

# БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского  
государственного университета  
А.Д.Король

15 июля 2024 г.

Регистрационный №УД-13361/ уч.



## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебная программа учреждения образования  
по учебной дисциплине для специальности:

**1-31 03 01 Математика (по направлениям)**

Направление специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, учебных планов № G31-1-003/уч. от 25.05.2021, № G31-1-207/уч. от 22.03.2022.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Антоневич Анатолий Борисович**, профессор кафедры интеллектуальных методов моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Чесалин Владимир Иванович**, доцент кафедры интеллектуальных методов моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Пыжкова Ольга Николаевна**, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 12 от 28.05.2024);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий кафедрой ФАиАЭ,  
Профессор



А.В.Лебедев

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### **Цели и задачи учебной дисциплины**

**Целью** учебной дисциплины «Введение в теорию динамических систем» является подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований.

### **Задачи учебной дисциплины:**

Формирование у студентов устойчивого понимания основных понятий теории динамических систем, изучение связей динамики со свойствами ассоциированных линейных операторов в банаховых пространствах, повышение общего уровня математической культуры и совершенствование навыков использования математических методов для решения прикладных проблем.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к дисциплинам специализации компонента учреждения образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Алгебра», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Математическая и прикладная статистика».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Введение в теорию динамических систем» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

#### **Базовые профессиональные компетенции:**

Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира;

Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен:

#### **знать:**

- основные понятия теории динамических систем;
- основные теоремы теории Пуанкаре – Бендиксона;

#### **уметь:**

- строить траектории для примеров динамических систем;
- определять тип особой точки по линеаризованной системе и вычислять её индекс Пуанкаре;

#### **владеть:**

- методами вычисления индекса Пуанкаре для особых точек нелинейных (однородных) динамических систем на плоскости.

## **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в седьмом семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Введение в теорию динамических систем» отведено:

- для очной формы получения высшего образования: 108 часов, в том числе 54 аудиторных часа, из них: лекции – 48 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### **Тема 1. Динамические системы.**

1.1 Понятие динамической системы и фазового потока. Векторное поле, связанное системой. Существование и продолжимость решений системы на всю числовую ось.

1.2. Траектории, инвариантные множества,  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельные множества. Примеры динамических систем и фазовых портретов. Примеры: дифференциальные уравнения, динамические системы на алгебраических структурах, динамические системы, возникающие в теории чисел. Примеры динамических систем и фазовых портретов

### **Тема 2. Качественная теория плоских динамических систем.**

2.1. Теория Пуанкаре – Бендиксона, теорема о возможных типах траекторий (и их предельных множеств) на плоскости.

2.2. Классификация предельных циклов. Критерий Дюлака отсутствия предельных циклов.

2.3. Линейные системы на плоскости, классификация их особых точек. Линеаризация систем. Построение фазовых портретов с несколькими особыми точками.

### **Тема 3. Элементы эргодической теории.**

3.1. Эмпирические меры и среднее Биркгоффа. Эргодическая теорема Биркгоффа-Хинчина.

3.2. Эргодические отображения. Перемешивающиеся отображения.

### **Тема 4. Приложения теории динамических систем в физике и биологии.**

4.1. Исследование динамических систем, возникающих в физике. Интеграл энергии.

4.2. Изучение модели «хищник – жертва», динамическая система Лотка – Вольтерра

4.3. Качественное исследование нелинейных динамических систем.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий  
(ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1.</b>	<b>Динамические системы.</b>	<b>10</b>					<b>2</b>	
1.1	Понятие динамической системы и фазового потока. Векторное поле, связанное системой. Существование и продолжимость решений системы на всю числовую ось.	4						Экспресс-опрос, дискуссия
1.2	Траектории, инвариантные множества, $\alpha$ - и $\omega$ -предельные множества. Примеры динамических систем и фазовых портретов. Примеры: дифференциальные уравнения, динамические системы на алгебраических структурах, динамические системы, возникающие в теории чисел. Примеры динамических систем и фазовых портретов.	6					2	Контрольная работа
<b>2.</b>	<b>Качественная теория плоских динамических систем.</b>	<b>16</b>					<b>2</b>	
2.1	Теория Пуанкаре – Бендиксона, теорема о возможных типах траекторий (и их предельных множеств) на плоскости.	6						Экспресс-опрос, дискуссия

2.2	Классификация предельных циклов. Критерий Дюлака отсутствия предельных циклов.	4						Опрос	
2.3	Линейные системы на плоскости, классификация их особых точек. Линеаризация систем. Построение фазовых портретов с несколькими особыми точками.	6					2	Контрольная работа, проверка индивидуальных заданий	
<b>3.</b>	<b>Элементы эргодической теории.</b>	<b>8</b>					<b>2</b>		
3.1	Эмпирические меры и среднее Биркгоффа. Эргодическая теорема Биркгоффа-Хинчина.	4						Опрос, дискуссия	
3.2	Эргодические отображения. Перемешивающиеся отображения.	4						Опрос, дискуссия	
<b>4</b>	<b>Приложения теории динамических систем в физике и биологии.</b>	<b>14</b>							
4.1	Исследование динамических систем, возникающих в физике. Интеграл энергии.	4						Экспресс-опрос, дискуссия	
4.2	Изучение модели «хищник – жертва», динамическая система Лотка – Вольтерра	4						Опрос, дискуссия	
4.3	Качественное исследование нелинейных динамических систем.	6					2	Контрольная работа	
		<b>48</b>					<b>6</b>		
	<b>ВСЕГО</b>		<b>54</b>						

