БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

_______________А.Д.Король

15 июля 2024 г.

Регистрационный № 1826/б.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки

Профилизация: Искусственный интеллект и математическая экономика

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-07-2023, учебного плана №6-5.4-55/04 от 15.05.2024.

СОСТАВИТЕЛИ:

Н.В. Бровка, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор педагогических наук, профессор;

В.Г. Кротов, профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Т.С. Мардвилко, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

М.М. Логиновская, ассистент кафедры интеллектуальных методов моделирования механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А.Б. Антоневич, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Н.В. Гриб, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики УО «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка», кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории функций БГУ
(протокол № 13 от 30.05.2024);

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024)

Заведующий
кафедрой теории функций ________________ Н.В. Бровка

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Математический анализ» – создание базы для освоения основных понятий и методов современной математики.

Образовательная цель: изложение основ дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, знакомство с методами математических доказательств, изучение алгоритмов решения конкретных математических задач.

Задачи учебной дисциплины:

1. Формирование у студентов понятия числа.

2. Изучение понятия предела и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики;

3. Изучение основ дифференциального и интегрального исчисления;

4. Использование основ дифференциального и интегрального исчисления при решении задач математики, механики, математической физики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Математический анализ» относится к модулю «Математический анализ» 1 государственного компонента.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Математический анализ» является основой для преподавания большинства математических курсов. Наиболее тесной является связь с такими дисциплинами как «Дифференциальные уравнения», «Теория функций действительного переменного», «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики», «Экстремальные задачи», «Вариационное исчисление».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Математический анализ» должно обеспечить формирование следующих универсальных и базовых профессиональных компетенций:

универсальные **компетенции:**

Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации.

базовые профессиональные **компетенции:**

Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких вещественных переменных;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач математического анализа;

– новейшие достижения в области математического анализа и их приложения в задачах естествознания;

уметь:

– использовать основные результаты математического анализа в практической деятельности;

– использовать теоретические и практические навыки применения дифференциального и интегрального исчисления в математике;

иметь навык:

– интегрирования и дифференцирования функций, рядов и интегралов;

– аналитического исследования функций, рядов и интегралов на непрерывность, сходимость, равномерную сходимость;

– самообразования и использования аппарата математического анализа для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Учебная дисциплина изучается в 1, 2, 3 и 4 семестрах для очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Математический анализ» отведено:

– 1 семестр –

Всего: 234 часа, в том числе 144 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часа, лабораторные занятия – 64 часа, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

– 2 семестр –

Всего: 216 часов, в том числе 136 аудиторных часов, из них: лекции – 64 часа, лабораторные занятия – 60 часов, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

– 3 семестр –

Всего: 230 часа, в том числе 144 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 64 часа, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

– 4 семестр –

Всего: 216 часов, в том числе 136 аудиторных часов, из них: лекции – 64 часа, лабораторные занятия – 60 часов, управляемая самостоятельная работа – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 5 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет в 1, 2, 3 семестрах и экзамен в каждом семестре.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ I. Элементы теории множеств

Тема 1.1. Правила логического вывода. Множества, отношения, функции

Высказывания. Кванторы общности и существования. Множества и операции над ними. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения. Понятие отображения (функции). Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение. Отношение эквивалентности, рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Тема 1.2. Множество действительных чисел

Аксиоматика и модели множества действительных чисел. Важнейшие подмножества. Границы числовых множеств. Ограниченные множества. Точные границы множества. Теорема Дедекинда.

Принцип Архимеда. Позиционные системы счисления.

Понятие о мощности множества, основные мощности. Теорема Кантора о несчетности континуума.

РАЗДЕЛ II. Теория пределов

Тема 2.1. Предел последовательности

Ограниченные последовательности. Предел последовательности и его свойства. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

Тема 2.2. Предел функции

Определение предела функции по Коши и по Гейне. Общие свойства предела функции. Предел и операции над функциями. Предел функции и неравенства. Замечательные пределы.

Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Символы Харди и Ландау. Критерий Коши существования предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

Тема 2.3. Непрерывные функции

Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Критерий глобальной непрерывности монотонной функции и критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

Непрерывность элементарных функций и замечательные пределы.

РАЗДЕЛ III. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема 3.1. Дифференцируемые функции

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Связь непрерывности и дифференцируемости. Связь дифференцирования с операциями над функциями. Производная обратной функции. Производные высших порядков.

Экстремумы функции. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши). Правила Лопиталя.

Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши. Разложение элементарных функций.

Монотонность и знак производной. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

РАЗДЕЛ IV. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 4.1. Неопределенный интеграл

Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций. Интегрирование по частям и замена переменной.

Интегрирование рациональных функций, интегрирование некоторых иррациональностей.

Тема 4.2. Определенный интеграл Римана

Примеры задач, приводящих к понятию интеграла. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.

Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций.

Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении.

Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

Тема 4.3. Приложения определенного интеграла

Длина пространственной кривой, площадь криволинейной трапеции, площадь поверхности вращения, объем тела вращения.

Тема 4.4. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы и их свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признаки Абеля и Дирихле для условной сходимости.

РАЗДЕЛ V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Тема 5.1. Метрические пространства

Метрика, шары, открытые множества. Внутренние точки множества, внутренность. Предельные и изолированные точки множества. Замкнутые множества, замыкание, граница. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств. Компактные и связные множества.

Предел последовательности и функции в метрическом пространстве. Непрерывность функции на метрическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества. Теорема Гейне-Бореля.

Непрерывные функции на метрических пространствах. Теоремы о непрерывном образе компакта и связного множества. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Тема 5.2. Дифференцируемые функции многих переменных

Линейные формы на R^d, гиперплоскость, общий вид линейной формы. Дифференцируемость, производная и ее свойства. Формула Лагранжа.

Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца.

Полином Тейлора, формула Тейлора.

Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра. Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Тема 5.3. Дифференцируемые векторные функции

Векторные функции, компоненты. Линейные отображений из R^n в R^m. Дифференцируемые векторные функции. Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции.

Гомеоморфизм. Теорема Брауера. Теорема об обратной функции. Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

РАЗДЕЛ VI. Теория рядов

Тема 6.1. Числовые ряды

Ряд, слагаемые ряда, частные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши.

Положительные ряды, критерий сходимости. Признак сравнения и его различные формы. Признак Коши. Теорема Куммера. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши.

Абсолютная и условная сходимость, связь между ними. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Ассоциативность и коммутативность в теории рядов. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Тема 6.2. Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость, критерий Коши. Теорема о перестановке предельных переходов. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини.

Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.

Тема 6.3. Ряды Фурье

Тригонометрическая система, ряды Фурье. Интегральные представления для сумм Фурье.

Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема Дирихле-Жордана.

РАЗДЕЛ VII. Интегралы, зависящие от параметра

Тема 7.1. Интегралы, зависящие от параметра

Элементарная теория. Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле. Гамма- и бета-функции Эйлера.

РАЗДЕЛ VIII. Интеграл Римана в R^d

Тема 8.1. Мера Жордана в R^d

Построение меры Жордана на евклидовых пространствах. Критерии измеримости. Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, неизмеримое по Жордану множество.

Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Тема 8.2. Интеграл Римана в R^d

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану. Необходимое условие интегрируемости. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега.

Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность. Неравенства для интеграла. Мера декартова произведения измеримых множеств. Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия.

Тема 8.3. Замена переменной в интеграле Римана в R^d

Замена переменной в интеграле Римана. Примеры.

РАЗДЕЛ IX. Криволинейные интегралы и формула Грина

Тема 9.1. Функции ограниченной вариации

Функции ограниченной вариации. Аддитивность и непрерывность вариации. Теорема Жордана. Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости.

Тема 9.2. Интеграл Римана-Стилтьеса

Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям). Условия существования интеграла Стилтьеса, оценка интеграла. Формулы для вычисления с помощью интеграла Римана.

Тема 9.3. Криволинейные интегралы

Интегралы вдоль путей. Жордаовы кривые и контуры, их прараметризации и ориентация. Натуральная параметризация. Интегралы по жордановым кривым.

Тема 9.4. Формула Грина

Формула Грина. Односвязные области. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Первообразная функции многих переменных.

РАЗДЕЛ X. Поверхностные интегралы. Теория поля

Тема 10.1. Параметрические поверхности

Параметрические поверхности и параметризации. Площадь поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности, ориентация. Поверхности с краем.

Тема 10.2. Поверхностные интегралы первого и второго рода

Поверхностные интегралы первого и второго рода и их приложения.

Тема 10.3. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского

Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.

Тема 10.4. Теория поля

Теория поля. Потенциальные и соленоидальные поля.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР (аудиторный контроль)	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Элементы теории множеств**	**16**			**14**		**2**	
1.1	Правила логического вывода. Множества, отношения, функции	6			8			Опрос
1.2	Множество действительных чисел	10			6		2	контрольная работа по разделу 1
2	**Теория пределов**	**26**			**30**		**6**	
2.1	Предел последовательности	10			14		4	коллоквиум, контрольная работа
2.2	Предел функции	4			10			Опрос
2.3	Непрерывные функции	12			6		2	контрольная работа по разделам 2.2 и 2.3
3	**Дифференциальное исчисление функций одной переменной**	**26**			**20**		**4**	
3.1	Дифференцируемые функции	26			20		4	коллоквиум, контрольная работа
	Всего за 1 семестр	**68**			**64**		**12**	

4	**Интегральное исчисление функций одной переменной**	**30**			**34**		**8**	
4.1	Неопределенный интеграл	6			12		2	контрольная работа
4.2	Определенный интеграл Римана	14			12		2	контрольная работа
4.3	Приложения определенного интеграла	4			6			Опрос
4.4	Несобственные интегралы	6			4		4	коллоквиум, контрольная работа
5	**Дифференциальное исчисление функций многих переменных**	**34**			**26**		**4**	
5.1	Метрические пространства	10			8			Опрос
5.2	Дифференцируемые функции многих переменных	14			12		2	коллоквиум
5.3	Дифференцируемые векторные функции	10			6		2	контрольная работа по разделу 5
	Всего за 2 семестр	**64**			**60**		**12**	
6	**Теория рядов**	**52**			**50**		**8**	
6.1	Числовые ряды	18			20		2	контрольная работа
6.2	Функциональные последовательности и ряды	16			20		4	коллоквиум, контрольная работа
6.3	Ряды Фурье	18			10		2	контрольная работа
7	**Интегралы, зависящие от параметра**	**16**			**14**		**4**	
7.1	Интегралы, зависящие от параметра	16			14		4	коллоквиум, контрольная работа
	Всего за 3 семестр	**68**			**64**		**12**	
8	**Интеграл Римана в R^d**	**22**			**28**		**6**	
8.1	Мера Жордана в R^d	4			4			Опрос
8.2	Интеграл Римана в R^d	14			12		2	контрольная работа
8.3	Замена переменной в интеграле Римана в R^d	4			12		4	коллоквиум по разделу 8,

