



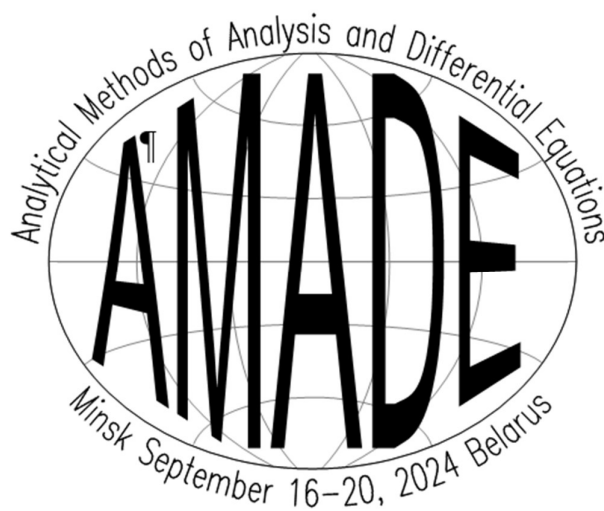
МЕХАНИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ



Экономический
факультет (25)

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ANALYTICAL METHODS OF ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS



Труды 11-го международного научного семинара
16 – 20 сентября 2024 года, Минск, Беларусь

Proceedings of the 11th International Workshop
September, 16 – 20, 2024, Minsk, Belarus

УДК 517
ББК 22.161+22.162
А64

Редактор:
С. В. Рогозин

А64 Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Труды 11-го междунар. семинара 16–20 сентября 2024 г., Минск, Беларусь: БГУ, 2024. – 115 с.

ISBN 978-985-880-531-9.

В настоящем сборнике представлены избранные труды участников 11-го международного научного семинара “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” (АМАДЕ-2024). Семинар был организован и проведен Белорусским государственным университетом.

Analytical methods of analysis and differential equations: Proceedings of the 11th International Workshop. September 16–20, 2024, Minsk, Belarus. BSU, 2024. – 115 p.

The selected works of the participants of the 11th International Workshop “Analytical Methods of Analysis and Differential Equations” (AMADE-2024) are presented in this book. The workshop was organized and held by the Belarusian State University.

УДК 517
ББК 22.161+22.162

ISBN 978-985-880-531-9.

© Коллектив авторов, 2024
© БГУ, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Gerasimova A. V., Lavrova O. A., Polevikov V. K. Numerical study of the contact angle influence on equilibrium ferrofluid shapes.....	5
Громак В. И. Вложимость множеств решений стационарных уравнений иерархий первого и второго уравнений Пенлеве.....	12
Калитвин В. А., Лапшина М. Г. О свойствах общего оператора, двойственного к преобразованию Радона–Киприянова.....	17
Карпиеня М. В. Экономические риски, порожденные проблемами информации.....	22
Карпук В. В., Метельский А. В. Спектральное приведение дифференциальной системы с несоизмеримыми запаздываниями.....	28
Корзюк В. И., Козловская И. С. Произвольной гладкости классическое решение задачи в четверти плоскости для волнового уравнения с интегральным условием.....	35
Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of an initial-boundary value problem with a mixed boundary condition for a mildly quasilinear wave equation.....	46
Кришень У. А. Применение дробно-дифференциальных моделей в анализе котировок международных индексов.....	56
Литвинович А. А., Аксень Э. М. Вычисление оптимальных долей ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску.....	61
Маслюкова Т. И. Экономическая безопасность организации в разрезе риск-менеджмента.....	65
Нифагин В. А., Дубровина О. В. Метод возмущений в краевых задачах градиентной механики разрушения.....	68
Рогозин С. В., Дубатовская М. В. О новых типах обобщенных специальных функций, представимых интегралом Меллина–Барнса	78
Шилин А. П. Интегро-дифференциальное уравнение, связанное со смешанной задачей Римана–Гильберта.....	87
Хвоцинская Л. А. Решение проблемы Римана для двух функций методом логарифмизации произведения матриц.....	94
Цехан О. Б. Асимптотическая аппроксимация решений одного класса нестационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием.....	108

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем издании представлены избранные труды участников 11-го международного научного семинара “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” (АМАДЕ-2024). Международный научный семинар АМАДЕ-2024 был организован Белорусским государственным университетом и проходил 16–20 сентября 2024 года в Минске на базе Республиканского центра Олимпийской подготовки “Стайки”. Основная организационные мероприятия научного семинара были осуществлены сотрудниками механико-математического и экономического факультетов БГУ. Этот научный форум проходил в форме семинара (воркшопа) — участникам были предложены лекции ведущих специалистов в области математического анализа и дифференциальных уравнений и их приложений. Кроме того, в рамках семинара работали секции “Дифференциальные уравнения”, “Математический анализ”, “Современные проблемы механики и биомеханики” и “Математические методы в экономических исследованиях”. Расширенные доклады как пленарных докладчиков, так и участников всех этих секций представлены в данном сборнике избранных трудов АМАДЕ-2024.

В рамках научного семинара были организованы заседания, посвященные памяти академика Федора Дмитриевича Гахова (1906–1980) (основателя белорусской математической школы по краевым задачам и сингулярным интегральным уравнениям), профессора Анатолия Александровича Килбаса (1948–2010) (инициатора и бессменного организатора конференций АМАДЕ вплоть до 2009 г.). Кроме того прошло заседание научного семинара, посвященное 25-летию экономического факультета БГУ.

Основные результаты, представленные в этом сборнике, связаны с решением задач, относящихся к следующим научным направлениям — нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения иерархий Пенлеве; линейные автономные системы дифференциальных уравнений; системы дифференциальных уравнений с запаздыванием; уравнения в частных производных, включая квазилинейные дифференциальные уравнения; численные методы исследования задач для магнитных жидкостей; задачи механики разрушения; скалярные, матричные и нелинейные краевые задачи для аналитических функций и их приложения к решению интегральных уравнений; интегральные преобразования типа Радона; дифференциальные свойства специальных функций; приложения дробного исчисления к исследованию нестационарных финансовых временных рядов; математические модели в экономических исследованиях.

С.В. Рогозин

Редактор сборника трудов
11-го международного научного

семинара АМАДЕ-2024

УДК 519.624

NUMERICAL STUDY OF THE CONTACT ANGLE INFLUENCE ON EQUILIBRIUM FERROFLUID SHAPES

A. V. Gerasimova¹, O. A. Lavrova², V. K. Polevikov³e-mails: ¹alinagerasimovax@gmail.com, ²lavrova@bsu.by, ³viktor.polevikov@gmail.com

The problem of forming equilibrium ferrofluid free surfaces, realized under the action of the magnetic field of a vertical line conductor and gravity, is considered. A ferrofluid drop is in contact with the vertical conductor and the horizontal plane on which it is located. The goal is to investigate the influence of contact angles of ferrofluid surface with solid boundaries of the conductor and the plane on equilibrium shapes of the free surface using numerical modelling. The mathematical model contains ordinary differential equations for the parametric representation of an axisymmetric free surface for a known magnetic field, generated by the conductor with a given current. The computational algorithm is constructed on a non-uniform adaptive mesh, based on a finite-difference approximation, in the form of recurrence relations. A comparative analysis of the equilibrium surface shapes is carried out for acute and obtuse contact angles.

Keywords: ferrofluid; current-carrying conductor; free surface; contact angle; finite-difference method; adaptive mesh.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 76M20, Secondary 76W05.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УГЛА КОНТАКТА НА РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

А.В. Герасимова¹, О.А. Лаврова², В.К. Полевилов³e-mails: ¹alinagerasimovax@gmail.com, ²lavrova@bsu.by, ³viktor.polevikov@gmail.com

В работе рассматривается задача о равновесных формах свободной поверхности магнитной жидкости, которые образуются под воздействием магнитного поля вертикального проводника с током и силы тяжести. Капля магнитной жидкости располагается на горизонтальной плоскости вокруг вертикального проводника. Целью работы является исследование влияния углов контакта свободной поверхности жидкости с проводником и горизонтальной плоскостью на равновесные формы свободной поверхности с использованием численного моделирования. Математическая модель задачи содержит обыкновенные дифференциальные уравнения для параметрического описания осесимметричной свободной поверхности для известного магнитного поля, создаваемого проводником с током. Вычислительный алгоритм, основанный на конечно-разностной аппроксимации, построен на неравномерной адаптивной сетке в виде рекуррентных соотношений. В работе представлен сравнительный анализ равновесных форм свободной поверхности для острых и тупых углов контакта.

Ключевые слова: магнитная жидкость; проводник с током; свободная поверхность; угол контакта; конечно-разностный метод; адаптивная сетка.

1 Introduction

Ferrofluid is a synthesized soft material that is sensitive to external magnetic field, which results in special behavior of ferrofluid interfaces with other materials, see e.g. in [1]. The problem of forming

equilibrium ferrofluid free surfaces, realized under the action of the magnetic field of a vertical line conductor and gravity, is considered. This is a classical problem of ferrohydrodynamics, see [1]. A ferrofluid drop is in contact with the vertical conductor and the horizontal plane on which it is located. These contacts are characterized by two different contact angles α_1 and α_2 , see Fig. 1. The goal of the present study is to investigate the influence of the contact angles of ferrofluid surface with solid boundaries of the conductor and the plane on equilibrium shapes of the free surface using numerical modelling.