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

1. Алдошин, Г.Т. Аналитическая динамика и теория колебаний : учебное пособие для студентов и аспирантов машиностроительных и физико-технических вузов / Г. Т. Алдошин. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2023. - 253 с. - URL: <https://reader.lanbook.com/book/213161#1>.
2. Осипов, А. В. Дискретная динамика : учебное пособие / А. В. Осипов. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2019. - 142 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/206147>.

### Дополнительная литература

1. Каток, А. Б. Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений / А. Б. Каток, Б. Хасселблат; пер. с англ. под ред. А. С. Городецкого. - Москва: Изд-во МЦНМО, 2005. - 464с. : ил. ; 24x17см. - (Федеральная целевая программа "Культура России" (подпрограмма "Поддержка полиграфии и книгоиздания России")). - Библиогр.: с. 423-425, библиогр. в подстр. примеч. - ISBN 5-94057-063-1.
2. Халмош, П. Лекции по эргодической теории: Т.12: Электронная книга: пер. с англ. / П. Халмош // Динамические системы [Электронный ресурс] : Электрон. дан. и прог. – Ижевск : РХД, 2001 . – 136 с. – (Электронная б-ка) <https://opac.mpei.ru/OpacUnicode/app/webroot/index.php?url=/notices/index/IdNotice:204560/Source:default>
3. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С., Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Динамические системы-1. М.: ВИНТИ, 1985. - 244 с.
4. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. — 486 с.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984. — 296 с.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
7. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989, — 472 с.



## **Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущей и промежуточной аттестации.

Для диагностики компетенций используются следующие средства текущего контроля: опросы, дискуссии, контрольные работы, проверка индивидуальных заданий.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Введение в теорию динамических систем» учебным планом предусмотрен **зачет**.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы**

#### **Тема 1. Динамические системы. (2 ч)**

**Задание:** Решить дифференциальные уравнения, проанализировать динамические системы на алгебраических структурах, динамические системы, возникающие в теории чисел.

**Форма контроля** – контрольная работа

**Тема 2. Качественная теория плоских динамических систем.** Линейные системы на плоскости, классификация их особых точек. Линеаризация систем. Построение фазовых портретов с несколькими особыми точками. (2 ч)

**Задание:** построить фазовые портреты с несколькими особыми точками.

**Форма контроля** – контрольная работа, проверка индивидуальных заданий

**Тема 4 Приложения теории динамических систем в физике и биологии. (2 ч)**

**Задание:** исследовать динамические системы, возникающие в физических задачах – пружинный маятник, плоский маятник. Построить фазовые портреты динамических систем с интегралом энергии. Построить модель «хищник – жертва», динамическая система Лотка – Вольтерра

**Форма контроля** – контрольная работа

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов;

- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

При организации образовательного процесса используются *методы и приёмы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией, понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления, углубления и расширения полученных теоретических знаний, обучающихся;
- формирования умений использовать специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности обучающихся творческой инициативы, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине на учебных занятиях выполняется под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия. При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы обучающийся имеет право обращаться к преподавателю за консультацией.

Основным видом аудиторной самостоятельной работы при изучении учебной дисциплины являются подготовка ответов на тесты, решение качественных задач, предложенных в ходе занятия, участие в дискуссиях во время лекций.

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку.

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале смешанного и дистанционного обучения БГУ.

## Примерный перечень вопросов к зачету

1. Понятие динамической системы и фазового потока.
2. Векторное поле, связанное системой.
3. Существование и продолжимость решений системы на всю числовую ось.
4. Траектории, инвариантные множества,  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельные множества.
5. Примеры динамических систем и фазовых портретов.
6. Качественная теория плоских динамических систем.
7. Теория Пуанкаре – Бендиксона, теорема о возможных типах траекторий (и их предельных множеств) на плоскости.
8. Классификация предельных циклов.
9. Критерий Дюлака отсутствия предельных циклов.
10. Линейные системы на плоскости – классификация их особых точек.
11. Примеры построения фазовых портретов динамических систем с несколькими особыми точками.
12. Элементы эргодической теории.
13. Эмпирические меры и среднее Биркгоффа.
14. Эргодическая теорема Биркгоффа-Хинчина.
15. Эргодические отображения. Перемешивающиеся отображения.
16. Приложения теории динамических систем в физике и биологии.
17. Исследование динамических систем, возникающих в физических задачах – пружинный маятник, плоский маятник.
18. Фазовые портреты динамических систем с интегралом энергии.
19. Изучение модели «хищник – жертва», динамическая система Лотка – Вольтерра.
20. Качественное исследование нелинейных динамических систем.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программ (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой  
Доктор физ.-мат. наук,  
профессор



А.В.Лебедев

28.05.2024

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)  
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_  
(ученая степень, ученое звание)

\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)