

Н. А. Поклонский
А. Т. Власов
С. А. Вырко

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ

Теория и приложения



**Н. А. Поклонский
А. Т. Власов
С. А. Вырко**

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ
СИММЕТРИИ**
Теория и приложения

**Минск
«Беларуская навука»
2024**

УДК 512.542

Поклонский, Н. А. Конечные группы симметрии. Теория и приложения / Н. А. Поклонский, А. Т. Власов, С. А. Вырко. – Минск : Белорусская наука, 2024. – 507 с. – ISBN 978-985-08-3179-8.

В монографии излагаются основы теории конечных групп преобразований евклидова пространства с ее приложениями к квантовым системам: атомам, молекулам и кристаллам. Рассмотрена симметрия систем с электронными и ядерными спинами, а также симметрия фундаментальных взаимодействий. В основе книги — опыт выполнения проектов Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и чтения лекций членом-корреспондентом, профессором Н. А. Поклонским на физическом факультете Белорусского государственного университета и в Университете НАН Беларуси. Она включает выводы аналитических соотношений и примеры их практического применения. Приведены 125 упражнений с указаниями для их решения.

Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области физики, химии и прикладной математики.

Табл. 52. Ил. 58. Библиогр.: 41 назв.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Ю. А. Курочкин;
доктор физико-математических наук, профессор В. В. Андреев;
доктор физико-математических наук, профессор В. В. Беньш-Кривец

ISBN 978-985-08-3179-8

© Поклонский Н. А., Власов А. Т.,
Вырко С. А., 2024
© Оформление. РУП «Издательский
дом «Белорусская наука», 2024

Содержание

Предисловие	5
Глава 1. Начала теории групп преобразований	
§ 1.1. Введение в группы симметрии	7
§ 1.2. Основные понятия теории групп	10
§ 1.3. Группа перестановок. Теорема Кэли	20
Глава 2. Точечные группы симметрии	
§ 2.1. Оси и плоскости симметрии	24
§ 2.2. Группы преобразований C_n , S_n , C_{nh} , C_{nv} , D_n , D_{nh} , D_{nd} , T , T_d , T_h , O , O_h , Y , Y_h	28
§ 2.3. Алгоритм идентификации точечных групп	38
Глава 3. Теория представлений конечных групп	
§ 3.1. Представления групп	42
§ 3.2. Регулярное представление	45
§ 3.3. Леммы Шура. Соотношения ортогональности	45
§ 3.4. Базисные функции неприводимых представлений	59
§ 3.5. Регулярное представление и построение базисных функций неприводимых представлений	62
§ 3.6. Двумерное унитарное представление группы D_3	67
Глава 4. Применение теории представлений групп для классификации молекулярных колебаний	
§ 4.1. Определение типов колебаний атомов в молекуле прямым вычислением и групповыми методами	73
§ 4.2. Классификация колебаний молекул: преобразования векторов смещений атомов	84
§ 4.3. Моды колебаний молекулы воды	89
Глава 5. Симметрия уравнения Шредингера	
§ 5.1. Классификация стационарных состояний квантовых систем	95
§ 5.2. Симметрия иона H_2^+ : потенциальная энергия электрона	100
§ 5.3. Симметрия иона H_2^+ : кинетическая энергия электрона	103
§ 5.4. Преобразование пространственной инверсии гамильтониана	105
§ 5.5. Тензорное произведение неприводимых представлений группы	108
§ 5.6. Правила отбора для переходов между стационарными состояниями квантовой системы	110
§ 5.7. Характеры некоторых групп и преобразование декартовых координат при операциях симметрии	114
§ 5.8. Нарушение симметрии квантовой системы	119
§ 5.9. Расщепление уровней энергии атома примеси в кристалле: применение группы вращений	121
§ 5.10. Правила отбора для электрических дипольных переходов в поле кубической симметрии	125

Глава 6. Симметрия химической связи в молекулах	
§ 6.1. Преобразования симметрии молекулы NH_3	129
§ 6.2. Базисные функции неприводимых представлений. Метод молекулярных орбиталей	131
§ 6.3. Теория направленных валентностей. sp^3 -Гибридизация в молекулах NH_3 и CH_4	136
§ 6.4. Рассмотрение sp^3 -гибридизации с помощью теории групп	140
§ 6.5. Неприводимые представления состояний молекулы CH_4 при учете спинов четырех протонов	143
Глава 7. Группы симметрии кристаллов	
§ 7.1. Группы (решетки) Браве и сингонии	151
§ 7.2. Пространственная группа симметрии	158
§ 7.3. Точечная симметрия и анизотропия кристаллов	174
Глава 8. Симметрия стационарных состояний электронов кристалла	
§ 8.1. Обратная решетка	178
§ 8.2. Неприводимые представления группы трансляций. Циклические граничные условия. Зона Бриллюэна	179
§ 8.3. Классификация одноэлектронных состояний в трехмерном кристалле. Функция Блоха	183
§ 8.4. Звезда волнового вектора электрона в двумерной квадратной решетке	189
Глава 9. Симметрия спиновых систем	
§ 9.1. “Двойные” группы	207
§ 9.2. Квантовая система взаимодействующих частиц	215
§ 9.3. Изоспиновая симметрия ядер	249
§ 9.4. Изоспин и пионы	263
§ 9.5. Симметрия фундаментальных взаимодействий	269
Приложение А. Толковый словарь терминов	279
Приложение Б. Матрицы	299
Приложение В. Действие точечных операций симметрии на полярный и аксиальный векторы	314
Приложение Г. Проекционные операторы	318
Приложение Д. Применение проекционных операторов для определения мод колебаний молекулы H_2O	321
Приложение Е. Начала теории групп	332
§ Е.1. Конечные группы и их представления	332
§ Е.2. Представления группы симметрии трехмерного кристалла	351
§ Е.3. Непрерывные группы	365
§ Е.4. Группа $\text{SU}(2)$	374
§ Е.5. Группа $\text{SU}(3)$	391
Упражнения	406
Список рекомендуемой литературы	501
Предметный указатель	503