A most of experimental, theoretical and numerical studies of equilibrium shapes around a conductor consider a situation with acute contact angles $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi/2$ for any conductor current, see e.g. [2–7]. Numerical studies in [6, 8, 9] investigate the possibility of hysteresis of the free-surface shape with obtuse contact angles $\pi/2 < \alpha_1, \alpha_2 < \pi$ during cyclic quasi-static increase and decrease of current. In the present study, different geometric configurations with $\alpha_1, \alpha_2 \in \{\pi/4, 3\pi/4\}$ are considered, where other ferrofluid parameters are fixed.

The mathematical model of the problem under study is presented in Section 2. The model is constructed, following the ideas in [2, 5, 7], where special attention is paid to taking into account acute and obtuse contact angles of different values. The model contains ordinary differential equations for the parametric representation of an axisymmetric free surface for a known magnetic field, generated by the conductor with a given current, assuming a uniform distribution of particles within the ferrofluid. In contrast, the mathematical models in [5, 7] take into account particle diffusion processes. The computational algorithm of the problem under study is presented in Section 3. It is constructed similarly to [5] with a modification related to a non-uniform mesh. A comparative analysis of the equilibrium surface shapes is carried out in Section 4 for four different geometric configurations with fixed contact angles a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$, b) $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = 3\pi/4$, c) $\alpha_1 = 3\pi/4, \alpha_2 = \pi/4$, d) $\alpha_1 = \alpha_2 = 3\pi/4$, moreover the volume of the ferrofluid is fixed.

Future studies may investigate the situation of varying contact angles with respect to the intensity of the magnetic field, generated by the conductor. This behavior of ferrofluid was experimentally observed in [3, 4] for the problem under study.

2 Mathematical model

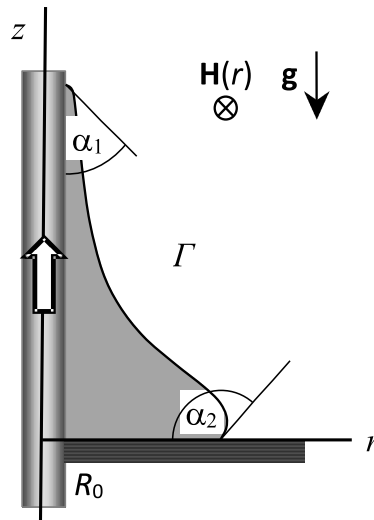


Рис. 1: Problem statement in the meridional plane.

Let us consider the problem under study in the cylindrical coordinate system (r, z) , see Fig. 1. The ferrofluid is located on a horizontal plane at $z = 0$ around a vertical conductor. The ferrofluid has a free surface Γ , which touches the conductor at a contact angle α_1 and the horizontal plane at a contact angle α_2 . The conductor has the shape of a cylinder with radius R_0 , its axis coincides with the Oz axis. The magnetic field, induced by current I in the conductor,

is azimuthal. The corresponding magnetic field intensity outside of the conductor is described by the formula $H = I/(2\pi r)$, see e.g. in [1]. The ferrofluid is affected not only by the magnetic force but also by the force of gravity, which is directed opposite to the Oz axis, see Fig. 1. The equilibrium free surface Γ of the ferrofluid is formed due to magnetic, gravitational and capillary forces.

The mathematical model is constructed, following the ideas in [2, 5, 7]. It takes into account the condition of pressure jump on the free surface of ferrofluid, the known magnetic field $H = I/(2\pi r)$ and the property $H_n = 0$ on Γ . The mathematical model has the form of a boundary value problem for the unknown dimensionless functions $r = r(s)$, $z = z(s)$:

$$\begin{aligned} r'' &= -z'F(r, z, z', L), \quad z'' = r'F(r, z, z', L), \quad 0 < s < 1, \\ r(0) &= 1/L, \quad r'(0) = \sin \alpha_1, \quad z'(0) = -\cos \alpha_1, \\ r'(1) &= \cos \alpha_2, \quad z(1) = 0, \quad z'(1) = -\sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} F(r, z, z', L) &= \text{Bo}zL^2 - \text{Bo}_m\varphi(r) - \frac{z'}{r} + C, \quad L = \left(\frac{V}{I_1}\right)^{1/3}, \\ C &= \frac{2}{r^2(1) - r^2(0)} \left(-r(1)\sin \alpha_2 + r(0)\cos \alpha_1 + \text{Bo}_mI_2 - \frac{\text{Bo}V}{2\pi L} \right), \\ I_1 &= 2\pi \int_0^1 zrr'ds, \quad I_2 = \int_0^1 rr'\varphi(r)ds, \quad \varphi(r) = L \ln \left(\frac{rL}{A^*} \sinh \frac{A^*}{rL} \right) \end{aligned}$$

for the dimensionless parameters

$$\text{Bo} = \frac{\rho g R_0^2}{\sigma}, \quad \text{Bo}_m = \mu_0 \frac{M_S H_* R_0}{\sigma}, \quad A^* = \frac{I}{2\pi H_* R_0}, \quad V = \frac{U}{R_0^3}.$$

Here ρ is the density of the ferrofluid, g is the gravity acceleration, σ is the surface tension coefficient, μ_0 is the magnetic permeability of vacuum, M_S is the saturation magnetisation of the ferrofluid, $H_* = kT/\mu_0 m$, k is the Boltzmann constant, T is the absolute temperature, m is the magnetic moment of a ferroparticle, U is the volume of the fluid.

Following the approach in [10], we introduce a new unknown function $\beta = \beta(s)$ such that $z' = \sin \beta$, $r' = \cos \beta$. Increasing the number of unknowns in the model from two to three allows us to lower the order of the differential equations in (1) from two to one. We construct the following reformulation of the mathematical model (1), taking into account acute and obtuse contact angles:

$$\begin{aligned} \beta' &= \Phi(\beta, r, z, L), \\ r' &= \cos \beta, \quad r(0) = 1/L, \\ z' &= \sin \beta, \quad z(1) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

with the boundary conditions for β :

$\beta(0) = \alpha_1 - \pi/2$ for $0 < \alpha_1 \leq \pi/2$, $\beta(0) = \pi/2 - \alpha_1$ for $\pi/2 < \alpha_1 < \pi$ and $\beta(1) = -\alpha_2$. Here

$$\Phi(\beta, r, z, L) = \text{Bo}zL^2 - \text{Bo}_m\varphi(r) - \frac{\sin \beta}{r} + C, \quad I_1 = 2\pi \int_0^1 zr \cos \beta ds, \quad I_2 = \int_0^1 r \cos(\beta) \varphi(r) ds.$$

The equilibrium shape of the free surface Γ is defined as the solution $(r(s), z(s))$ of the mathematical model (2) for given values of the dimensionless parameters: α_1 and α_2 (contact angles), Bo (Bond number), Bo_m (magnetic Bond number), A^* (dimensionless current intensity), V (dimensionless fluid volume).

3 Computational algorithm

To construct a non-uniform adaptive mesh with respect to the variable s , we apply a transformation $s = s(t)$, $t \in [0, 1]$ in the following form $s(t) = -a + 2(a + 1)/(1 + (1 + 2/a)^{1-t})$ for a given parameter $a > 0$, see [11]. This transformation does not change the endpoints: $s(0) = 0$, $s(1) = 1$, and concentrates mesh nodes $\{s_i = s(t_i), t_i = ih, h = 1/N, i = \overline{0, N}\}$ closer to the endpoint s_0 , when the parameter a tends to 0. To find the value of the parameter a in computations, the condition is used that the product of the curvature at a fixed point of the free surface $(r(0), z(0))$ by s_1 is equal to the product of the curvature of the circle by h , for the solution of which Newton's method is applied. The adaptivity of the mesh in computations is realized by changing the curvature value at point $(r(0), z(0))$. As the height of the ferrofluid drop increases, the curvature at point $(r(0), z(0))$ also increases, causing the value of s_1 to become smaller and the mesh to become more concentrated near $s = 0$. The idea of such mesh adaptivity was suggested and applied in [10,12].