								контрольная работа
9	**Криволинейные интегралы и формула Грина**	**24**			**20**		**4**	
9.1	Функции ограниченной вариации	4			2			Опрос
9.2	Интеграл Римана-Стилтьеса	4			2			Опрос
9.3	Криволинейные интегралы	8			12			Опрос
9.4	Формула Грина	8			4		4	коллоквиум по разделу 9, контрольная работа по разделу 9,
10	**Поверхностные интегралы. Теория поля**	**18**			**12**		**2**	
10.1	Параметрические поверхности	4						Опрос
10.2	Поверхностные интегралы первого и второго рода	6			8		2	контрольная работа
10.3	Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского	4			2			Опрос
10.4	Теория поля	4			2			Опрос
	Всего за 4 семестр	**64**			**60**		**12**	
	Всего по дисциплине	**264**			**248**		**48**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Зорич, В. А. Математический анализ : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика и направлениям 01.03.01 Математика, 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 02.03.01 Математика и компьютерные науки : в 2 ч. / В. А. Зорич. - Изд. 12-е, стер. - Москва : МЦНМО, 2023.
2. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие [для студентов физических и механико-математических специальностей вузов] / Б. П. Демидович. - Изд. 24-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 623 с. – URL: https://reader.lanbook.com/book/332675.
3. Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2022. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 1 / [И. Л. Васильев и др.]. – 2022. – 293 с.
4. Математический анализ. Задачи и упражнения : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по математическим специальностям : в 3 ч. – Минск : Вышэйшая школа, 2023. (Для студентов учреждений высшего образования). Ч. 2 / [С. А. Бондарев и др.]. – 2023. – 355 с.
5. Бровка, Н. В. Практикум по математическому анализу : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 1 / Н. В. Бровка, А. В. Ляцкая, А. П. Карпова – Минск : БГУ, 2023. – 455 с. – (Классическое университетское издание). – URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/303294.

Дополнительная литература

1. Кротов, В. Г. Математический анализ : учеб. пособие для студ. уво по математическим спец. / В. Г. Кротов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2017. - 375 с. – URL:http://elib.bsu.by/handle/123456789/191394.
2. Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.
3. С. М. Никольский. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука. 1990 и другие издания.
4. Э. И. Зверович. Вещественный и комплексный анализ. Т. 1–6. Минск: Вышэйшая школа, 2008.
5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. М.: Наука. 2001 и другие издания.

6. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Диффе-ренциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды : Учебник. – 5-е изд., перераб. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 444 с.

7. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т.2. Диффе-ренциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ : Учебник. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 467 с.

8. Сборник задач по математическому анализу /Под ред. Л. Д. Кудрявцева, М.: Наука, Т. 1. – 1984, Т. 2. – 1986, Т. 3 – 1994 и другие издания.

9. В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. Математический анализ. М.: Наука, 1985 и другие издания.

10. А. М. Тер-Крикоров, И. И. Шабунин. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

11. У. Рудин. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976 и другие издания.

12. Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.

13. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Перечень рекомендуемых средств диагностики:

– Контрольная работа
– Коллоквиум
– Опрос

Формой промежуточной аттестации учебным планам предусмотрены **зачет** в 1, 2, 3 семестрах и **экзамен** в каждом семестре.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

– Контрольные работы – 50 %;
– Коллоквиумы – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) 40 % и экзаменационной отметки 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

В качестве управляемой самостоятельной работы студенты выполняют коллоквиумы и контрольные работы по соответствующим разделам/темам учебной дисциплины.

Перечень коллоквиумов:

Тема 2.1 Предел последовательности (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Ограниченные последовательности.

Предел последовательности и его свойства.

Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности.

Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 3.1 Дифференцируемые функции (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Задачи, приводящие к понятию производной.

Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

Производные элементарных функций.

Правила дифференцирования.

Связь непрерывности и дифференцируемости.

Связь дифференцирования с операциями над функциями.

Производная обратной функции.

Производные высших порядков.

Экстремумы функции.

Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

Правила Лопиталя.

Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши.

Разложение элементарных функций.

Монотонность и знак производной.

Достаточные условия экстремума.

Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 4.4 Несобственные интегралы (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Несобственные интегралы и их свойства.

Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле.

Главное значение по Коши.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Абсолютная и условная сходимость.

Признак сравнения для интегралов от положительных функций.

Признак Абеля-Дирихле для условной сходимости.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 5.2 Дифференцируемые функции многих переменных (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Линейные формы на R^d, гиперплоскость, общий вид линейной формы.

Дифференцируемость, производная и ее свойства.

Формула Лагранжа.

Частные производные.

Достаточное условие дифференцируемости.

Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.

Частные производные высших порядков.

Теорема Шварца.

Полином Тейлора, формула Тейлора.

Квадратичные формы и их матрицы.

Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Локальные экстремумы функции.

Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции.

Достаточное условие экстремума.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 6.2 Функциональные последовательности и ряды (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Равномерная сходимость, критерий Коши.

Теорема о перестановке предельных переходов.

Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.

Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда.

Теорема Дини.

Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.

Форма контроля – коллоквиум.

Тема 7.1 Интегралы, зависящие от параметра (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Интегралы по конечному промежутку, зависящие от параметра и их свойства.

Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Двойные несобственные интегралы от параметра.

Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле.

Гамма- и бета-функции Эйлера.

Форма контроля – коллоквиум.

Раздел 8. Интеграл Римана в R^d (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Построение меры Жордана на евклидовых пространствах.

Критерии измеримости.

Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Определение интеграла Римана на множестве, измеримом по Жордану.

Необходимое условие интегрируемости.

Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу.

Классы интегрируемых функций. Критерий Лебега.

Свойства интеграла Римана: интегрируемость на подмножестве, аддитивность, линейность, монотонность.

Мера декартова произведения измеримых множеств.

Теорема об интеграле по декартовому произведению множеств (теорема Фубини) и ее следствия.

Замена переменной в интеграле Римана.

Форма контроля – коллоквиум.

Раздел 9. Криволинейные интегралы и формула Грина (2 ч.)