Предисловие

Симметрия — согласованность частей целого — одно из важнейших свойств природы. Поэтому понятие симметрии используется в представлениях, развиваемых человеком для противостояния хаосу. Симметрией объекта называют преобразование, переводящее объект в эквивалентный. Все симметрии объекта образуют его *группу симметрии*, точнее группу преобразований (множество преобразований с бинарной композицией преобразований). Абстрактная группа, или просто *группа*, — это множество элементов вместе с одной ассоциативной бинарной операцией, причем имеется единичный элемент и каждый элемент обратим.

Идеи теории групп, математического фундамента симметрии, появились в начале XIX в., а теория представлений групп — лет на сто позже, когда уже создавалась квантовая теория. Развитие физики связано с расширением используемых групповых конструкций: группа Галилея (законы сохранения энергии, импульса, момента импульса), группа Лоренца (объясняет спин и существование античастиц), унитарные группы (классификация элементарных частиц), калибровочные группы (фундаментальные взаимодействия), суперсимметрия (симметрия между бозонами и фермионами). Установлено, что существует только 14 типов конечных групп симметрии молекул и 230 групп симметрии трехмерных кристаллов. Методы теории групп симметрии широко применяются в молекулярном зодчестве, биофизике, электронике, фотонике и т. д.

Научное издание во многом основано на исследованиях и лекциях члена-корреспондента НАН Беларуси Н.А. Поклонского. Излагаются элементы теории конечных групп, их представлений и приложения к молекулам, кристаллам и ковалентным химическим связям между атомами. Задача этой книги — показать читателю, как теория представлений групп позволяет реализовать соображения симметрии в практике расчетов.

Основное внимание уделено группам преобразований, оставляющим объект в исходной конфигурации, — группам симметрии молекул и кристаллов. Большая часть пособия посвящена рассмотрению объектов с дискретными группами симметрии и объяснению прямых методов получения физических следствий симметрии. Уровень изложения материала предполагает у читателя лишь на-

чальные знания по линейной алгебре и квантовой механике.

Книга состоит из девяти *глав*, главы разбиты на параграфы. Первая глава является введением в теорию конечных групп. Во второй главе рассмотрены все типы точечных групп в трехмерном евклидовом пространстве. В третьей главе изложены основы теории матричных представлений конечных групп. Главы 4–9 посвящены приложениям групповых методов, общему анализу следствий наличия симметрии у квантовых систем. На примерах показано, как групповые методы вносят ясность в исследование сложных систем. Рассматриваемый здесь круг явлений — молекулярные колебания, состояния электронов в молекулах, затем вводятся дискретные трансляции и их применение к кристаллическим структурам. Наконец, обсуждается симметрия спиновых систем (атомов, ядер и элементарных частиц). *Приложения А–Е* аналитически дополняют основной текст. *Упражнения* (125 единиц) предназначены для самостоятельной работы, большая часть из них снабжена указаниями к решению. Приведен также список рекомендуемой для дальнейшего чтения литературы.

Рисунки и таблицы нумеруются в пределах каждой главы, например, рис. 3.12 — это рис. 12 в главе 3. *Формулы* пронумерованы в пределах каждой главы. Так, отсылка (2.5) означает формулу (5) главы 2. *Замечания* нумеруются в пределах каждой главы или приложения (запись # 5.3 в начале строки — это замечание 3 в главе 5; конец замечания отмечен знаком “☒”). *Подстрочные сноски* имеют сквозную нумерацию внутри каждой главы. В *упражнениях* формулы и таблицы пронумерованы в пределах каждого упражнения, а рисунки и сноски имеют сквозную нумерацию.

Конечные группы обозначены прописными полужирными курсивными латинскими буквами (***G***, ***H***), элементы групп — прописными светлыми курсивными буквами (*X*, *Y*). *Векторы* обозначены полужирными символами с прямым начертанием (***a***, ***b***); вектор, направленный из точки *A* в точку *B*, обозначается ***AB***; *операторы* (преобразования симметрии) — прописными светлыми курсивными буквами (*R*, *S*). *Множество* целых чисел (включая ноль) обозначается $\mathbb{Z}$, рациональных — $\mathbb{Q}$, вещественных — $\mathbb{R}$ (положительных — $\mathbb{R}_{>0}$), комплексных — $\mathbb{C}$. Запись $i = \overline{1, n}$ означает, что *i* пробегает натуральные числа из $\mathbb{N}$ от 1 до *n*.

Благодарим рецензентов за советы и замечания.

Н.А. Поклонский, А.Т. Власов, С.А. Вyrко

Глава 1. Начала теории групп преобразований

§ 1.1. Введение в группы симметрии

Группой движений трехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^3$ называется множество таких взаимно однозначных отображений пространства на себя, которые сохраняют расстояния между точками. Если в результате преобразования (отображения) хотя бы одна точка остается на месте, преобразование называется *точечным*. Вообще, любое движение пространства есть некоторое сочетание поворота вокруг оси, зеркального отражения в плоскости и параллельного переноса (*трансляции*); см. также приложения А и Е. Группа движений пространства $\mathbb{E}^3$ является *группой симметрии физической теории*, что называется однородностью и изотропностью пространства $\mathbb{E}^3$. Это означает, что результаты измерений прибором $\mathcal{D}$ объекта $\mathcal{O}$ полностью совпадают с измерениями прибором $R\mathcal{D}$ объекта $R\mathcal{O}$ после преобразования R (см. рис. 1.1).