Let us construct a discretization of the mathematical model (2) on the non-uniform mesh $\{s_i, i = \overline{0, N}\}$ for unknown qualities $\beta_i, r_i, z_i, i = \overline{0, N}$, based on a finite-difference approximation. In addition, we linearize the obtained discrete equations by constructing an iterative process with the introduction of a relaxation parameter $\tau > 0$ to control the convergence of the iterations for $n = 0, 1, 2, \dots$. The final scheme (3)–(5) is constructed as recurrence relations at each iteration, extending the approach [5] to non-uniform meshes. First, we compute β_i at the $(n+1)$ -th iteration, starting from $i = N$ and successively reaching $i = 0$:

$$\begin{aligned} \beta_N^{n+1} &= -\alpha_2, \\ \beta_i^{n+1} &= \beta_{i+1}^n - hs'(t_{i+1/2})\Phi_{i+1/2}^n + (1 - \tau)(\beta_i^n - \beta_{i+1}^n + hs'(t_{i+1/2})\Phi_{i+1/2}^n), \\ \beta_0^{n+1} &= \alpha_1 - \pi/2 \text{ for } 0 < \alpha_1 \leq \pi/2 \quad \text{or} \quad \beta_0^{n+1} = \pi/2 - \alpha_1 \text{ for } \pi/2 < \alpha_1 < \pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Here $t_{i+1/2} = (i + 1/2)h$, $\Phi_{i+1/2}^n = \Phi(\beta_{i+1/2}^n, r_{i+1/2}^n, z_{i+1/2}^n, L^n)$, $\beta_{i+1/2} = (\beta_i + \beta_{i+1})/2$. We then compute r_i^{n+1} , starting from $i = 0$, and z_i^{n+1} , starting from $i = N$, using the values for β_i^{n+1} from (3):

$$r_0^{n+1} = 1/L^n, \quad r_i^{n+1} = r_{i-1}^{n+1} + hs'(t_{i-1/2}) \cos \beta_{i-1/2}^{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (4)$$

$$z_N^{n+1} = 0, \quad z_i^{n+1} = z_{i+1}^{n+1} - hs'(t_{i+1/2}) \sin \beta_{i+1/2}^{n+1}, \quad i = N - 1, N - 2, \dots, 0. \quad (5)$$

At the end of the $(n + 1)$ -th iteration, we compute L^{n+1} and $\Phi_{i+1/2}^{n+1}$, $\overline{0, N - 1}$ for use in the next iteration. To find these values, we approximate the integrals I_1 and I_2 by the trapezoidal quadrature formula, using all necessary data from the $(n + 1)$ -th iteration.

4 Numerical results

The equilibrium shapes Γ are computed for four geometric configurations with a fixed ferrofluid volume $U = 400$ and for different contact angles: a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$, b) $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = 3\pi/4$, c) $\alpha_1 = 3\pi/4, \alpha_2 = \pi/4$, d) $\alpha_1 = \alpha_2 = 3\pi/4$. The ferrofluid parameters are taken similarly to computations in [5] and correspond to experimental data in [2]: $Bo = 1$, $Bo_m = 6$, where the dimensionless current intensity A^* varies in the range from 0 to 6. Computations are performed on non-uniform adaptive meshes for $N = 1000$. The adaptivity parameter $a \approx 0.006$ corresponds to the most elongated shape of the equilibrium free surface with mesh sizes monotonically changing along the surface from $s_1 - s_0 = 0.04h$ to $s_N - s_{N-1} = 3h$. The iterative scheme (3) was realized for the relaxation parameter $\tau = 0.0001$. The numerically resolved free-surface shapes and their geometric characteristics z_0 and r_N , denoting the height of the ferrofluid drop and the radius of its base, respectively, are shown in Fig. 2 and Fig. 3 for different contact angles.

Fig. 2 presents equilibrium axisymmetric ferrofluid shapes for three values of current intensities $A^* \in \{0, 3, 6\}$. Fig. 2 shows that ferrofluids with an acute contact angle α_1 with the

conductor elongate along the conductor more strongly than ferrofluids with an obtuse contact angle α_1 . Namely, the maximum value of z_0/R_0 is greater than 16 for $\alpha_1 = \pi/4$, see Fig. 2a, Fig. 2b in comparison with Fig. 2c, Fig. 2d, where the maximum $z_0/R_0 \approx 12$ for $\alpha_1 = 3\pi/4$. A similar effect is observed for the contact angle α_2 with the horizontal plane. Ferrofluids with an acute contact angle α_2 with the horizontal plane spread along the plane more strongly than ferrofluids with an obtuse contact angle α_2 , see r_N/R_0 for $\alpha_2 = \pi/4$ in Fig. 2a, Fig. 2c and for $\alpha_2 = 3\pi/4$ in Fig. 2b, Fig. 2d. We note also that elongated shapes with obtuse contact angle α_1 , see solid lines in Fig. 2c and Fig. 2d, require a larger length-scale near the conductor to demonstrate that the contact angle α_1 is obtuse.

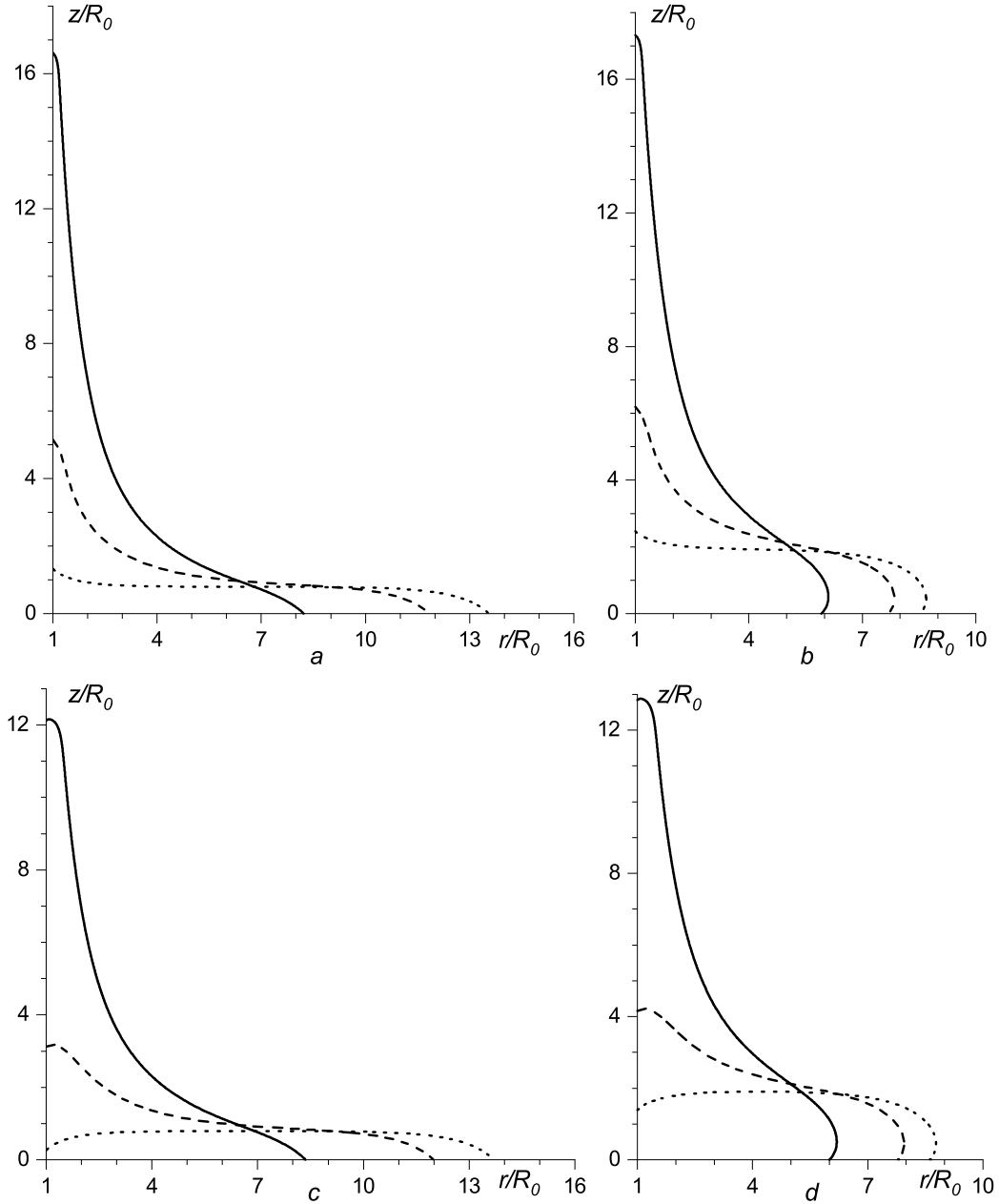


Рис. 2: Computed equilibrium ferrofluid shapes for different contact angles: a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$, b) $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = 3\pi/4$, c) $\alpha_1 = 3\pi/4, \alpha_2 = \pi/4$, d) $\alpha_1 = \alpha_2 = 3\pi/4$, and at different dimensionless current intensities: $A^* = 0$ (dotted lines), $A^* = 3$ (dashed lines), $A^* = 6$ (solid lines).

Fig. 3 demonstrates the position of the contact point z_0/R_0 with the conductor and the contact point r_N/R_0 with the horizontal plane at different current intensities A^* . We observe

that with the grows of the values of A^* , the values of z_0/R_0 monotonically increase, i.e. the contact line with the conductor rises higher, see Fig. 3 (left), and the values of r_N/R_0 monotonically decrease, i.e. the contact line with the plane moves closer to the conductor, see Fig. 3 (right). Fig. 3 (left) shows that the dynamics of the equilibrium shapes near the conductor mainly depends on the contact angle α_1 at high current intensities, whereas the dynamics near the horizontal plane mainly depends on the contact angle α_2 , see Fig. 3 (right). Moreover, Fig. 3 confirms the observations, discussed for Fig. 2, that acute contact angles result in more elongated shapes along solid walls than obtuse contact angles. Namely, Fig. 3 shows that the curves for α_1 and α_2 equal to $\pi/4$ lie above the curves for the contact angles equal to $3\pi/4$. We note that the numerical results, shown in Fig. 3 for the geometric configuration a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$, are numerically consistent with the results of computations, presented in [5, Fig. 3]. The numerical results in [5] were obtained on a uniform mesh, whereas the current study uses non-uniform adaptive meshes.

