рамках неголономной теории течения [16]. Процесс нагружения при страгивании трещины является нелинейным и перераспределение напряжений и деформаций (их скоростей) отыскивались также в рамках соотношений теорий пластичности в приращениях. Были построены области активного нагружения и разгрузки. При этом, как указывалось ранее, решение задач о жестких концентраторах напряжений типа трещин в неполной (асимптотической) постановке содержит степень произвола. В линейной механике разрушения такая неопределенность относится к связи между коэффициентом интенсивности напряжений с геометрией тела и краевыми условиями [17]. Большая степень неопределенности появляется для упругопластических задач, когда главный член разложения вблизи сингулярной точки — вершины неподвижной трещины — содержит наряду с неопределенным множителем заранее неизвестный показатель сингулярности, который можно отнести к сверхтонкой структуре. Для ситуации распространяющейся упругопластической трещины число неопределенных параметров может увеличиваться до трех. Помимо этого, полученные результаты позволяют с помощью энергетического критерия локального разрушения найти зависимости между критическими параметрами разрушения — допустимой нагрузкой и соответствующей максимальной длиной трещины.

Указанное свойство J-интеграла используется для определения вышеуказанных величин через параметры нагружения и геометрию задачи (рис. 1) [4, 6, 18]. Считается выполнимым, условие развития трещины при наличии сопротивления материала разрушению и незначительном влиянии термодинамических членов, а также $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \sim r^{-\lambda_0}$.

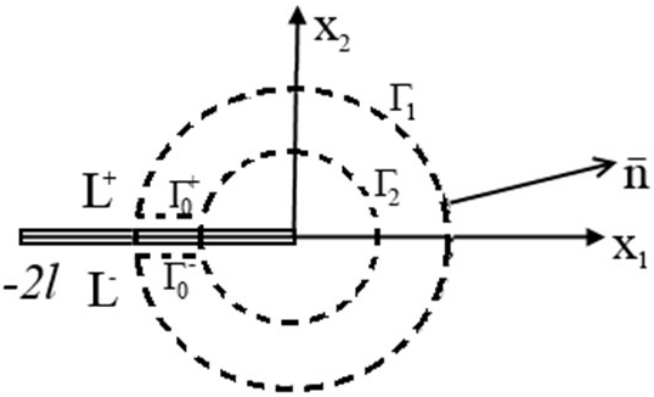

Рис. 1: Система координат при вершине трещины.

Приведем в качестве примера для случая плоской деформации тензорные произведения вида:

$$\sigma^p_{rr}\dot{\varepsilon}^p_{rr} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}(-(\lambda_k-2)(\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)\cos(\varphi)+(\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi))r^{\lambda_k-3}+$$
$$+\mu\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+a_{kl}'\sin(\varphi))(\psi_m''+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m)r^{\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\sum_{s\geq 0}(\psi_s\lambda_s+\psi_s'')(-(\lambda_k-2)(\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)\cos(\varphi)+$$
$$+(\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi))r^{\lambda_s+\lambda_k-5}$$
$$+\mu\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\sum_{s\geq 0}(\psi_s\lambda_s+\psi_s'')(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+$$
$$+a_{kl}'\sin(\varphi))(\psi_m''+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m)r^{\lambda_s+\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-9},$$

$$\sigma^p_{\varphi\varphi}\dot{\varepsilon}^p_{\varphi\varphi} = \sum_{s\geq 0}\lambda_s(\lambda_s-1)\psi_s r^{\lambda_s-2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}((\lambda_k-2)(\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)cos(\varphi)-$$
$$-(\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi))r^{\lambda_k-3}+$$
$$+\frac{\mu}{4}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}((\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)-a'_{kl}\sin(\varphi))(\psi_m''+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m)r^{\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}\sum_{s\geq 0}\lambda_s(\lambda_s-1)\psi_s((\lambda_k-2)(\psi_k''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k)\cos(\varphi)- \tag{18}$$
$$-(\psi_k'''+\lambda_k(2-\lambda_k)\psi_k')\sin(\varphi))r^{\lambda_s+\lambda_k-5}+$$
$$+\frac{\mu}{4}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\sum_{s\geq 0}\lambda_s(\lambda_s-1)\psi_s((\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)-$$
$$-a'_{kl}\sin(\varphi))(\psi_m''+\lambda_m(2-\lambda_m)\psi_m)r^{\lambda_s+\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-9},$$