Многие системы (объекты) обладают симметрией — (само)согласованностью частей целого. Движение S пространства $\mathbb{E}^3$ называется *симметрией* объекта $\mathcal{O}$, если преобразованный объект $S\mathcal{O}$ не отличается от $\mathcal{O}$. (Результаты измерений прибором $\mathcal{D}$ объекта $\mathcal{O}$ полностью совпадают с измерениями тем же прибором $\mathcal{D}$ объекта $S\mathcal{O}$.) Для объекта $\mathcal{O}$ все движения пространства, переводящие $\mathcal{O}$ в себя, образуют *группу преобразований*, которую называют *группой симметрии* объекта $\mathcal{O}$.

Если символы S и T обозначают операции симметрии объекта и входят в математические выражения, то они удовлетворяют четырем условиям самосогласования операций. 1) Композиция $S \circ T$, означающая результат последовательного применения сначала операции T и затем операции S , также будет некоторой операцией R симметрии объекта. (В общем случае $S \circ T \neq T \circ S$.) 2) Набор операций симметрии содержит тождественное преобразование E , оставляющее все неизменным. 3) Всегда можно “нейтрализовать” действие любой операции S обратной операцией S^{-1} , так что

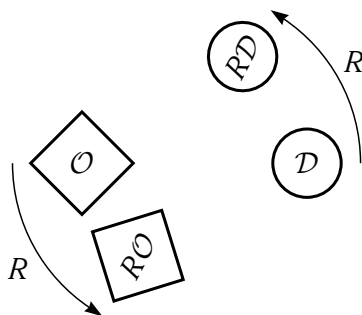


Рис. 1.1. Действие точечного преобразования (поворота) R на объект $\mathcal{O}$ и на прибор $\mathcal{D}$ в евклидовом пространстве

Таблица 1.1

Преобразования симметрии и их обозначения

Обозначения		Название преобразований (операций) в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$
Шёнфлиса	Германа – Могена	
E	1	Тождественное преобразование
C_n	n	Ось — поворот на угол $2\pi/n$, где $n \in \mathbb{N}$. Ось с наибольшим n называют главной осью (порядка n), или вертикальной
C'_2, U_2	2	Горизонтальная ось — поворот на угол π вокруг оси, перпендикулярной главной оси
σ_h	$/m$	Горизонтальная плоскость — зеркальное отражение относительно плоскости, перпендикулярной главной оси
σ_v	m	Вертикальная плоскость — зеркальное отражение относительно плоскости, содержащей главную ось
σ_d	m	Диагональная плоскость — зеркальное отражение относительно плоскости, содержащей главную ось и делящей пополам угол между двумя осями, перпендикулярными или наклонными к главной оси
$I = C_2\sigma_h$	$\bar{1}$	Центр симметрии — инверсия относительно начала декартовой системы координат

$S^{-1} \circ S = S \circ S^{-1} = E$. 4) Выполняется условие ассоциативности бинарной операции (композиции): $S \circ (T \circ R) = (S \circ T) \circ R$. Эти четыре условия составляют *четыре аксиомы группы преобразований*.

Бинарная операция (символ $\circ$) группы называется умножением и обозначается точкой (символ $\cdot$), которую обычно не пишут. Если композиция элементов S и T группы записывается как умножение, то $S \circ T \equiv S \cdot T \equiv ST$, если как сложение, то $S \circ T \equiv S + T$.

Далее используются традиционные названия элементов групп симметрии. Например, термин *ось* обозначает поворот вокруг оси, и по-прежнему ось, вокруг которой производится это вращение. *Оси симметрии* бывают: *вертикальные*, *горизонтальные* и *наклонные* (по отношению к главной оси; см. табл. 1.1).

В системе обозначений точечных групп симметрии и их элементов по Шёнфлису используется одна прописная буква с одним или двумя индексами. Буква **C** (от слова *cyclic* — циклическая) употребляется в записи групп, имеющих только одну главную ось; буква **D** (*diagonal* — диагональная) — для точечных групп с осями C'_2 , перпендикулярными главной оси; буква **S** (*sphenoidal* —

клиновидная) — для точечных групп с четной зеркально-поворотной осью $S_{2n} = C_{2n}\sigma_h = \sigma_h C_{2n}$ (композиция поворота на угол π/n вокруг оси C_{2n} и зеркального отражения относительно перпендикулярной ей плоскости σ_h). Буквы **T** и **O** (*tetrahedral* — тетраэдрическая и *octahedral* — октаэдрическая) используются для обозначения групп симметрии тетраэдра и октаэдра (а также гексаэдра, или куба). Буква **Y** (*icosahedral* — икосаэдрическая) обозначает группу симметрии икосаэдра и додекаэдра. Нижние индексы, следующие за прописной буквой, могут быть цифрами или буквами. Индексы $n = 1, 2, 3, \dots$ при буквах **C**, **D**, **S** указывают порядок n главной оси. Буквенные индексы означают: *i* (*inversion*) — центр симметрии, *s* (*single*) — единственную плоскость симметрии, *h* (*horizontal*) — горизонтальную плоскость симметрии, *v* (*vertical*) — вертикальную плоскость симметрии, *d* (*diagonal*) — “диагональную” плоскость, делящую пополам угол между двумя осями, перпендикулярными (или наклонными) к главной оси.