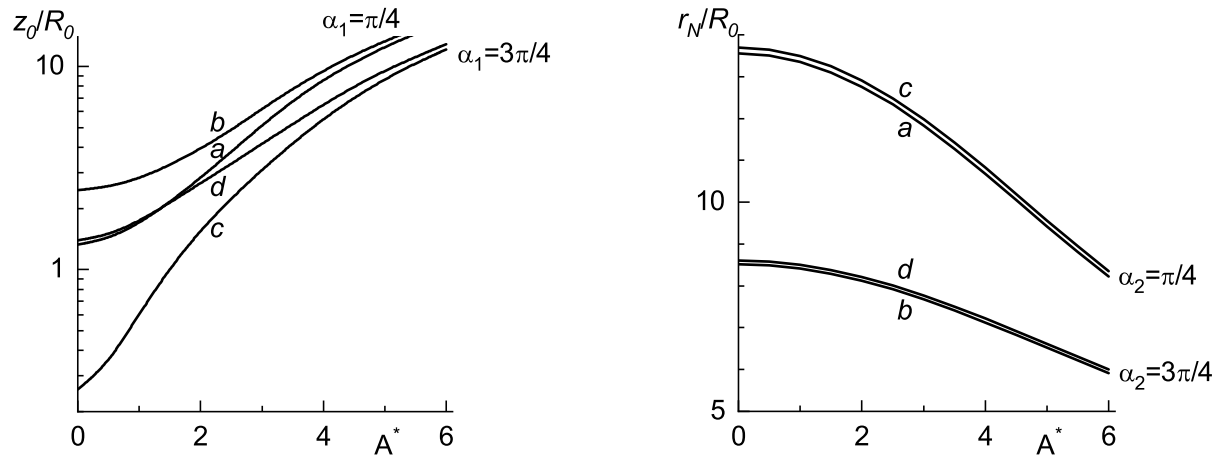


Рис. 3: Dependence of the dimensionless contact points of the free-surface z_0/R_0 (left) and r_N/R_0 (right) on the dimensionless current intensity A^* for equilibrium shapes with different contact angles: a) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/4$, b) $\alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = 3\pi/4$, c) $\alpha_1 = 3\pi/4, \alpha_2 = \pi/4$, d) $\alpha_1 = \alpha_2 = 3\pi/4$.

Acknowledgment

The work was supported by the Belarusian State Research Program “Convergence–2025”, project number 1.4.01.4.

Literature

1. Rosensweig, R. E. *Ferrohydrodynamics*, New York: Cambridge University Press, 1985.
2. Bashtovoi, V. G., Budnik, A. M., Polevnikov, V. K., Reks, A. G. *Doubly connected equilibrium configurations of ferrofluid in magnetic field of vertical conductor* // *Magnitnaya Gidrodinamika*. 1984. V. 20, № 2. P. 47–53. (In Russian).
3. Bacri, J.-C., Fernois, R., Perzynski, R., Salin, D. *Magnetic drop-sheath wetting transition of a ferrofluid on a wire* // *Revue Phys. Appl.* 1988. V. 23. P. 1017–1022. <https://doi.org/10.1051/rphysap:019880023060101700>
4. Bacri, J.-C., Perzynski, R., Salin, D., Tourinho, F. *Magnetic wetting transition of a ferrofluid on a wire* // *Europhys. Lett.* 1988. V. 5, № 6. P. 547–552. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/5/6/012>
5. Beresnev, S., Polevnikov, V., Tobiska, L. *Numerical study of the influence of diffusion of magnetic particles on equilibrium shapes of a free magnetic fluid surface* // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 2009. V. 14. P. 1403–1409. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.04.005>
6. Vinogradova, A. S., Naletova, V. A., Turkov, V. A., Reks, A. G. *Hysteresis of the shape of a finite magnetic fluid volume in axisymmetric magnetic fields* // *Magnetohydrodynamics*. 2013. V. 49, № 1/2. P. 119–126. <https://doi.org/10.22364/mhd.49.1-2.15>

7. Lavrova, O., Polevikov, V. *Numerical study of ferrofluid covering of a current-carrying conductor taking into account diffusion of interacting particles* // Magnetohydrodynamics. 2024. V. 60, ¹ 1. P. 21–38. <https://doi.org/10.22364/mhd.60.1.2>
8. Vinogradova, A. S., Naletova, V. A., Turkov, V. A., Reks, A. G. *Influence of apex angles of limiting conic surfaces on the hysteresis of the shape of a magnetic fluid drop on a line conductor* // Magnetohydrodynamics. 2013. V. 49, № 3/4. P. 350–354. <https://doi.org/10.22364/mhd.49.3-4.18>
9. Vinogradova, A. S., Turkov, V. A., Naletova, V. A. *Magnetic fluid axisymmetric volume on a horizontal plane near a vertical line conductor in case of non-wetting* // J. Magn. Magn. Mater. 2017. V. 431. P. 169–171. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.10.010>
10. Polevikov, V. K. *Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces* // Comput. Method Appl. Math. 2004. V. 4, № 1. P. 66–93. <https://doi.org/10.2478/cmam-2004-0005>
11. Roberts, G. O. *Computational Meshes for Boundary Layer Problems*, New York: Springer-Verlag, 1971.
12. Polevikov, V. K. *Application of adaptive grids to calculate the free surface in problems on statics of a magnetic fluid* // Differents. Uravneniya. 1994. V. 30, № 12. P. 2146–2152. (In Russian).

УДК 517.925.7

ВЛОЖИМОСТЬ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЕРАРХИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

В. И. Громак

e-mail: vgromak@gmail.com

Для нелинейных уравнений обобщенных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве доказаны свойства вложимости множеств решений. Приведены первые интегралы стационарных уравнений обобщенных иерархий первого и второго уравнений Пенлеве и соотношения между параметрами вложимых множеств решений.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, иерархии уравнений Пенлеве; преобразования Беклунда; вложимость множеств решений.

EMBEDDABILITY OF THE SOLUTIONS' SET TO THE STATIONARY EQUATIONS OF THE HIERARCHIES OF THE FIRST AND THE SECOND PAINLEVÉ EQUATIONS

V. I. Gromak

e-mail: vgromak@gmail.com

The properties of embeddability of the solutions' set for nonlinear equations of the generalized hierarchies of the first and the second Painlevé equations are proved. The first integrals of the stationary equations of the generalized hierarchies of the first and the second Painlevé equations are given and the interrelations between parameters of the embeddable sets of solutions are found.

Keywords: Painlevé equations; hierarchies of Painlevé equations; Bäcklund transformation; embeddability of the solutions' set.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 34M55, Secondary 37K35.

1 Введение

Для уравнений Пенлеве известны обобщения, которые представляют собой бесконечные последовательности нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка, имеющих единую дифференциально – алгебраическую структуру [1–4]. Первыми членами таких иерархий являются сами уравнения Пенлеве [5–8]. Уравнения иерархий обладают симметриями, индуцированные преобразованиями Беклунда и при специальных значениях параметров имеют классы решений, выражающиеся через классические трансцендентные функции, а также алгебраические или даже рациональные решения [7–10]. В частности, для второго уравнения Пенлеве и его иерархии это обобщенные полиномы Яблонского – Воробьева, которые позволяют построить рациональные решения уравнений иерархии уравнения Кортевега – де Фриза [5–10,11,12]. В настоящей работе рассматриваются обобщенные стационарные иерархии первого и второго уравнений Пенлеве. Для уравнений этих иерархий рассматриваются вопросы вложимости множеств решений.

2 Обобщенные иерархии первого и второго уравнений Пенлеве

Рассмотрим обобщенную иерархию первого уравнений Пенлеве в виде [12]

$$P_1^{[2n-2]} : \mathcal{L}_n[q(z)] - \gamma_n z - \delta_n = 0, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где оператор $\mathcal{L}_n$ определяется рекуррентным соотношением

$$D\mathcal{L}_{n+1}[u] = (D^3 + (4u + \beta_n)(D + 2Du))\mathcal{L}_n[u], D = d/dz, \mathcal{L}_1[u] = u, u = u(z), n \in \mathbb{N},$$

а $\beta_n, \gamma_n, \delta_n$ — параметры.

При $n = 2, 3, 4$ из (1) соответственно имеем

$$q'' = -3q^2 - q\beta_1 + \gamma_2 z + \delta_2, \quad (2)$$

$$q^{(4)} = -10q^3 - 3s_1 q^2 - 5(q')^2 - s_1 q'' - s_2 q - 10qq'' + \gamma_3 z + \delta_3, \quad (3)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1 \beta_2$;

$$\begin{aligned} q^{(6)} = & -35q^4 - 10b_1 q^3 - 5b_1 (q')^2 - b_2 q'' - 21(q'')^2 - 3b_2 q^2 - 70q^2 q'' \\ & - 28q' q^{(3)} - b_1 q^{(4)} - q(b_3 + 70(q')^2 + 10b_1 q'' + 14q^{(4)}) + \gamma_4 z + \delta_4, \end{aligned} \quad (4)$$

где $b_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $b_2 = \beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3$, $b_3 = \beta_1 \beta_2 \beta_3$.

Уравнение (2) есть обобщенное первое уравнение Пенлеве.