Примерный перечень вопросов:

Функции ограниченной вариации.

Аддитивность и непрерывность вариации.

Теорема Жордана. Спрямляемый путь и его длина. Критерий Жордана спрямляемости.

Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства (линейность, аддитивность, формула интегрировании по частям).

Условия существования интеграла Римана-Стилтьеса, оценка интеграла.

Интегралы вдоль путей.

Жордаовы кривые и контуры, их прараметризации и ориентация. Натуральная параметризация.

Интегралы по жордановым кривым.

Формула Грина.

Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Первообразная функции многих переменных.

Форма контроля – коллоквиум.

Перечень контрольных работ:

Раздел 1. Элементы теории множеств (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1) Доказать тождество

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

2) Пользуясь формулой бинома Ньютона, найти наибольший коэффициент разложения многочлена $(2+3x)^{12}$.

3) Пусть

$$X=\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Найти $\inf X$ и $\sup X$.

4) Является ли число $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ рациональным?

Тема 2.1. Предел последовательности (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1) Сформулировать определения того, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

а) на языке «$\varepsilon-\delta$»,

б) с помощью понятия окрестности,

в) доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{7n^2+n}=\dfrac{3}{7}$.

2) Установить, является ли последовательность $a_n=(3^{(-1)^n}+4^{(-1)^{n+1}n})^{1/n}$ сходящейся и обосновать ответ

3) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n^{12}-1)(4n+2)^{12}}{(3n^2+2)^6(n+4)^{14}}$.

4) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{3^n+2}{3^n}\right)^{2\cdot 3^n-1}+\dfrac{5n\cos^3 n}{2n^2+1}\right)$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 2.2. Предел функции. Тема 2.3 Непрерывные функции (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1) Запишите определение на языке «$\varepsilon-\delta$» следующего утверждения и приведите соответствующий пример $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$

2) Используя определение понятия предела, докажите, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+7}}=\frac{1}{3}.$$

3) Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2 3^x}{1+x^2 4^x}\right)^{\frac{1}{tg^2 x}}$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos x}-1}{\ln\sin x}$

4. Исследовать функцию на непрерывность, выяснить характер точек разрыва и построить график

а) $y=|x|-\frac{\pi}{2}$ при $|x|\le-\frac{\pi}{2}$, $y=\operatorname{ctg}x$ при $-\frac{\pi}{2}<x<0$, $y=\operatorname{arctg}x$ при $x\ge 0$,

b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$

5. Доказать, что уравнение $x^5-6x^2+3x-7=0$ имеет решения на отрезке $[0,2]$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 3.1. Дифференцируемые функции (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1) Найти производные функций

а) $y=x^3-3x^2+4x-1$, b) $y=e^{2\sin 5x+3\cos 2x}$, c) $y=\frac{e^x\cos x}{x+\sin x}$.

2) Построить графики функции, определив экстремумы, интервалы монотонности и интервалы выпуклости

а) $y=x^3-2x^2+1$, b) $y=x^2e^x$, c) $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 4.1. Неопределенный интеграл (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

Найти неопределенные интегралы

1) $\int\cos^\alpha x\sin x dx$, 2) $\int\frac{xdx}{2x^2+3x+5}$, 3) $\int x\arcsin(x-1)dx$, 4) $\int x\arcsin(x-1)dx$,

5) $\int\frac{(1+\sin x)^2dx}{1+\cos x}$, 6) $\int\frac{arctg\sqrt{x}dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, 7) $\int e^x\sin^2 xdx$, 8) $\int\sqrt{x}\arcsin\sqrt{1-x}dx$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 4.2 Определенный интеграл Римана (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Вычислить по определению $\int_0^1 xdx$.

2. Вычислить

a) $\int_0^{\pi}(3-2x)\cos\frac{x}{2}dx$, b) $\int_0^{16}\sqrt{256-x^2}dx$, c) $\int_0^{16}\frac{1+\ln(x+1)}{x+1}dx$

3. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

a) $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$,

b) $\rho=1$ ($\rho\geq 1$), $\rho=2\cos 3\varphi$

4. Вычислить длину кривой $x=5(t-\sin t)$, $x=5(t-\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 4.4. Несобственные интегралы (2 ч.)
Примерный вариант заданий:
Определить сходимость несобственных интегралов

a) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$, b) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x|\ln x|^p}$, c) $\int_0^2 x\ \ln x dx$, d) $\int_0^2 x\ e^{-x}dx$, e) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx, \alpha\in(0,1)$

Форма контроля – контрольная работа.

Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Найти частные производные и выписать полный дифференциал функции

$$z=\sin\frac{x+y}{x-y}.$$

2. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$$

3. Найти матрицу Якоби функции

a) $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$, b) $f(r,\varphi,\theta)=(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$.

4. Проверить условия теоремы об обратной функции для $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$ и найти области обратимости.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6.1. Числовые ряды (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{6}{36k^2-24k-5}$

2. Исследовать ряды на сходимость

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{3^{n^2}}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n+1}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(an)}{n+2}\right)^{n}, a>0$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\sqrt{n}x}{n^{\alpha}}, x>0$, b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{8}}{n^{\alpha}}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6.2. Функциональные последовательности и ряды (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Найти предельную функцию последовательности на указанном множестве

a) $f_n(x)=n^2\left(1-cos\dfrac{\sqrt[4]{x}}{n}\right), x\in[0,\infty)$, b) $f_n(x)=n^2\left(x^{\frac{1}{2n^2}}-1\right), x\in[0,\infty)$.

2. Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на указанном множестве

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3arctg\, n\sqrt{x}}{x^4+n\sqrt[3]{n}}, x\in\square$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3x)^n}{n\sqrt{n+x}}, x\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

3. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+(-1)^n)^n}{n^2+2}(x-4)^n$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2+(-1)^n\cdot 3)^n}{n}(x+2)^n$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 6.3 Ряды Фурье (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Разложить в ряд Фурье функцию $y=\operatorname{sign}\sin x$. Пользуясь этим разложением, вычислить $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$

2. Разложить функцию $y=x$ в ряд Фурье..

3. Функцию $y=|x|$ разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 7.1 Интегралы, зависящие от параметра (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Найти области равномерной сходимости несобственных интегралов от параметра

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^y}$, b) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^y}$, c) b$\int_1^\infty x^y e^{-x^y} dx$, d) $\int_0^\infty (y^3+x)e^{-yx^2} dx$.

2. Доказать равномерную сходимость интеграла на указанном множестве S

a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$, $S=[0,\infty)$

b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x^2y^2}$, $S=(-\infty,+\infty)$.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 8.2 Интеграл Римана в $\mathbb{R}^{d.}$ (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Изменить порядок интегрирования

a) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$, b) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$, c) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

2. Вычислить интеграл

$$\iint_G (x^2+y^2)dxdy, \qquad G=\{1\le y\le 3, x\le y\le x+1\}.$$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 8.3 Замена переменной в интеграле Римана (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядках

a) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, b) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$, c) $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f(x,y)dy$

2. Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми

a) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2 \ge a^2$,

b) $(x^2+y^2)^2 = a(x^2-3xy^2)$,

c) $(x^2+y^2)^2=8axy$, $(x-a)^2+(y-a)^2\le a^2$.

Форма контроля – контрольная работа.

Раздел 9. Криволинейные интегралы и формула Грина (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1.Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода

a) $\oint\limits_C (x+y)ds$, C - треугольник с вершинами в точках $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$,

b) $\oint\limits_C y^2 ds$, C - арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$,

c) $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, C - окружность $x^2+y^2=ax$.

2. Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода

a) $\oint\limits_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, C - парабола $y=x^2, x\in[-1,1]$, ориентированная возрастанием x,

b) $\oint\limits_C (x+y)dx+(x-y)dy$, C - положительно ориентированный эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,

c) $\oint\limits_C (2a-y)dx+xdy$, C - арка циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 10.2 Поверхностные интегралы первого и второго рода (2 ч.)
Примерный вариант заданий:

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_S xyz d\sigma,$$

где S – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy,$$

где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Форма контроля – контрольная работа.

Примерная тематика лабораторных занятий

1 семестр

Занятие № 1. Высказывания. Кванторы общности и существования. Множества и операции над ними.

Занятие № 2. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения.

Занятие № 3. Понятие отображения (функции). Сюръекция, инъекция, биекция. Обратное отображение.

Занятие № 4. Отношение эквивалентности, рефлексивности, симметричности, транзитивности.

Занятие № 5. Аксиоматика и модели множества действительных чисел. Важнейшие подмножества. Границы числовых множеств. Ограниченные множества Точные границы множества. Теорема Дедекинда.

Занятие № 6. Принцип Архимеда. Позиционные системы счисления.

Занятие № 7. Понятие о мощности множества, основные мощности. Теорема Кантора о несчетности континуума.

Занятие № 8. Ограниченные последовательности. Предел последовательности и его свойства.

Занятие № 9. Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах.

Занятие № 10. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Занятие № 11. Теорема о сходимости монотонных последовательностей. Число Эйлера.

Занятия № 12, 13. Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности.

Занятие № 14. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.

Занятие № 15. Определение предела функции по Коши и по Гейне. Общие свойства предела функции. Предел и операции над функциями.

Занятие № 16. Предел функции и неравенства. Замечательные пределы.

Занятие № 17. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Символы Харди и Ландау.

Занятие № 18. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Символы Харди и Ландау.

Занятие № 19. Критерий Коши существования предела функции. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции

Занятие № 20. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции.

Занятие № 21. Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши. Теорема о непрерывном образе отрезка. Равномерная непрерывность, теорема Кантора. Колебание функции.

Занятие № 22. Критерий глобальной непрерывности монотонной функции и критерий взаимной однозначности непрерывной функции. Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

Непрерывность элементарных функций и замечательные пределы.

Занятие № 23. Задачи, приводящие к понятию производной. Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

Занятие № 24. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Связь непрерывности и дифференцируемости.

Занятие № 25, 26. Связь дифференцирования с операциями над функциями. Производная обратной функции. Производные высших порядков.

Занятие № 27. Экстремумы функции. Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

Занятие № 28. Правила Лопиталя.

Занятие № 29. Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши.

Занятие № 30. Разложение элементарных функций.

Занятие № 31. Монотонность и знак производной. Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

Занятие № 32. Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости. Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

2 семестр

Занятие № 1. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.

Занятие № 2. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций.

Занятие № 3. Интегрирование по частям и замена переменной.

Занятия № 4, 5. Интегрирование рациональных функций.

Занятие № 6. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Занятие № 7. Примеры задач, приводящих к понятию интеграла. Определение интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.

Занятие № 8. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Классы интегрируемых функций.

Занятие № 9. Свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении.

Занятия № 10, 11. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.

Занятие № 12. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.

Занятие № 13. Длина пространственной кривой, площадь криволинейной трапеции.

Занятие № 14. Площадь поверхности вращения.

Занятие № 15. Объем тела вращения

Занятие № 16. Несобственные интегралы и их свойства. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле. Главное значение по Коши. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Занятие № 17. Абсолютная и условная сходимость. Признак сравнения для интегралов от положительных функций. Признак Абеля-Дирихле для условной сходимости.