В системе обозначений точечных групп симметрии по Герману – Могену используется последовательность символов элементов, порождающих группу (см. далее § 2.3). Сначала записывают символ n главной оси симметрии C_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), затем пишут символы m или 2 столько раз, сколько *неэквивалентных* плоскостей σ или осей C_2' имеется наряду с главной осью. Плоскости σ_v сопоставляют символ m , а для плоскости σ_h перед m ставят косую черту “/”. Например, запись $4mm$ обозначает группу **C**_{4v}, порожденную осью C_4 и двумя плоскостями, пересекающимися по этой оси; $2/m$ — группу **S**₂, образующие которой суть одна ось C_2 и перпендикулярная ей плоскость.

Зеркально-поворотная ось симметрии $S_p = C_p\sigma_h$ (по Шёнфлису) четного порядка $p = 2n$ для четного n является инверсионной осью (по Герману – Могену) — *поворотом с инверсией* $C_p I = I C_p$ и обозначается символом $\bar{p}$ ($\bar{4} = S_4$, $\bar{8} = S_8$, $\bar{12} = S_{12}$). Ось $S_p = C_p\sigma_h$ четного порядка $p = 2n$ для нечетного n является инверсионной осью $C_n I$ и обозначается $\bar{n}$ ($\bar{1} = I = S_2$, $\bar{3} = S_6$, $\bar{5} = S_{10}$). Зеркально-поворотная ось $S_n = C_n\sigma_h$ нечетного порядка n является инверсионной осью $C_{2n} I$ и обозначается $\overline{2n}$ ($\overline{2} = m = S_1$, $\overline{6} = S_3$, $\overline{10} = S_5$).

В молекулярной спектроскопии точечные группы обозначают по Шёнфлису, а в кристаллофизике — по Герману – Могену. Многие термины образованы с использованием греческих слов: *геми* — половина, *голо* — полный, *гония* — угол, *морфо* — форма, *сингония* — сходноугольность, *скалена* — косой, *эдра* — грань.

1.1. Результаты измерений любого физического свойства объекта не изменяются, если расположение объекта в пространстве $\mathbb{E}^3$ изменить любым его элементом симметрии. Два примера. 1) Если тензор удельной электрической проводимости σ кристаллического образца на постоянном (стационарном) токе инвариантен относительно точечных преобразований симметрии образца (см. § 7.3), то результаты измерений σ в двух положениях образца (O и SO), отличающихся на преобразование симметрии S кристалла, совпадают, т. е. $S\sigma = \sigma$. 2) Собственный электрический дипольный момент $\mathbf{P}$ монокристалла (т. е. его дипольный момент в отсутствие внешних воздействий) — полярный вектор, направленный от грани монокристалла с зарядом минус (—) к грани монокристалла с зарядом плюс (+). Если $\mathbf{P} \neq 0$, то инверсия (центр симметрии) I не является симметрией кристалла. Так, если вектор $\mathbf{P}$ инвариантен относительно I , то $I\mathbf{P} = \mathbf{P}$, но $\mathbf{P}$ — полярный вектор, и поэтому $I\mathbf{P} = -\mathbf{P}$ (см. приложение В). Тогда из равенств $I\mathbf{P} = \mathbf{P}$ и $I\mathbf{P} = -\mathbf{P}$ следует, что $\mathbf{P} = 0$. Итак, инверсия I не принадлежит группе симметрии кристалла, имеющего $\mathbf{P} \neq 0$. $\boxtimes$

§ 1.2. Основные понятия теории групп

Группа преобразований $\mathbf{G}$ множества Q — это группа, элементами которой являются взаимно однозначные отображения множества Q в себя, а групповая операция (символ $\circ$) совпадает с композицией отображений. В этом случае говорят, что группа $\mathbf{G}$ действует на множестве Q (см. также § Е.1.2). Обозначение действия композиции элементов $X \circ Y$ из группы $\mathbf{G}$ на элементы из множества Q можно записывать двумя способами: либо слева от преобразуемого элемента $q \in Q$, и тогда $(X \circ Y)q = X(Yq)$, либо справа от $q \in Q$, и тогда $q(X \circ Y) = (qX)Y$. Далее преобразования из группы $\mathbf{G}$ множества Q (отображения Q в себя) записываются слева, так что $(X \circ Y)q$ означает выполнение сначала преобразования $Y \in \mathbf{G}$, а затем $X \in \mathbf{G}$. (На базисах в векторных пространствах используется правое действие группы, см. # Б.8.)

Группа $\mathbf{D}_3$ вращений пространства $\mathbb{E}^3$, переводящих правильный треугольник в себя, содержит шесть элементов (см. табл. 1.2): тождественное преобразование $X_1 = E$, два вращения ($X_2 = J$, $X_3 = K$) вокруг главной оси C_3 и три вращения ($X_4 = L$, $X_5 = M$, $X_6 = N$) вокруг трех осей C_2' . Каждое из этих преобразований (отображений) оставляет на месте центр треугольника. Композиция вращения J с последующим вращением N записывается в виде

Таблица 1.2

Группа D_3 вращательной симметрии правильного треугольника

Элементы группы D_3

E : треугольник не изменяет положения (тождественный элемент)

$J(=C_{3z})$: поворот треугольника в плоскости xu (вокруг оси z) на угол $-2\pi/3$
 $J^3 = E$