Оператор $\mathcal{L}_n$ также определяет обобщенную иерархию второго уравнения Пенлеве [12]

$$P_2^{[2n]} : \left(\frac{d}{dz} + 2w \right) \mathcal{L}_n[w' - w^2] - (k_n z + p_n)w - \alpha_n = 0, n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

а k_n, α_n, p_n — параметры.

Первые уравнения иерархии (5) при $n = 1, 2, 3, 4$ соответственно имеют вид

$$w'' = 2w^3 + (k_1 z + p_1)w + \alpha_1, \quad (6)$$

$$w^{(4)} = 10w^2 w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - \beta_1(w'' - 2w^3) + (k_2 z + p_2)w + \alpha_2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w^{(6)} = & 10(w')^2(s_1 w - 14w^3 + 7w'') + w''(10s_1 w^2 - s_2 - 70w^4 + 42ww'') + \\ & + 56ww'w^{(3)} - (s_1 - 14w^2)w^{(4)} + 2s_2 w^3 - 6s_1 w^5 + 20w^7 + (k_3 z + p_3)w + \alpha_3, \end{aligned} \quad (8)$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2$, $s_2 = \beta_1 \beta_2$,

$$\begin{aligned} w^{(8)} = & 2b_3 w^3 - 6b_2 w^5 + 20b_1 w^7 - 798w(w')^4 + 42w(b_1 - 18w^2)(w'')^2 + \\ & + 182(w'')^3 - b_2 w^{(4)} + w''(228ww^{(4)} - b_3 + 10w^2(b_2 - 7b_1 w^2 + 42w^{(4)})) - \\ & - (b_1 - 18w^2)w^{(6)} - 70w^9 + 5(b_2 w - 14b_1 w^3 + 126w^5 + 21w^{(4)}) + \\ & + 4w'(7(2b_1 w - 36w^3 + 27w'')w^{(3)} + 27ww^{(5)}) + 2w(69(w^{(3)})^2 + \\ & + 7w(b_1 - 9w^2)w^{(4)}) + 2(w')^2(7(5b_1 - 222w^2)w'' + (k_4 z + p_4)w + \alpha_4, \end{aligned} \quad (9)$$

где $b_1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $b_2 = \beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3$, $b_3 = \beta_1 \beta_2 \beta_3$.

Уравнение (6) есть обобщенное второе уравнение Пенлеве.

Оператор $\mathcal{L}_n$ определяет n -е уравнение иерархий (1), (5). При этом нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ имеют соответственно порядок $2n - 2$ и $2n$.

Заметим также, что если ввести функции

$$u(z) = w'(z) - w(z)^2, \quad \Phi(u(z)) = \mathcal{L}_n[u(z)] - az - b,$$

то уравнение (5) можно переписать в виде

$$P_2^{[2n]} = \frac{d\Phi}{dz} + 2w\Phi + (2a - k_n)zw + (2b - p_n)w - \alpha_n + a = 0.$$

Пусть $a = k_n/2$, $b = p_n/2$. Тогда соотношение $\Phi = 0$ при $k_n = 2a = 2\alpha_n$ определяет решение уравнения $P_2^{[2n]}$. Следовательно, справедлива

Лемма 2.1 Пусть $q(z)$ — решение n — уравнения (1) при фиксированных значениях параметров γ_n, δ_n . Тогда функция $w(z)$, определяемая как решение уравнения Риккати $w'(z) = w(z)^2 + q(z)$, есть решение уравнения (5) при значениях параметров

$$k_n = 2\gamma_n, p_n = 2\delta_n, \alpha_n = k_n/2. \quad (10)$$

Обозначим через G_{2n-2} и H_{2n} множество решений соответственно уравнения $P_1^{[2n-2]}$ и $P_2^{[2n]}$ при фиксированных значениях параметров. Тогда результат леммы 2.1 условно можно записать в виде включения $G_{2n-2} \subset H_{2n}$ при фиксированном значении параметров (10). В случае $k_n = 1$ это известный результат о связи между иерархиями первого и второго уравнений Пенлеве высших порядков [5, 6]. Заметим, что этот результат также справедлив в стационарном случае уравнений, т.е. при $k_n = 0$ и $\gamma_n = 0$ соответственно в уравнениях (1) и (5).

3 Стационарные иерархии первого и второго уравнений Пенлеве

Рассмотрим стационарные уравнений (1) и (5), т.е. при условии $k_n = \gamma_n = 0$. Уравнения (1) и (5) при этом условии будем называть стационарными иерархиями первого и второго уравнений Пенлеве и обозначать их через (1'), а уравнения (2) – (4) и (6) – (9) при этом условии будем обозначать соответственно через (2') – (4') и (6') – (9'). При $n = 1$ в (1) имеем вырожденное соотношение $q(z) = \gamma_1 z + \delta_1$, которое не является дифференциальным уравнением. Однако заметим, что при $\gamma_1 = 0$ постоянное решение $q(z) = \delta_1$ является также решением стационарного уравнения (2) при условии $-3\delta_1^2 - \delta_1\beta_1 + \delta_2 = 0$, т.е. $G_0 \subset G_2$.

Прежде всего заметим, что уравнения (2')–(3') имеют соответственно первые интегралы

$$2\delta_2 q - \beta_1 q^2 - 2q^3 - (q')^2 = C_1, \quad (11)$$

$$2q(\delta_3 - 5(q')^2) + (q'')^2 - 2q'q^{(3)} - s_2 q^2 - 2s_1 q^3 - 5q^4 - s_1(q')^2 = C_2, \quad (12)$$

что проверяется непосредственным дифференцированием в силу исходных уравнений. Покажем, что для множеств решений уравнений (2') – (4') также имеет место включение $G_2 \subset G_4 \subset G_6$. Точнее справедлива

Теорема 3.1 1. Пусть $q = q(z, \beta_1, \delta_2)$ — произвольное решение уравнения (2') с начальными данными q_0, q'_0 при фиксированных значениях параметров α_1, δ_2 . Тогда это решение также есть решение уравнения (3') при условиях на параметры

$$2\delta_2 + s_2 + \beta_1(\beta_1 - s_1) = 0, \quad C_1 - \delta_3 + \delta_2(s_1 - \beta_1) = 0,$$

$$C_1 = 2\delta_2 q_0 - \beta_1 q_0^2 - 2q_0^3 - (q'_0)^2. \quad (13)$$

2. Пусть $q = q(z, s_1, s_2, p_2)$ — произвольное решение уравнения (3') при фиксированных значениях параметров s_1, s_2, δ_3 . Тогда q есть решение уравнения (4') при следующих условиях на параметры

$$b_2 - (b_1 - s_1)s_1 - s_2 = 0, \quad b_3 + 2\delta_3 - (b_1 - s_1)s_2 = 0,$$

$$C_2 + (b_1 - s_1)\delta_3 - \delta_4 = 0. \quad (14)$$

При этом постоянная C_2 в (14) определяется через параметры и начальные данные решения q в соответствии с (12).

Доказательство. Дифференцируя уравнение (2'), находим

$$q''' = -(\beta_1 + 6q)q', \quad q^{(4)} = (\beta_1 + 6q)(-\delta_2 + \beta_1 q + 3q^2) - 6(q')^2. \quad (15)$$

Подстановка производной q' из (11), q'' из (2'), а $q''', q^{(4)}$ из (15) в уравнение (3') при выполнении условий на параметры (13) обращает его в тождество, откуда и следует первое утверждение теоремы. Аналогично доказывается второе утверждение.

Покажем, что свойство вложения множеств решений справедливо и для стационарной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Уравнение (6') в общем случае интегрируется в эллиптических функция, а уравнение (7') в гиперэллиптических функциях [13]. Заметим также, что уравнения (6') – (8') соответственно имеют первые интегралы

$$(w')^2 = w^4 + p_1 w^2 + 2\alpha_1 w + C_1, \quad (16)$$

$$2w'w''' = (w'')^2 + (10w^2 - \beta_1)(w')^2 + \beta_1 w^4 + 2\alpha_2 w - 2w^6 + p_2 w^2 + C_2, \quad (17)$$

$$2w'w^{(5)} = 2w''w^{(4)} - (w''')^2 - 2(s_1 - 14w^2)w'w''' + (s_1 - 14w^2)(w'')^2 + 56w(w')^2w'' + 21(w')^4 - (s_2 - 10s_1w^2 + 70w^4)(w')^2 - 2s_1w^6 + 5w^8 + s_2w^4 + p_3w^2 + 2\alpha_3w + C_3. \quad (18)$$

Справедливо также включение $H_2 \subset H_4 \subset H_6$. Точнее справедлива

Теорема 3.2 1. Пусть $w = w(z, \alpha_1, p_1)$ – произвольное решение уравнения (6') с начальными данными w_0, w'_0 при фиксированных значениях параметров α_1, p_1 . Тогда $w = w(z, \alpha_1, p_1)$ есть решение уравнения (7') при условиях

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1(p_1 + \beta_1), \quad p_2 = 2C_1 + p_1^2 + p_1\beta_1, \\ C_1 &= (w'_0)^2 - w_0^4 - p_1w_0 - 2\alpha_1w_0. \end{aligned} \quad (19)$$