Занятие № 18. Метрика, шары, открытые множества. Внутренние точки множества, внутренность. Предельные и изолированные точки множества. Замкнутые множества, замыкание, граница. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств. Компактные и связные множества.

Занятия № 19. Предел последовательности и функции в метрическом пространстве. Непрерывность функции на метрическом пространстве. Глобальный критерий непрерывности. Ограниченные множества. Последовательность Коши, полнота метрического пространства. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.

Занятие № 20. Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества. Теорема Гейне-Бореля.

Занятие № 21. Непрерывные функции на метрических пространствах. Теоремы о непрерывном образе компакта и связного множества. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Занятие № 22. Линейные формы на R^d, гиперплоскость, общий вид линейной формы. Дифференцируемость, производная и ее свойства. Формула Лагранжа.

Занятия № 23, 24. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл. Частные производные высших порядков. Теорема Шварца.

Занятие № 25. Полином Тейлора, формула Тейлора.

Занятия № 26, 27. Квадратичные формы и их матрицы. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра. Локальные экстремумы функции. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции. Достаточное условие экстремума.

Занятие № 28. Векторные функции, компоненты. Линейные отображений из R^n в R^m. Дифференцируемые векторные функции.

Свойства производной и связь с производными компонент. Матрица Якоби. Производная композиции.

Занятие № 29. Гомеоморфизм. Теорема Брауера. Теорема об обратной функции.

Занятие № 30. Теорема о неявной функции. Формулы для определения производных неявной функции.

3 семестр

Занятия № 1, 2. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда. Операции над сходящимися рядами. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши.

Занятие № 3, 4. Положительные ряды, критерий сходимости. Признак сравнения и его различные формы.

Занятие № 5, 6. Признак Коши. Теорема Куммера. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши.

Занятия № 7, 8, 9. Абсолютная и условная сходимость, связь между ними. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды Лейбница.

Занятие № 10. Ассоциативность и коммутативность в теории рядов. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.

Занятие № 11, 12. Равномерная сходимость, критерий Коши. Теорема о перестановке предельных переходов.

Занятие № 13, 14. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.

Занятие № 15, 16. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини.

Занятие № 17, 18. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.

Занятие № 19, 20. Степенные ряды.

Занятие № 21, 22. Тригонометрическая система, ряды Фурье. Интегральные представления для сумм Фурье.

Занятие № 23, 24. Лемма Римана-Лебега. Принцип локализации. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье. Теорема Дирихле-Жордана.

Занятия № 25. Ряды Фурье $2l$-периодических функций.

Занятия № 26. Интегралы по конечному промежутку, зависящие от параметра и их свойства.

Занятие № 27, 28. Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Занятие № 29. Двойные несобственные интегралы от параметра.

Занятие № 30. Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле.

Занятие № 31, 32. Гамма- и бета-функции Эйлера.

4 семестр

Занятия № 1, 2. Построение меры Жордана на евклидовых пространствах. Критерии измеримости. Примеры: площадь криволинейной трапеции, площадь круга, неизмеримое по Жордану множество. Свойства меры Жордана (монотонность, аддитивность, субаддитивность).

Занятие № 3. Двойной интеграл.

Занятие № 4. Сведение двойного интеграла к повторному.

Занятие № 5. Замена переменных в двойном интеграле.

Занятие № 6. Вычисление площадей.

Занятие № 7. Некоторые приложения двойных интегралов.

Занятие № 8. Вычисление объемов.

Занятия № 9, 10. Тройные интегралы.

Занятие № 11. Замена переменных в тройном интеграле.

Занятие № 12. Цилиндрические координаты.

Занятие № 13. Сферические координаты.

Занятие № 14. Некоторые приложения тройных интегралов.

Занятие № 15. Функции ограниченной вариации.

Занятие № 16. Интеграл Стилтьеса.

Занятия № 17, 18, 19. Криволинейные интегралы первого рода и их приложения.

Занятия № 20, 21, 22. Криволинейные интегралы второго рода и их приложения.

Занятие № 23. Формула Грина. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла.

Занятие № 24. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.

Занятие № 25, 26. Поверхностные интегралы первого рода.

Занятие № 27, 28. Поверхностные интегралы второго рода.

Занятие № 29. Формулы Стокса и Гаусса-Остроградского.

Занятие № 30. Теория поля.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает*:*

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Математический анализ» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и промежуточной аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1 Высказывания. Кванторы общности и существования.
2 Множества и операции над ними.
3 Декартово произведение множеств.
4 Бинарные отношения. Понятие отображения (функции).
5 Сюръекция, инъекция, биекция.
6 Обратное отображение.
7 Отношение эквивалентности, рефлексивности, симметричности, транзитивности.
8 Аксиоматика и модели множества действительных чисел.
9 Важнейшие подмножества.
10 Границы числовых множеств.
11 Ограниченные множества.
12 Точные границы множества.
13 Теорема Дедекинда.
14 Принцип Архимеда.
15 Позиционные системы счисления.
16 Понятие о мощности множества, основные мощности.
17 Теорема Кантора о несчетности континуума.
18 Ограниченные последовательности.
19 Предел последовательности и его свойства.
20 Предел и операции над последовательностями, предельный переход в неравенствах.
21 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
22 Теорема о сходимости монотонных последовательностей.
23 Число Эйлера.
24 Различные формы полноты множества действительных чисел (лемма Бореля-Лебега о покрытиях, лемма Больцано-Вейерштрасса, критерий Коши сходимости последовательности.
25 Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности и их свойства.
26 Определение предела функции по Коши и по Гейне.
27 Общие свойства предела функции.
28 Предел и операции над функциями.
29 Предел функции и неравенства.
30 Замечательные пределы.
31 Пределы на бесконечности и бесконечные пределы.
32 Символы Харди и Ландау.
33 Критерий Коши существования предела функции.
34 Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
35 Непрерывность функции в точке.