$K(=C_{3z}^2)$: поворот треугольника на угол $-4\pi/3$ или угол $+2\pi/3$
 $J^2 = K$

$L(=C'_{2a})$: поворот треугольника на угол $2\pi/2$ вокруг оси y (вокруг биссектрисы a)
 $L^2 = E$

$M(=C'_{2b})$: поворот треугольника на угол π вокруг оси b
 $J \circ L = M$

$N(=C'_{2c})$: поворот треугольника на угол π вокруг оси c
 $J^2 \circ L = N$

Треугольник в плоскости xu

Пример композиции $N \circ J = M$

Таблица умножения (доска Кэли) элементов группы D_3

D_3	E	J	K	L	M	N
E	E	J	K	L	M	N
J	J	K	E	M	N	L
K	K	E	J	N	L	M
L	L	N	M	E	K	J
M	M	L	N	J	E	K
N	N	M	L	K	J	E

В таблице Кэли результат умножения $X_i \circ X_j$ элемента первого столбца X_i на элемент первой строки X_j находится на пересечении строки справа от элемента X_i и столбца под элементом X_j . (Для $X_3 = K$, $X_4 = L$ из D_3 имеем $X_3 \circ X_4 = N$; $K \circ M = L$.)

$N \circ J = M$ (комбинация двух элементов дает третий). Элементы J и L вместе порождают всю группу и называются ее *генераторами* (образующими). Из табл. 1.2 видно, что группа D_3 ($= 32$) некоммукативна (например, $N \circ J \neq J \circ N$). Элементам группы можно сопоставить преобразования множества точек евклидова пространства $\mathbb{E}^3$, множества ребер правильного треугольника и др.

Определения основных понятий теории конечных групп и примеры этих понятий для точечной группы D_3 собраны в табл. 1.3. Подробнее все это объясняется далее в тексте и приложениях А и Е. Предполагается, что **читатель будет обращаться** к табл. 1.3, а также к приложениям А и Е по мере необходимости.

Таблица 1.3

Определения основных понятий теории конечных групп

Термин	Определение, примечания	Примеры для D_3
1. Конечная группа (обозначается G) [Все элементы множества различны по определению]	Конечное множество элементов $\{X_1 = E, X_2, X_3, \dots, X_g\}$ вместе с бинарной операцией, удовлетворяющие аксиомам: 1) замкнутости, 2) ассоциативности операции, 3) существования единичного элемента E группы, 4) существования обратного элемента для каждого элемента группы	$D_3 \parallel \begin{array}{c cccccc} E & J & K & L & M & N \\ \hline E & E & J & K & L & M & N \\ J & J & K & E & M & N & L \\ K & K & E & J & N & L & M \\ L & L & N & M & E & K & J \\ M & M & L & N & J & E & K \\ N & N & M & L & K & J & E \end{array}$
2. Порядок группы G (обозначается $ G $ или g)	Число g всех элементов группы G . (Группы обозначаются заглавными буквами, а их порядки — соответствующими строчными)	$ D_3 = g = 6$
3. Порядок элемента X группы G (обозначается $\text{ord}(X)$)	Наименьшее число p такое, что $X^p = E$. Подмножество $\mathbb{Z}_p = \{X, X^2, \dots, X^p = E\}$ называется <i>периодом элемента X</i> , или <i>циклической (абелевой) подгруппой</i> , порожденной элементом $X \in G$	Порядок элемента J равен 3, его период есть $\{J, K, E\}$; $\text{ord}(J) = \text{ord}(K) = 3$; $\text{ord}(L) = \text{ord}(M) = \text{ord}(N) = 2$
4. Подгруппа (обозначается H , ее порядок $ H $ или h)	Подмножество $H \subset G$, элементы которого образуют группу относительно бинарной операции группы G	Все 6 подгрупп: $\{E, J, K\}$, $\{E, L\}$, $\{E, M\}$, $\{E, N\}$; $\{E, J, \dots, N\}$, $\{E\}$
5. Собственная подгруппа группы G	Любая подгруппа группы G , кроме G и $E = \{E\}$ (подгруппы G и E называются <i>несобственными</i> , или <i>тривиальными</i>)	$H_1 = \{E, J, K\}$, $H_2 = \{E, L\}$, $H_3 = \{E, M\}$, $H_4 = \{E, N\}$
6. Абелева, или коммутативная группа порядка g	Если для всех элементов группы G имеет место равенство $X_i X_j = X_j X_i$, где $i, j = 1, \dots, g$, то G называется абелевой группой	Группа D_3 не абелева. Все 4 ее собственные подгруппы абелевы
7. Внутреннее произведение (умножение) подмножеств одной группы	Внутреннее произведение подмножеств $\{X_1, X_2, \dots\}$ и $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ группы определяется так: $\{X_1, X_2, \dots\}\{Y_1, Y_2, \dots\} = \{X_1 Y_1, X_1 Y_2, \dots, X_2 Y_1, X_2 Y_2, \dots\}$, где учитываются <i>только различные</i> элементы	$\{J, K\}\{L, M\} = \{JL, JM, KL, KM\} = \{L, M, N\}$. $\{J, L\}\{K, M\} \neq \{K, M\}\{J, L\}$