2. Пусть $w = w(z, \alpha_2, \beta_1, p_2)$ – произвольное решение уравнения (7') при фиксированных значениях параметров α_2, β_1, p_2 . Тогда w есть решение уравнения (8') при условиях

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha_2(s_1 - \beta_1), \quad p_3 = 2C_2 + p_2(s_1 - \beta_1), \\ s_2 &= -p_2 + \beta_1(s_1 - \beta_1). \end{aligned} \quad (20)$$

3. Пусть $w = w(z, \alpha_3, s_1, s_2, p_3)$ – произвольное решение уравнения (8') при фиксированных значениях параметров α_3, s_1, s_2, p_3 . Тогда решение w также есть решение уравнения (9') при условиях

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1s_1 - s_1^2 + s_2, \quad b_3 = -p_3 + (b_1 - s_1)s_2, \\ p_4 &= 2C_3 + (b_1 - s_1)p_3, \quad \alpha_4 = (b_1 - s_1)\alpha_3, \end{aligned} \quad (21)$$

где C_2 и C_3 в формулах (20), (21) соответственно определяются первыми интегралами (17), (18) и начальными данными решений.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (6'), находим

$$w''' = 6w^2w' + p_1w', \quad w^{(4)} = 12w(w')^2 + (6w^2 + p_1)w'' \quad (22)$$

Подстановка w' из (16), w'' из (6') и производных (22), при выполнении условий на параметры (19), обращает уравнение (7') в тождество, откуда и следует первое утверждение теоремы. Для доказательства второго утверждения дифференцируем уравнение (7') трижды и, подставляя найденные производные $w^{(4)}, w^{(5)}, w^{(6)}$ и третью производную из (17) в уравнение (8'), убеждаемся, что последнее обращается в тождество при выполнении условий на параметры (20). Это и доказывает второе утверждение. Аналогично доказывается третье утверждение.

Заметим, что некоторые результаты о вложимости множеств решений уравнений (6'), (7') получены ранее в [14].

Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке проекта “Разработка новых методов исследования аналитических и качественных свойств решений нелинейных дифференциальных систем, их анализ и приложения”, ГР 20211826, программы “Конвергенция–2025”.

Литература

1. Noumi M., Yamada Y.V. *Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$* // Funkcial. Ekvac. 1998. V. 41. P. 483–503. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9808003>.
2. Gordoа P., R., Pickering A., *Non-isospectral scattering problems: A key to integrable hierarchies* // J. Math. Phys. 1999. V. 40, P. 5749–5786. <https://doi.org/10.1063/1.533055>.
3. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, М.: Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004.
4. Gromak V.I., Laine I., Shimomura S. *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*, De Gruyter. Studies in Mathematics. V. 28. Berlin; New-York, 2002. <https://doi.org/10.1515/9783110198096>
5. Airault H. *Rational solutions of Painlevé equations* // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53. <https://doi.org/10.1002/sapm197961131>
6. Kudrushov N.A. *The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them* // Phys. Lett. 1997. A. 224 P.353–360. [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00795-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00795-5)
7. Gromak V.I. *Bäcklund transformations of the Painlevé equations and their applications* // The Painlevé Property. One Century Later. / Ed. R. Conte. CRM Series in Mathematical Physics. New York; Berlin; Heidelberg, 1999. P. 687–734. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1532-5-12>
8. Clarkson P. A., Mansfield E. L. *The second Painlevé equation, its hierarchy and associated special polynomials* // Nonlinearity. 2003. V. 16. P. R1–R26. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/16/3/201>
9. Joshi N. *The second Painlevé hierarchy and the stationary KdV hierarchy* // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. 2004. V. 40, N. 3. P. 1039–1061. <https://doi.org/10.2977/prims/1145475502>
10. Gordoа P. R., Mugan U., Pickering A., Sakka A., *Backlund transformations for higher order Painlevé equations* // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. V.22. P. 1103–1115. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/2/025210> <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.055>
11. Bobrova I. *On symmetries of the non-stationary $P_{II}^{(n)}$ hierarchy and their applications* // arXiv:2010.10617v2[nlin.SI]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.10617>
12. Громак В.И. *Аналитические свойства решений уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. N. 8. С. 1017–1033. <https://doi.org/10.1134/s0012266120080030>
13. Cosgrove C.M. *Higher-Order Painlevé Equations in the Polynomial Class II: Bureau Symbol P1* // Studies in Applied Mathematics, 2006, vol. 116, no. 4, pp. 321–413. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9590.2006.00346.x>
14. Громак В.И. *О преобразовании Беклунда стационарных уравнений иерархии второго уравнения Пенлеве* // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2024. Т. 60, N. 3. С. 195–202 <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-195-202>

УДК 517.954

О СВОЙСТВАХ ОБЩЕГО ОПЕРАТОРА, ДВОЙСТВЕННОГО К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА–КИПРИЯНОВА

В. А. Калитвин¹, М. Г. Лапшина²e-mails: ¹ kalitvin@gmail.com, ² marina.lapsh@ya.ru

Преобразование Радона находит свое применение при решении различных прикладных задач, среди которых особенно большое значение занимают вопросы компьютерной томографии. Преобразование Радона–Киприянова (K_γ), введенное в 1998 г. является обобщением результатов, полученных с применением преобразования Радона. При проведении исследований необходимо ввести двойственное к нему преобразование. В данной работе рассматриваются свойства общего оператора, двойственного к преобразованию Радона–Киприянова в многомерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: Преобразование Радона–Киприянова; преобразование, двойственное преобразованию Радона–Киприянова; скрытая сферическая симметрия.

ON PROPERTIES OF THE GENERAL OPERATOR DUAL TO THE RADON–KIPRIYANOV TRANSFORM

V. A. Kalitvin¹, M. G. Lapshina²e-mail: ¹kalitvin@gmail.com, ²marina.lapsh@ya.ru

The Radon transform finds application at the solution of different applied problems. Among them the great importance have the problems of the computer tomography. Radon-Kipriyanov transform (K_γ), introduced in 1998, is using to generalize the results obtained by applying the Radon transform. When conducting the research it is necessary to introduce a dual to this transformation. In this article, the properties of a general operator dual to the Radon-Kipriyanov transform in the multi-dimensional euclidean space are considered.

Keywords: Radon–Kipriyanov transform; dual transform to Radon–Kipriyanov transform; hidden spherical symmetry.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 44A12, Secondary 47G30.

1 Введение

Рассмотрим преобразование Радона специального вида, впервые полученное в работе И.А. Киприянова и Л.Н. Ляхова [1]:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle) (x')^\gamma dx,$$

где $\mathcal{P}_{x'}^\gamma$ ($\gamma_i > 0$) – многомерный оператор Пуассона [2]:

$$\mathcal{P}_{x'}^\gamma g(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi g(x_1 \cos \alpha_1, x_2 \cos \alpha_2, \dots, x_m \cos \alpha_m, x'') \prod_{i=1}^m \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha,$$

$$C(\gamma) = \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma_i}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}, \quad d\alpha = d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_m.$$

Здесь $\delta(P(x))$ – обобщенная дельта функция Дирака, сосредоточенная на поверхности $P(x)=0$ в $\mathbb{R}_n$, $\langle x, \theta \rangle$ — скалярное произведение n - мерных векторов, θ — единичный вектор нормали к гиперплоскости, являющийся внешним по отношению к полупространству $\langle x, \theta \rangle < p$.

Пусть

$$\begin{aligned} x &= (x', x'') \in \mathbb{R}_n^+ = \mathbb{R}_m^+ \times \mathbb{R}_{n-m}, \\ \mathbb{R}_m^+ &= \{x' : x_1 > 0, \dots, x_m > 0\}, \quad 1 \leq m \leq n, \\ \gamma &= (\gamma_1, \dots, \gamma_m), \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (x')^\gamma = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}. \end{aligned}$$

Это преобразование можно представить в виде *специального (весового) преобразования Радона* $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ [1, 2]:

$$\begin{aligned} K_\gamma[f](\tilde{\theta}; p) &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \tilde{\theta} \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dz = \\ &= C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+} \tilde{f}(z) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z), \\ z &= (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, x'') = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}, x''), \\ \mathbf{z}_1 &= (z_1, z_3, \dots, z_{2n-1}), \quad \mathbf{z}_2 = (z_2, z_4, \dots, z_{2n}). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь единичный вектор нормали $\Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \dots, \theta_m, 0, \theta'') \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+}$, перпендикулярен координатным осям $0z_{2i}$, $C(\gamma)$ — константа, нормирующая интегральный оператор Пуассона, а интегрирование происходит по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+$, определенной неравенствами $z_{2i} > 0$.

С помощью равенства

$$\Theta_\perp^+ = \{z : \langle \Theta, z \rangle = p, \quad z_{2i} > 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+}.$$

определена полуплоскость интегрирования в выражении (1).

Заметим, что координаты z_{2i} не входят в уравнение плоскости $\Theta_\perp^+$, но являются переменными точками этой плоскости.

При фиксированном векторе Θ будем использовать обозначение

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p).$$

Аналогично [6], представим преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости $\Theta_\perp^+$ в евклидовом пространстве точек $\in \mathbb{R}_{n+2m}^+$:

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z). \tag{2}$$

Заметим, что интегрирование по переменным z_2 может рассматриваться как преобразование Меллина.