36 Локальные свойства непрерывных функций (ограниченность, сохранение знака) и арифметические операции над непрерывными функциями.

37 Непрерывность композиции.

38 Теоремы Вейерштрасса и теоремы Больцано-Коши.

39 Теорема о непрерывном образе отрезка.

40 Равномерная непрерывность, теорема Кантора.

41 Колебание функции.

42 Критерий глобальной непрерывности монотонной функции и критерий взаимной однозначности непрерывной функции.

43 Классификация разрывов функции. Теорема о множестве точек разрыва монотонной функции.

44 Непрерывность элементарных функций и замечательные пределы.

45 Задачи, приводящие к понятию производной.

46 Производная и дифференцируемость. Дифференциал.

47 Производные элементарных функций.

48 Правила дифференцирования.

49 Связь непрерывности и дифференцируемости.

50 Связь дифференцирования с операциями над функциями.

51 Производная обратной функции.

52 Производные высших порядков.

53 Экстремумы функции.

54 Лемма Ферма, основные теоремы о дифференцируемых функциях (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши).

55 Правила Лопиталя.

56 Формула Тейлора с остатками Пеано, Лагранжа и Коши.

57 Разложение элементарных функций.

58 Монотонность и знак производной.

59 Достаточные условия экстремума. Алгоритм отыскания глобального экстремума.

60 Выпуклые функции и их свойства, условия выпуклости.

61 Выпуклость элементарных функций. Неравенство Йенсена и его приложения.

2 семестр

1. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.
2. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций.
3. Интегрирование по частям и замена переменной.
4. Интегрирование рациональных функций.
5. Интегрирование некоторых иррациональностей.
6. Примеры задач, приводящих к понятию интеграла.
7. Определение интеграла Римана.
8. Необходимое условие интегрируемости.
9. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу.
10. Классы интегрируемых функций.
11. Свойства определенного интеграла.

12. Теоремы о среднем значении.
13. Формула Ньютона-Лейбница.
14. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле.
15. Формула Тейлора с остатком в виде интеграла.
16. Длина пространственной кривой.
17. Площадь криволинейной трапеции.
18. Площадь поверхности вращения.
19. Объем тела вращения.
20. Несобственные интегралы и их свойства.
21. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле.
22. Главное значение по Коши.
23. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
24. Абсолютная и условная сходимость.
25. Признак сравнения для интегралов от положительных функций.
26. Признак Абеля-Дирихле для условной сходимости.
27. Метрика, шары, открытые множества.
28. Внутренние точки множества, внутренность.
29. Предельные и изолированные точки множества.
30. Замкнутые множества, замыкание, граница.
31. Теорема двойственности открытых и замкнутых множеств.
32. Компактные и связные множества.
33. Предел последовательности и функции в метрическом пространстве.
34. Непрерывность функции на метрическом пространстве.
35. Глобальный критерий непрерывности.
36. Ограниченные множества.
37. Последовательность Коши, полнота метрического пространства.
38. Замкнутые шары, теорема Кантора о вложенных замкнутых шарах.
39. Евклидово пространство: скалярное произведение и его свойства, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, норма, координатная сходимость, полнота, важнейшие подмножества. Теорема Гейне-Бореля.
40. Непрерывные функции на метрических пространствах.
41. Теоремы о непрерывном образе компакта и связного множества.
42. Равномерно непрерывные функции на метрическом пространстве.
43. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
44. Линейные формы на R^d, гиперплоскость, общий вид линейной формы.
45. Дифференцируемость, производная и ее свойства.
46. Формула Лагранжа.
47. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости.
48. Производная по направлению, градиент, его геометрический смысл.
49. Частные производные высших порядков.
50. Теорема Шварца.
51. Полином Тейлора, формула Тейлора.
52. Квадратичные формы и их матрицы.

53. Знакопостоянные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
54. Локальные экстремумы функции.
55. Необходимые условия экстремума, стационарные точки функции.
56. Достаточное условие экстремума.
57. Векторные функции, компоненты.
58. Линейные отображений из R^n в R^m.
59. Дифференцируемые векторные функции.
60. Свойства производной и связь с производными компонент.
61. Матрица Якоби.
62. Производная композиции.
63. Гомеоморфизм.
64. Теорема Брауера.
65. Теорема об обратной функции.
66. Теорема о неявной функции.
67. Формулы для определения производных неявной функции.

3 семестр

1. Ряд, слагаемые ряда, частные суммы.
2. Сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда.
3. Остатки ряда, связь сходимости остатков со сходимостью ряда.
4. Операции над сходящимися рядами.
5. Необходимое условие сходимости ряда.
6. Критерий Коши.
7. Положительные ряды, критерий сходимости.
8. Признак сравнения и его различные формы.
9. Признак Коши.
10. Теорема Куммера.
11. Признаки Даламбера, Раабе, Бертрана, Гаусса.
12. Интегральный признак Коши.
13. Абсолютная и условная сходимость, связь между ними.
14. Преобразование Абеля.
15. Признаки Абеля и Дирихле.
16. Ряды Лейбница.
17. Ассоциативность и коммутативность в теории рядов.
18. Умножение рядов, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов.
19. Равномерная сходимость, критерий Коши.
20. Теорема о перестановке предельных переходов.
21. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле равномерной сходимости рядов.
22. Непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость суммы ряда. Теорема Дини.
23. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими полиномами.
24. Тригонометрическая система, ряды Фурье.
25. Интегральные представления для сумм Фурье.