$$\sigma^p_{r\varphi}\dot{\varepsilon}^p_{r\varphi} = \sum_{s\geq 0}(1-\lambda_s)\psi_s' r^{\lambda_s-2}\cdot\sum_{k\geq 0}(-(\lambda_k-2)(1-\lambda_k)\psi_k'\cos(\varphi)+(1-\lambda_k)\psi_k''\sin(\varphi))r^{\lambda_k-3}+$$
$$\frac{\mu}{2}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+a'_{kl}\sin(\varphi))(1-\lambda_m)\psi_m' r^{\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-7}=$$
$$=\sum_{k\geq 0}\sum_{s\geq 0}(1-\lambda_s)\psi_s'(-(\lambda_k-2)(1-\lambda_k)\psi_k'\cos(\varphi)+(1-\lambda_k)\psi_k''\sin(\varphi))r^{\lambda_s+\lambda_k-5}+$$
$$\frac{\mu}{2}\sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq 0}\sum_{m\geq 0}\sum_{s\geq 0}(1-\lambda_s)\psi_s'(-(\lambda_k+\lambda_l-4)a_{kl}\cos(\varphi)+a'_{kl}\sin(\varphi))(1-\lambda_m)\psi_m' r^{\lambda_s+\lambda_k+\lambda_l+\lambda_m-9}.$$

Благодаря свойству инвариантности J-интеграла, именно в нелинейных задачах он широко применяется в практических расчетах элементов конструкций с трещинами на прочность, включая материалы с нелинейными характеристиками. Предположим, что в соответствии с нелинейным законом деформирования напряжение представляет собой степенную функцию от деформации $\sigma \sim r^\alpha$ с показателем степени $\alpha \leq 1$. Тогда, выбирая в качестве контура интегрирования Γ — окружность радиуса r получим оценку $J \sim r^{f(k,\lambda_k)}$, т.е. уравнение $f(k,\lambda_k)=0$, из решения которого находится порядок сингулярности с помощью численного решения обратной задачи интегральной геометрии. На последующих этапах этот параметр отыскивается с помощью рекуррентного уравнения, получаемого из самого метода возмущения.

Исследования, посвященные задачам об асимптотике полей напряжений и деформаций в упругопластических нелинейных средах рассматривались в множестве работ [17–21]. В ряде публикаций с определяющими соотношениями нелинейной упругости задача решается посредством определения функции напряжений. С учетом симметрии применяется интервал $\varphi \in [0,\pi]$. На левом конце задаются краевые условия симметрии

$$\varphi = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad \sigma_{rr,\varphi} = 0; \quad \sigma_{\varphi\varphi,\varphi} = 0. \tag{19}$$

Из условий (19) только два независимы. При этом указывается, что функция напряжений определена системой уравнений и граничными условиями с точностью мультипликативного множителя. Поэтому в качестве граничного условия задается произвольное значение при $\varphi = 0$. Тогда для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, к решению которого редуцируется задача имеем пять граничных условий. Можно предположить, что в таком подходе нет противоречия, так как λ_k — собственное значение. В работе [19] задача не сводится к задаче о собственных значениях, а число граничных условий уменьшается с мотивацией, что граничные условия при $\varphi = \pi$ взаимосвязаны, так что при удовлетворении одного из них удовлетворяется и второе. Аналогичная задача решается в [20] для трещины общего вида. Если задать четыре начальных условия при $\varphi = \pi$, то получится задача Коши для нахождения собственных значений. Из этих условий два — это условия симметрии, а третье — произвольное ненулевое условие, вытекающее из однородности задачи. Далее варьируя четвертым условием удовлетворяем условиям при $\varphi = \pi$. Еще один подход реализован в [21]. Из соотношения конечности J-интеграла выводится начальное собственное значение и строятся решения для симметричных случаев трещины. Рассматривается промежуток $\varphi \in [0,\pi]$ и условия симметрии при $\varphi = 0$. Из условий при $\varphi = \pi$ удовлетворяется только одно, тогда необходимо решать задачу на промежутке $\varphi \in [-\pi,\pi]$.