2 Двойственное преобразование в многомерном евклидовом пространстве

Определение 1. Функции $f(x')$, определенные в пространстве $\mathbb{R}_n^+$, будем называть x_i -четными по Киприянову (или x_i -четными), если они допускают четное продолжение с сохранением класса гладкости.

Определение 2. Функцию x_i -четную по каждой координате вектора $x' = (x_1, \dots, x_n)$ будем называть x' -четной по Киприянову (или x' -четной функцией).

Пусть функции $f = f(z)$ и $g = g(z)$ принадлежат подпространству $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ основных функций Л. Шварца, состоящему из x' -четных по Киприянову функций. Функция (2) является функцией одного переменного p , поэтому позволяет ввести линейную форму в $\mathbb{R}_1$ следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} d\Gamma(z) dp. \tag{3}$$

Введем новую переменную

$$y = p\Theta + z \in \overline{\mathbb{R}_{n+2m}^+} = \{y = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, x'') : z_{2i} \geq 0\}.$$

По построению, векторы Θ и z ортогональны: $\langle \Theta, z \rangle = 0$. Так как координаты z_{2i} отсутствуют в скалярном произведении векторов Θ и z , то

$$\langle y, \Theta \rangle = p\Theta^2 + \langle z, \Theta \rangle = p,$$

где

$$\Theta = (\Theta_1, 0, \Theta_2, 0, \dots, \Theta_m, 0, \Theta'') \quad |\Theta| = 1,$$

так как $\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \dots + \Theta_m^2 + |\Theta''|^2 = 1$.

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p) g(p) dp &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1} dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Полученное в (4) преобразование

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$$

будем называть *двойственным преобразованием Радона—Киприянова* в $\mathbb{R}_{n+2m}^+$. Заметим, что полученное преобразование является обобщением оператора, двойственного к преобразованию Радона, применение которого к задачам компьютерной томографии описано в [4].

Введем преобразование координат $y_i \in \mathbb{R}_{n+2m}^+$ ($i = 1, \dots, m$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{2i-1} = x_i \cos \alpha_i, & 0 < \alpha_i < \pi, \\ z_{2i} = x_i \sin \alpha_i, & x_i > 0 \\ x' = x' \end{array} \right| \begin{array}{l} y = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, x'') \rightarrow \\ \rightarrow \{x : (x', x''), x' = x_1, x_2, \dots, x_m > 0\} = x \in \mathbb{R}_n^+ \end{array} \quad (5)$$

Так как первоначальные координаты возникли в результате вращения осей координат, при котором оси Ox_{2i-1} совпали с направлением перпендикуляра к плоскости интегрирования, то учитывая равенство $f(x', x'') = \tilde{f}(z)$ и (4), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p) g(p) dp &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i - 1} dy = \\ &= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} f \left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2m-1}^2 + z_{2m}^2}, \tau \right) \times \\ &\times g \left(\Theta, (x_1 \theta_1 \cos \alpha_1 + x_2 \theta_2 \cos \alpha_2 + \dots + x_m \theta_m \cos \alpha_m + x_{m+1} \theta_{m+1} + \dots + x_n \theta_n \theta) \right) \times \\ &\times \prod_{i=1}^m \sin^{2\gamma_i} \alpha_i (t)^\gamma dx, \end{aligned}$$

где $(x')^\gamma = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}$, $dx = dx' dx''$.

Используя определение многомерного оператора Пуассона, получим следующее представление линейной формы (3):

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma g(\theta, \langle x, \theta \rangle) (x')^\gamma dx' dx''.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 1.

Для функций $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma,\theta}[f](p) g(p) dp &= \int_{\mathbb{R}_{n+2m}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\#[g](y) \prod_{i=1}^m z_{2i}^{\gamma_i-1} dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx' dx'', \end{aligned} \quad (6)$$

первое из которых выполняется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ (в результате вращения (5)) с двойственным оператором

$$\mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\#[g](y) = C(\gamma)g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle), \quad y \in \mathbb{R}_{n+2m}^+, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \dots, \theta_m, 0, \theta''), \quad (7)$$

а второе справедливо в исходном евклидовом полупространстве $\mathbb{R}_n^+$ с двойственным оператором

$$K_{\gamma,\theta}^\# g(x) = \mathcal{P}_{x'}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)). \quad (8)$$

В теореме 1 определены виды общих двойственных операторов Радона—Киприянова.

Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n$ определим интегрированием по взвешанной сфере в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) &= \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) (x')^\gamma dx' dx'', \\ \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) &= \int_{S_1^+(n)} g(\Theta, \langle \Theta, x \rangle) \Theta^\gamma dS, \end{aligned}$$

где $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $(x')^\gamma = \prod_{i=1}^m x_i^{\gamma_i}$,

$$\mathcal{K}_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx = \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_{x'}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) (\theta')^\gamma dS(\theta),$$

а $(\theta')^\gamma = \prod_{i=1}^m \theta_i^{\gamma_i}$.

Доказательство. Согласно равенству (6), имеем

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp (\theta')^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma,\theta}^\# g(x) (x')^\gamma dx' dx'' dS(\theta),$$

Теперь воспользуемся определением оператора $K_{\gamma,\theta}^\#$ формулой (8). Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp (\theta')^\gamma dS(\theta) = \\ &= \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x'}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) dx' dx'' dS(\theta) \end{aligned}$$

Функции f и g принадлежат пространству Л.Шварца. Поэтому можно изменить порядок интегрирования. Поменяв порядок интегрирования, получим утверждение доказываемой теоремы. $\square$

Отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}_\gamma^\#$ получен дополнительным интегрированием функции $K_{\gamma,\theta}^\# g(x)$ по полусфере $S_1^+(n)$, поэтому не зависит от вектора нормали к плоскости. Этим отличается от $K_{\gamma,\theta}^\#$ — двойственному преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n^+$ (первое из равенств в (1) и от оператора $\mathcal{K}_{\gamma,\Theta}^\#$ — двойственного к преобразованию Радона—Киприянова, полученного вращением, которое приводит к интегрированию по $\mathbb{R}_{n+2m}^+$ (второе из равенств в (1)).

3 Заключение

Использование общего оператора, двойственного к преобразованию Радона-Киприянова, позволяет рассмотреть решение задач, связанных с обращением преобразования Радона-Киприянова, что может быть использовано при решении большого класса задач. Заметим, что данная работа является обобщением результатов, часть которых получена ранее в [6].

Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. *О преобразованиях Фурье, Фурье–Бесселя и Радона*. // Докл. АН СССР. 1998. V. 360, N. 2. С. 157–160.
2. Левитан Б.М. *Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя*. // УМН. 1951. Т. 6, N. 2. С. 102–143.
3. Ляхов Л.Н. *Преобразование Киприянова–Радона*. // Тр. МИАН. 2005. Т. 248. С. 153–163.
4. Наттерер Ф. *Математические основы компьютерной томографии*. М.: Мир. 1990.
5. Киприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи*. М.: Наука. 1997.
6. Kalitvin V.A., Lapshina M.G. *Radon–Kipriyanov Transform of Laplace Series by Weight Spherical Functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023 Vol. 44, No. 8. P. 3323–3330. DOI 10.1134/S1995080223080231.
5. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи (М.: Наука. 1997.)
6. Kalitvin V.A., Lapshina M.G. Radon–Kipriyanov Transform of Laplace Series by Weight Spherical Functions // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 8, pp. 3323–3330. – 2023. – Т. 44, № 8. – С. 3323–3330. – DOI 10.1134/S1995080223080231. – EDN XHKVSC.

УДК 330.47+330.131.7

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РИСКИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРОБЛЕМАМИ ИНФОРМАЦИИ**М. В. Карпиеня**

e-mail: karpiyenia.mv@gmail.com

В настоящей работе приведена классификация экономических рисков, порожденных проблемами информации. Обсуждаются методы анализа таких рисков, позволяющие повысить эффективность управленческих решений.

Ключевые слова: экономические риски; информация; принятие решений.

ECONOMIC RISKS GENERATED BY THE PROBLEMS OF INFORMATION**M. V. Karpiyenia**

e-mail: karpiyenia.mv@gmail.com

A classification of economic risks generated by the problems of information is given. The methods of analysis of such risks which could allow to increase the efficient of the management decisions are discussed.

Keywords: economic risks; information; management decisions.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B05, Secondary 91B44.

1 Введение

При теоретическом исследовании экономических систем предполагается, что все участники обладают полной, достоверной, равной, достаточной для принятия решений информацией (см., например, [1]). Примером симметричной и полной информации является рынок совершенной конкуренции [2], позволяющий агентам принимать оптимальные решения. Для принятия оптимальных решений агентам необходим доступ к достоверной информации о товарах и услугах, планах контрагентов, потенциальных возможностях участников рынка, имеющихся альтернативах и др. Важным также является использование математических методов (см., например, [3, 4]) и различных вариантов математического моделирования (см., например, [5]). Доступ к информации на рынке совершенной конкуренции является неограниченным и бесплатным.

Реальный рынок является рынком несовершенной конкуренции. Принятие оптимальных решений сопровождается различными рисками, в том числе порожденными проблемами информации. Основные проблемы информации в экономике заключаются в неполноте, недостоверности и асимметрии.