Продолжение табл. 1.3

Термин	Определение, примечания	Примеры для D_3
8. Левый смежный класс XH (или правый, HX) по подгруппе H , определенный элементом $X \in G$	<i>Внутреннее произведение</i> подмножеств вида $XH \equiv \{X\}H$ (или $HX \equiv H\{X\}$) группы G . ($ XH = HX = H = h$.) Множество всех левых смежных классов подгруппы H в группе G обозначается G/H (правых — $H \backslash G$). ($ G/H = H \backslash G = G / H = g/h$)	$D_3/H_4 = \{\{E, N\}, \{J, L\}, \{K, M\}\}$, $H_4 \backslash D_3 = \{\{E, N\}, \{J, M\}, \{K, L\}\}$, где $H_4 = \{E, N\}$ — одна из собственных подгрупп в группе D_3
9. Индекс $n := [G : H]$ подгруппы H в группе G	$n = g/h$ — отношение порядка g группы G к порядку h подгруппы H . По теореме Лагранжа n — целое положительное число	Индекс $[D_3 : H_1]$ подгруппы $H_1 = \{E, J, K\}$ в D_3 равен 2
10. Циклическая группа порядка g (обозначается $\mathbb{Z}_g$)	Группа вида $\mathbb{Z}_g = \{X, X^2, \dots, X^g = E\}$, т. е. все элементы группы — степени одного элемента X , который называется <i>генератором</i> (образующей) группы $\mathbb{Z}_g$. Она абелева	Все собственные подгруппы H_1, H_2, H_3, H_4 группы D_3 — циклические
11. Сопряженные элементы группы G . Центр группы	Элемент X_i называется <i>сопряженным</i> элементу X_j , если существует элемент $X \in G$ такой, что $X_j = X^{-1}X_iX$. Если $X_i = X^{-1}X_iX$ для всех $X \in G$, то X_i называется <i>центральный</i> элементом группы. Центр группы G состоит из всех центральных элементов, это абелева <i>нормальная подгруппа</i> в G	Элементы L и N — сопряженные, так как $K^{-1}LK = N$. Центр группы D_3 равен $E = \{E\}$. (Центр абелевой группы совпадает со всей группой)
12. Класс сопряженных элементов (обозначается $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_\nu$, где ν — число всех классов)	Подмножество элементов группы, каждый из которых сопряжен каждому элементу этого подмножества. Класс центрального элемента содержит только этот элемент. Число классов абелевой группы $\mathbb{Z}_g$ равно порядку группы g	Классы: $\mathcal{C}_1 = \{E\}$, $\mathcal{C}_2 = \{J, K\}$, $\mathcal{C}_3 = \{L, M, N\}$. (Разложение группы на классы: $D_3 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$)
13. Умножение классов сопряженных элементов группы	Произведение классов $\mathcal{C}_k \mathcal{C}_l$, определяемое как формальная сумма всех попарных произведений элементов из $\mathcal{C}_k$ и $\mathcal{C}_l$, является суммой классов с целыми неотрицательными коэффициентами. (Формальная сумма всех элементов класса $\mathcal{C}_k$ — элемент пространства $V(\Gamma_{\text{reg}})$ представления Γ_{reg})	$\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3 = 2\mathcal{C}_3$, где 2 означает, что элементы класса $\mathcal{C}_3$ входят в произведение $\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_3$ дважды. $\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_2 = (J + K)^2 = J^2 + JK + KJ + K^2 = 2\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$

Продолжение табл. 1.3

Термин	Определение, примечания	Примеры для D_3
14. Сопряженные подгруппы группы	Подгруппы H и H' группы G называются <i>сопряженными</i> , если существует такой элемент $X \in G$, что $H' = X^{-1}HX$ (здесь $X^{-1}HX$ обозначает подмножество всех элементов $X^{-1}YX$, где $Y \in H$)	Подмножества $H_2 = \{E, L\}$ и $H_4 = \{E, N\}$ представляют собой сопряженные подгруппы. (Можно убедиться, взяв в качестве X элемент M)
15. Нормальная (или инвариантная) подгруппа	Подгруппа H группы G называется <i>нормальной</i> , если $H = X^{-1}HX$ для всех элементов X из группы G (подгруппа H самосопряженная), т. е. левый и правый смежные классы идентичны: $XH = HX$. Группа G , не имеющая инвариантных подгрупп, кроме тривиальных (E и G), называется <i>простой</i>	$H_1 = \{E, J, K\}$ — единственная собственная нормальная подгруппа в группе D_3 . (Разложение H_1 на классы сопряженных элементов: $H_1 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$)
16. Фактор-группа G/H группы G по нормальной подгруппе H	На множестве всех левых G/H (или совпадающих с ними правых $H \backslash G$) смежных классов нормальной подгруппы H в группе G <i>внутреннее произведение</i> определяет структуру группы, которая называется фактор-группой. Порядок фактор-группы G/H равен $g/h = G / H $, т. е. индексу $n := [G:H]$ подгруппы H в группе G . Отметим, что $HH = H$	Фактор-группа D_3/H_1 содержит два смежных класса $H_1 = \{E, J, K\}$, $LH_1 = \{L, M, N\}$. $[D_3 : H_1] = 2$. Таблица умножения: $\begin{array}{c cc} D_3/H_1 & H_1 & LH_1 \\ \hline H_1 & H_1 & LH_1 \\ LH_1 & LH_1 & H_1 \end{array}$
17. Прямое (или декартово) произведение $G \times G'$ двух групп G и G'	Прямое произведение $G \times G'$ есть группа, содержащая все возможные упорядоченные пары (X_i, X'_j) , где $X_i \in G$, $X'_j \in G'$. Умножение элементов в группе $G \times G'$ задается равенством $(X_i, X'_j) \cdot (X_k, X'_l) = (X_i X_k, X'_j X'_l)$. Порядок группы $G \times G'$ равен gg' , т. е. $ G \times G' = G \cdot G' = gg'$. В группе $G \times G'$ единичный элемент — (E, E') , обратный — $(X_i, X'_j)^{-1} = (X_i^{-1}, (X'_j)^{-1})$	Прямое произведение групп $H_1 = \{E, J, K\}$ и $H_2 = \{E, L\}$, подгрупп в D_3 , образует циклическую группу $\mathbb{Z}_6 = H_1 \times H_2 = \{(E, E), (E, L), (J, E), (J, L), (K, E), (K, L)\}$ шестого порядка. Ее <i>генератором</i> является элемент (J, L)