26. Лемма Римана-Лебега.
27. Принцип локализации.
28. Условия сходимости ряда Фурье в точке.
29. Признак Дини-Липшица равномерной сходимости рядов Фурье.
30. Теорема Дирихле-Жордана.
31. Элементарная теория.
32. Несобственные интегралы от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.
33. Интеграл вероятностей и интеграл Дирихле.
34. Гамма- и бета-функции Эйлера.

4 семестр

1. Сегмент. Мера сегмента. Фигура. Мера фигуры.
2. Внутренняя и внешняя меры Жордана. Измеримые множества и их мера Жордана. Критерий измеримости.
3. Свойства меры Жордана.
4. Понятие интегрируемости по Риману и интеграла Римана в R^d.
5. Суммы и интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. Свойства интеграла Римана.
6. Сведение кратного интеграла к повторному.
7. Диффеоморфизм. Замена переменной в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
8. Замена переменной в кратном интеграле. Цилиндрические координаты. Сферические координаты.
9. Вариация функции. Функции ограниченной вариации. Свойства вариации.
10. Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства.
11. Условия существования и вычисление интеграла Римана-Стилтьеса.
12. Путь. Длина пути. Теорема Жордана. Свойства длины пути.
13. Жорданова кривая. Параметризация жордановой кривой. Натуральная параметризация. Ориентация кривой. Контур (замкнутая жорданова кривая).
14. Интеграл первого рода вдоль пути. Определение КРИ-1 по жордановой кривой.
15. Свойства КРИ-1. Вычисление КРИ-1. Некоторые приложения КРИ-1.
16. Интеграл второго рода вдоль пути. Определение КРИ-2 вдоль жордановой кривой.
17. Свойства КРИ-2. Вычисление КРИ-2. Связь КРИ-1 и КРИ-2
18. Формул Грина. Приложения КРИ-2.
19. Условия независимости криволинейного интеграла от пути.
20. Простые поверхности. Ориентация поверхности. Площадь поверхности.
21. Определение ПОВИ-1 (по площади поверхности).
22. Свойства ПОВИ-1. Сведение ПОВИ-1 к двойному.
23. Определение ПОВИ-2 (по координатам).
24. Связь ПОВИ-1 и ПОВИ-2.

25. Сведение ПОВИ-2 к двойному.
26. Формула Стокса. Формула Гаусса-Остроградского.
27. Скалярные и векторные поля.
28. Градиент, дивергениция, вихрь, оператор Гамильтона. Циркуляция, поток.
29. Теоремы Стокса и Гаусса-Остроградского языком теории поля.
30. Потенциальные векторные поля.

Примерный перечень вопросов к зачету

1 семестр

1. Границы числовых множеств. Точная верхняя и точная нижняя границы.
2. Последовательность. Предел числовой последовательности.
3. Свойства пределов числовых последовательностей.
4. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.
5. Монотонные последовательности. Предел монотонной последовательности.
6. Число е.
7. Сравнение асимптотического поведения последовательностей.
8. Частичные пределы. Нижний и верхний пределы.
9. Предел функции по Коши и по Гейне.
10. Односторонние пределы.
11. Свойства пределов функций.
12. Замечательные пределы и следствия из них.
13. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
14. Сравнение функций. О-символика.
15. Непрерывность функции в точке.
16. Точки разрыва функции.
17. Функции непрерывные на отрезке.
18. Непрерывность элементарных функций.
19. Дифференцируемость функции в точке. Понятие дифференциала. Его геометрический смысл. Применение в приближенных вычислениях.
20. Понятие производной. Ее геометрический смысл.
21. Основные правила дифференцирования. Табличные производные.
22. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
23. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ролля, Лагранжа, Коши.
24. Правила Лопиталя.
25. Формула Тейлора для многочлена и произвольной функции.
26. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, Пеано и Коши.
27. Разложение по формуле Тейлора элементарных функций.
28. Приложения формулы Тейлора к приближенным вычислениям и вычислению пределов.
29. Необходимые и достаточные условия монотонности функции.

30. Понятие локального экстремума. Необходимое условие локального экстремума.

31. Достаточные условия локального экстремума.

32. Нахождение наименьшего и наибольшего значения функции на отрезке.

33. Выпуклость функции. Необходимые и достаточные условия выпуклости функции.

34. Точки перегиба. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.

35. Асимптоты.

36. Построение графиков функций.

2 семестр

1. Первообразная функции и неопределенный интеграл.
2. Таблица неопределенных интегралов элементарных функций.
3. Основные методы интегрирования: интегрирование по частям и замена переменной.
4. Определение интеграла Римана: разбиение отрезка, ранг разбиения, разбиения с отмеченными точками и интегральные суммы, предел интегральных сумм. Геометрический смысл интеграла Римана.
5. Суммы Дарбу.
6. Критерии интегрируемости в терминах сумм Дарбу, интегралов Дарбу и колебаний.
7. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода.
9. Приложения интеграла Римана: нахождение площадей, объёмов, длин дуг.
10. Частные производные функций многих переменных.
11. Дифференцируемость, необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости.
12. Градиент. Производная по направлению.

3 семестр

1. Числовой ряд, последовательность частичных сумм, сходимость ряда, сумма ряда.
2. Необходимый признак сходимости ряда.
3. Абсолютная и условная сходимость.
4. Признаки сходимости числовых рядов: Даламбера, Коши, Лейбница.
5. Функциональные ряды: определение, последовательность частичных сумм, сходимость ряда, сумма ряда.
6. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда, структура области сходимости.
7. Тригонометрическая система, ряды Фурье.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой теории функций,
доктор пед.наук, профессор ________ Н.В.Бровка

30.05.2024

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
______________________________(протокол № ____ от ________ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

_______________________ _______________________
(ученая степень, ученое звание) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_______________________ _______________________
(ученая степень, ученое звание) (И.О.Фамилия)