В тоже время, полученные численные результаты достаточно хорошо совпадают с решениями МКЭ и другими прямыми методами. Так это можно объяснить тем, что собственное значение — показатель сингулярности оценивалось с помощью требования конечности энергетического J-интеграла. Следует понимать, что начальная асимптотика должна быть предельным представлением решений краевых задач при $r \to 0$. В общем случае выполнение этого условия для упругопластического материала наталкивается на существеннные трудности, так как единственный путь

решения упругопластических краевых задач в общем случае — это построение итерационного процесса, в котором нулевым приближением является решение линейно упругой задачи. Но значения α для нулевого этапа и для последующих приближений будут различны. Получается, что характер асимптотики должен меняться от итерации к итерации. Неясно, как осуществить численную реализацию такого итерационного процесса и какова будет точность полученного решения. Данный вариант метода возмущений снимает эту проблему. Резюмируя, можно отметить, что, не рассматривая данную задачу как задачу о собственных значениях возникает ситуация, когда для отыскания нетривиальных решений краевой задачи число граничных условий — пять превышает решаемого дифференциального уравнения — четыре. В некоторых работах одно из граничных условий не рассматривается или говорится, что одно из граничных условий выполняется при выполнении второго. Следует отметить, что данное условие может использоваться как эффективный аппаратный прием, но результаты, полученные на его основе, вообще говоря, требуют проверки. Более общий физико-механический принцип, применяемый здесь, совпадает с условием, что физический смысл имеют решения, которые удовлетворяют неравенству $0 < \dfrac{d\Pi}{dl} < M$, где M — некоторая верхняя граница, $\dfrac{d\Pi}{dl}$ — производная потенциальной энергии по длине трещины, что позволяет свести число граничных значений задачи до четырех.

Предлагаемый вариант метода возмущений совместно с интегральным энергетическим инвариантом позволяет формулировать математически корректные постановки краевых задач на всех этапах и получить достоверные численные результаты.

Литература

1. Rice, J. W. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968.

2. McMeeking, R. M., Parks, D. M. Crack Tip Opening Displacement and Plastic Zone Shapes for Power–Law Hardening Materials. *International Journal of Fracture*. 1979.

3. Bazant, Z. P., Cedolin, L. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories. *World Scientific* 2010.

4. Cherepanov, G. P. *Mechanics of Brittle Fracture.* 1979.

5. Матвиенко, Ю. Г. *Модели и критерии механики разрушения.* М.: Физматлит, 2006. 328 с. URL: https://www.studmed.ru/matvienko-yug-modeli-i-kriterii-mehaniki-razrusheniya_9b25979bcbf.html.

6. Нифагин, В. А. *Асимптотические методы в задачах упругопластической теории трещин.* LAP LAMBERT Academic Publishing, OmniScriptum GmbHamp. 2017. 125 с.

7. Nifagin, V., Hundzina, M. Quasistatic stationary growth of elasto-plastical single crack. *International Journal of Engineering, Business and Enterprise Applications.* 2014. Issue 10. P. 6–12.

8. Нифагин, В. А. Асимптотика напряжений в окрестности угловой точки для задач теории течения с упрочнением. *Вестник БНТУ*. 2008. № 5. С. 90–93.

9. Макклинток, Ф. Пластические аспекты разрушения. *Разрушение.* Т.3. М.: Мир, 1976. С. 67–262.

10. Белоцерковский, О. М. *Численные методы в механике сплошных сред.* М., Наука, 1984.

11. Оден, Дж. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.* М.: Мир, 1976.

12. Beer, G. Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1983. **19**. pp.567–580.

13. Lia, W., Liang, H., Chen, J. et al. Effect of SiC particles on fatigue crack growth behavior of SiC particulate-reinforced Al–Si alloy composites produced by spray forming/ *Procedia Materials Science.* 2014. Vol. 3. P. 1694–1699. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.273.

14. Ma, J, Lu, H, Wang, B, Hornung, R, Wissink, A, Komanduri, R. Multiscale simulation using general-ized interpolation material point (GIMP) method and molecular dynamics (MD). *CMES*, 2006. **14** p. 101–11.

15. Shih, C. F. Relationship between J-integral and crack tip opening displacement for stationary and expanding cracks. *J. Mech . Phys. Solids*, 1981. **29**, P. 305–326,

16. Клюшников, В. Д. *Физико-математические основы прочности и пластичности.* М.: Изд-во МГУ, 1994. 189 с.

17. Морозов, Н. Ф. *Математические вопросы теории трещин.* М.: Наука, 1984. 256 с.

18. Rice, I. R., Rosengren, G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material *J. Mech. Phys. Solids.* 1968. V. l6. N 1. P. 1–12.

19. Белякова, Т. А., Ломакин, Е. В. Трещина нормального разрыва в упругой среде с изменяющимися свойствами в условиях плоской деформации. *Изв. РАН. МТТ.* 1999. № 3. С. 97–105.

20. Tvergaard, V., Hutchinson, J,W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids *J. Mech. Phys. Solids.* 1992. V. 40. № 6. P. 1377-1397.

21. Астафьев, В. И., Крутов, А. Н. Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения. *Изв. РАН. МТТ.* 2001. № 5. С. 125–133.

22. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач* М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.