Продолжение табл. 1.3

Термин	Определение, примечания	Примеры для $\mathbf{D}_3$
18. Изоморфизм групп (обозначается символом $\cong$)	Взаимно однозначное соответствие между двумя группами, сохраняющее умножение. Таблицы умножения изоморфных групп можно сделать идентичными, поменяв обозначения. Обычно изоморфные группы не различают	Группа $\mathbf{D}_3$ и группа $\mathbb{Z}_6 = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$ (прямое произведение групп $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$) не изоморфны. Подгруппа $\mathbf{H}_1 = \{E, J, K\}$ группы $\mathbf{D}_3$ изоморфна подгруппе $\{(E, E), (J, E), (K, E)\}$ группы $\mathbb{Z}_6$. $\mathbf{D}_3 \cong \mathbf{C}_{3v} = \{E, C_{3z}, C_{3z}^2, \sigma_{va}, \sigma_{vb}, \sigma_{vc}\}$
19. Гомоморфизм групп (обозначается $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}'$)	Отображение f множества $\mathbf{G}$ в множество $\mathbf{G}'$, сохраняющее умножение, т. е. $f(X_i X_j) = f(X_i) f(X_j)$ для всех $X_i, X_j \in \mathbf{G}$ (образ произведения равен произведению образов), и $f(E) = E'$. Обратимый гомоморфизм называется <i>изоморфизмом</i>	Отображение $\mathbf{D}_3 \rightarrow \mathbf{H}_2$, переводящее E, J, K в E , а L, M, N — в L , есть гомоморфизм группы $\mathbf{D}_3$ в ее подгруппу $\mathbf{H}_2 = \{E, L\}$. Например, $MN \mapsto LL = E$ согласуется с $MN = K \mapsto E$, где $\mapsto$ означает соответствие элементов
20. Представление Γ группы $\mathbf{G}$ в комплексном векторном пространстве V	<i>Гомоморфизм</i> Γ группы $\mathbf{G}$ в группу $\text{GL}(V)$ линейных операторов в комплексном векторном пространстве V , т. е. $\Gamma: \mathbf{G} \rightarrow \text{GL}(V)$. Элементу $X \in \mathbf{G}$ сопоставляется оператор $\Gamma(X)$. Размерностью представления Γ называется размерность пространства V ; $\dim(\Gamma) = \dim(V)$. Пространство V называется <i>пространством представления</i> Γ и обозначается $V(\Gamma)$	Тривиальное представление Γ_1 любой элемент группы $\mathbf{D}_3$ переводит в 1, оно одномерно. Отображение $E \mapsto 1, J \mapsto 1, K \mapsto 1, L \mapsto -1, M \mapsto -1, N \mapsto -1$ является одномерным представлением Γ_2 . Двумерное представление Γ_3 сопоставляет каждому элементу $\mathbf{D}_3$ преобразование плоскости, в которой лежит правильный треугольник
21. Регулярное представление Γ_{reg} группы	Пространство V представления Γ_{reg} группы $\mathbf{G}$ имеет в качестве базиса множество $\mathbf{G} = \{X_1, X_2, \dots, X_g\}$. Оператор (преобразование) $\Gamma_{\text{reg}}(X)$, где $X \in \mathbf{G}$, действует на базисные векторы так: $\Gamma_{\text{reg}}(X)X_i = XX_i, i = \overline{1, g}$; $\dim(\Gamma_{\text{reg}}) = \mathbf{G} $	Регулярное представление Γ_{reg} группы $\mathbf{D}_3$ шестимерно; $\dim(\Gamma_{\text{reg}}) = 6$. (Обычно вместо оператора $\Gamma(X)$ пишется X , например $\Gamma(E) = E, \Gamma(J) = J$ и т. д.)

Окончание табл. 1.3

Термин	Определение, примечания	Примеры для $\mathbf{D}_3$
22. Прямая сумма $\Gamma' \oplus \Gamma''$ представлений Γ' и Γ'' группы $\mathbf{G}$	Пусть Γ' и Γ'' — представления группы $\mathbf{G}$ в векторных пространствах V' и V'' . Тогда действие $X(v' \oplus v'') = \Gamma'(X)v' \oplus \Gamma''(X)v''$ группы $\mathbf{G}$ в прямой сумме $V' \oplus V''$ векторных пространств V' и V'' (для всех $X \in \mathbf{G}$, $v' \in V'$ и $v'' \in V''$) называется прямой суммой представлений Γ' и Γ'' и обозначается $\Gamma' \oplus \Gamma''$	Регулярное представление Γ_{reg} группы $\mathbf{D}_3$ раскладывается в <i>прямую сумму</i> трех ее <i>неприводимых представлений</i> $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ так: $\Gamma_{\text{reg}} \cong \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3$
23. Тензорное произведение $\Gamma' \otimes \Gamma''$ представлений Γ' и Γ'' группы $\mathbf{G}$	Пусть Γ' и Γ'' — представления группы $\mathbf{G}$ в векторных пространствах V' и V'' . Тогда действие $X(v' \otimes v'') = \Gamma'(X)v' \otimes \Gamma''(X)v''$ группы $\mathbf{G}$ в тензорном произведении $V' \otimes V''$ векторных пространств V' и V'' (для всех $X \in \mathbf{G}$, $v' \in V'$ и $v'' \in V''$) называется тензорным произведением Γ' и Γ'' представлений Γ' и Γ''	<i>Тензорное произведение</i> $\Gamma_3 \otimes \Gamma_3$ раскладывается в прямую сумму трех неприводимых представлений $\Gamma_3 \otimes \Gamma_3 \cong \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_3$
24. Подпредставление Γ' представления Γ группы $\mathbf{G}$ (представление Γ' , вложенное в Γ); $V'(\Gamma') \subset V(\Gamma)$	Пусть Γ' и Γ — представления группы $\mathbf{G}$ в векторных пространствах V' и V соответственно. Тогда Γ' называется подпредставлением представления Γ , если $V' \subset V$ и для всех $X \in \mathbf{G}$ и $v' \in V'$ имеем $\Gamma'(X)v' = \Gamma(X)v'$, т. е. для всех элементов X группы $\mathbf{G}$ оператор $\Gamma'(X) = \Gamma(X) _{V'}$	Пусть $\Gamma \cong \Gamma' \oplus \Gamma''$, тогда Γ' и Γ'' — подпредставления представления Γ
25. Неприводимое представление группы	Представление Γ называется неприводимым, если пространство представления $V(\Gamma)$ не содержит инвариантных векторных подпространств, кроме несобственных 0 и $V(\Gamma)$. Подпространство $V' \subset V(\Gamma)$ называется инвариантным, если для всех $X \in \mathbf{G}$ и $v' \in V'$ выполняется условие $\Gamma(X)v' \subset V'$ (или $Xv' \subset V'$)	Представления $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ группы $\mathbf{D}_3$ неприводимы. (Число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов группы)

1.2. Множество $\mathbf{G}$ элементов $\{X_1 = E, X_2, \dots\}$ с заданной на нем двухместной (бинарной) операцией $\circ$ называется *группой*, если:

1) операция $\circ$ определена для любой пары X_a и X_b элементов множества и $X_a \circ X_b \in \mathbf{G}$, 2) операция $\circ$ ассоциативна, т. е. $(X_a \circ X_b) \circ X_c = X_a \circ (X_b \circ X_c)$, 3) в множестве $\mathbf{G}$ существует единица E , т. е. такой элемент, что $E \circ X_a = X_a = X_a \circ E$ для всех X_a из $\mathbf{G}$, 4) каждый элемент $X_a \in \mathbf{G}$ обратим, т. е. в множестве $\mathbf{G}$ существует такой элемент X_a^{-1} , что $X_a^{-1} \circ X_a = E = X_a \circ X_a^{-1}$. При ослаблении условий 1) – 4) получаются различные обобщения понятия группы. Так, если выполнены условия 1), 2), 3), то $\mathbf{G}$ называется *полугруппой*.

Единичный (нулевой) элемент в группе может быть только один. Так, если E_1 и E_2 — единичные элементы, то $E_1 = E_1 E_2 = E_2 = E$. Для каждого элемента X_a обратный к нему элемент X_a^{-1} группы может быть только один. Так, если X_b и X_c обратные к X_a , то $X_b = X_b E = X_b (X_a X_c) = (X_b X_a) X_c = E X_c = X_c = X_a^{-1}$. Итак, обозначения E и X_a^{-1} корректны. Во всякой группе $(X_a X_b)^{-1} = X_b^{-1} X_a^{-1}$, но в общем случае $(X_a X_b)^{-1} \neq X_a^{-1} X_b^{-1}$. $\boxtimes$

1.3. Две системы обозначений и терминов для бинарных операций [мультипликативной ($\circ = \cdot$) и аддитивной ($\circ = +$)] в группах:

Умножение (произведение)	Сложение (обычно коммутативное)
Произведение: $X_a \cdot X_b \equiv X_a X_b$	Сумма: $X_a + X_b$
Единичный элемент: $E (= X_1)$	Нулевой элемент: $0 (= X_0)$
Обратный элемент: X_a^{-1}	Противоположный элемент: $-X_a$

$\boxtimes$

Теорема. В любом столбце (строке) таблицы умножения группы каждый элемент встречается один и только один раз.

Доказательство. Для элементов группы $\mathbf{G} = \{X_1 = E, X_2, \dots, X_g\}$, где g — порядок группы, справедливо утверждение: если X_a пробегает все элементы группы один раз, а X_b — некоторый фиксированный элемент группы, то произведения $X_b X_a$ (или $X_a X_b$) также пробегает всю группу один раз. Действительно, любой элемент X_c группы может быть получен умножением справа X_b на $X_a = X_b^{-1} X_c$. При этом среди произведений $X_b X_a$ не может быть повторяющихся. Так, если $X_b X_a = X_b X_c$, то, умножая это равенство на X_b^{-1} слева, получим $X_a = X_c$, что невозможно (ибо все элементы группы различны). Следовательно, для разных X_a все $X_b X_a$ разные. (Имеется в виду внутреннее произведение подмножеств; см. табл. 1.3.)

Следствие. Для произвольной функции f , определенной на элементах группы $\mathbf{G}$, имеем: $\sum_{X_a} f(X_a X_b) = \sum_{X_a} f(X_a)$, т. е. сумма по всем элементам группы (усреднение по группе $\mathbf{G}$) не зависит от элемента $X_b \in \mathbf{G}$.