2 Неполнота информации

Одним из ключевых характеристик несовершенного рынка является неполнота информации, которая определяется невозможностью полной и достоверной оценки таких факторов, как намерения контрагентов, качество товаров и услуг, платёжеспособность кредитополучателей и других переменных. В условиях ограниченности информации каждый экономический агент — будь то производитель или потребитель в контексте ВВП страны — сталкивается с трудностью в принятии обоснованных решений. Это затрудняет процесс оптимизации ресурсов и ведет к экономическому риску, который проявляется как на уровне отдельных организаций, так и на уровне транснациональных корпораций.

Основная задача бизнес-разведки заключается в обеспечении участников рынка необходимой информацией, однако следует отметить, что контрагент, обладая полными сведениями, может не

стремиться к их распространению среди остальных участников, поскольку это может не соответствовать его интересам. В этом контексте ценность информации выходит за пределы просто данных и включает в себя интерпретацию и оценку этих данных, которая формируется на основе опыта и ситуации на рынке.

Невозможность обеспечить всех экономических агентов полным объемом информации обусловлена рядом факторов. Во-первых, значительные ресурсы, требуемые для получения достоверных сведений, делают процесс дорогим и трудоемким. Во-вторых, информация быстро устаревает в условиях изменения экономической среды, что снижает ее актуальность и надёжность. В-третьих, проблема возникает из-за ограничения способности агентов обрабатывать информацию, что неизбежно приводит к утрате части данных, особенно в условиях огромных объемов информации, поступающих в систему. Наконец, эффективность обработки информации ограничена техническими и методологическими возможностями (см., например, [5, 6]), что также влияет на достоверность получаемых данных.

Таким образом, неполнота информации является неотъемлемой характеристикой рыночной реальности, играющей ключевую роль в возникновении рыночной неопределенности и снижении общей эффективности функционирования экономических систем. Каждый экономический агент сталкивается с ограниченностью информации, доступной для принятия решений. Эти ограничения касаются как данных о самом объекте сделки, так и информации о процессе ее совершения и возможных последствиях. Причины неполноты информации многогранны и включают несколько ключевых факторов.

Прежде всего, процесс получения информации всегда сопряжен с затратами ресурсов. Экономический агент, принимающий решение о сборе информации, руководствуется соображением о том, что выгоды от ее получения должны превышать понесённые издержки. Этот баланс является основой принятия решения о том, стоит ли инвестировать усилия в сбор данных.

Во-вторых, значительная проблема заключается в надёжности информации. Даже если информация, доступная экономическому агенту, является точной на момент ее получения, со временем она может утратить свою актуальность из-за изменений в экономической среде. Это ведет к ее устареванию, а следовательно, к невозможности полагаться на неё при принятии будущих экономических решений.

Кроме того, экономические агенты часто сталкиваются с невозможностью обработать весь объем доступной информации. Психологические и когнитивные ограничения заставляют их отбирать лишь наиболее значимую информацию, в то время как остальная часть данных теряется. Этот процесс, называемый проблемой усвоения информации, также приводит к недооценке значимой части совокупности данных.

Наконец, не все экономические агенты обладают достаточными знаниями и навыками для полноценной переработки поступающей информации. Отсутствие необходимых компетенций создает препятствия для эффективного принятия решений и обработки данных. Это выражается в проблемах обработки информации, которые становятся важным фактором ограниченности ее использования.

Таким образом, неполнота информации — это не только неизбежная характеристика экономической жизни, но и фактор, существенно влияющий на условия функционирования рынков. Она ведет к возникновению дополнительных транзакционных издержек для агентов, а также создает неравные условия для их деятельности. Наличие неопределенности, порожденной неполнотой информации, может существенно повлиять на способность рынка эффективно распределять ресурсы, что в свою очередь снижает его общую эффективность. Фирмы могут наблюдать лишь цены, а объемы выпуска продукции конкурентами и рыночный спрос на нее им неизвестны. Снижение цены может быть воспринято фирмой как следствие увеличения выпуска продукции конкурентами, хотя на самом деле оно может быть вызвано сокращением спроса.

Порождающая рыночную неопределенность неполнота информации - лишь часть проблемы, с которой сталкиваются участники рыночных отношений. Другая часть этой проблемы заключается в том, что доступная информация неравномерно распределена среди участников рыночных сделок. Продавцы более осведомлены о продукте, чем покупатели. Но покупатели знают, какую максимальную цену они готовы заплатить за благо или товар, а продавцам это неизвестно. Со своей стороны продавцы знают, по какой минимальной цене они готовы продать продукт, а это неизвестно покупателям. Разная степень осведомлённости агентов рынка как раз и приводит к информационной асимметрии.

3 Асимметрия информации

Асимметрия информации — это фундаментальная проблема, возникающая в условиях концентрации информации в руках ограниченного числа участников рынка. Этот феномен присущ самому рынку и оказывает многогранное влияние на его функционирование. Асимметрия информации отражается не только на поведении потребителей и рыночной стратегии компаний, но и на конкуренции в целом, что, в свою очередь, сказывается на эффективности рынка.

Одним из основных проявлений асимметрии информации является монопольное владение значимыми данными, что позволяет владельцам этой информации использовать ее в своих интересах, нанося ущерб менее информированным контрагентам. Такой механизм характерен для множества современных рынков, где отдельные участники обладают стратегическим преимуществом, зная больше о рынке или товаре, чем их конкуренты. В таких условиях, даже если фирмы и потребители действуют в собственных интересах, их решения, основанные на неполной или искаженной информации, могут привести к неэффективности функционирования рынка.

Примечательно, что частные рынки зачастую не предоставляют информацию в необходимом объеме и должном качестве. Например, фирмы могут не быть заинтересованы в тщательном исследовании долгосрочных рисков для здоровья своих работников, поскольку такие исследования требуют значительных затрат. В отсутствие строгого контроля, как это происходит при отсутствии штрафов за мошенничество, производители небезопасных товаров могут скрывать потенциальную опасность своих изделий, что еще больше ухудшает ситуацию с информацией.

Современная экономика настолько сложна, что лишь немногие участники способны обработать и адекватно оценить всю необходимую информацию для принятия безошибочных решений. Это подтверждает существование двух типов асимметрии информации. Во-первых, скрытые характеристики, когда одна из сторон сделки располагает более полными данными, чем другая. Во-вторых, скрытые действия, когда более информированные участники могут предпринимать действия, которые остаются незамеченными для менее осведомленных сторон, что приводит к искажению принятия решений.

Таким образом, асимметрия информации является неотъемлемой частью рыночных механизмов, что вызывает необходимость разработки специальных инструментов для минимизации ее негативных последствий, таких как информационные отклонения и рыночные искажения. Влияние информационной асимметрии на рынок проявляется в различных формах, и каждая из них может существенно влиять на его эффективность и конкурентоспособность. Одним из наиболее ярких проявлений является формирование рыночной власти продавцов. В условиях, когда получение информации связано с дополнительными затратами для потребителей, покупка товара или услуги становится оправданной лишь в случае, если ожидаемые выгоды от получения информации превосходят затраты на ее поиск. Однако если покупатели не осведомлены о реальных затратах и выгодах, продавцы могут использовать это, устанавливая цены, превышающие равновесные значения. Это особенно характерно для рынков монополистической конкуренции и олигополий, где продавцы могут манипулировать ценами, что приводит к ситуациям, когда товары продаются по ценам, значительно превышающим их предельные издержки.

Еще одной важной формой проявления информационной асимметрии является ценовая дискриминация. Когда покупатели не могут точно оценить качественные характеристики товара по соотношению «цена-качество», продавцы получают возможность дифференцировать свои товары не на основе реальных качественных характеристик, а путем их имитации. Этот процесс называется фантомной дифференциацией, и он позволяет продавцам извлекать дополнительную прибыль, манипулируя восприятием потребителей относительно ценности и качества продуктов.

Информационная асимметрия также может оказывать негативное влияние на производителей товаров и услуг. В этом случае скрытые характеристики потребителей могут привести к тому, что фирмы не получают прибыль, пропорциональную их рыночной власти. Например, если фирмы не могут правильно оценить предпочтения или поведение потребителей, они рискуют не достичь оптимального уровня продаж, что снижает их доходность и эффективность.

Наконец, асимметрия информации представляет собой серьезную проблему для работодателей, особенно в процессе найма рабочей силы. Если работодатели не способны точно оценить профессиональные качества кандидатов на вакансии, это может привести к найму неподходящих работников, что, в свою очередь, снижает прибыль и эффективность фирмы. Более того, эта ситуация также ухудшает функционирование рынка труда в целом, поскольку снижает его прозрачность и уменьшает возможности для оптимального распределения рабочей силы.

Таким образом, информационная асимметрия затрудняет эффективное функционирование рын-

ков, создавая барьеры для конкурентоспособности и приводя к искажению рыночных механизмов, что влечет за собой дополнительные издержки и потери для всех участников экономической системы.

Асимметрия информации создает условия для злоупотреблений со стороны одного из участников сделки, использующего неинформированность контрагента в своих интересах. В отличие от проблемы неполноты информации, асимметрия информации ведет к значительному снижению общественного благосостояния, так как затрудняет эффективное распределение ресурсов и ведет к возникновению рыночных искажений. Одним из самых серьезных последствий информационной асимметрии является влияние на конкуренцию и стратегию поведения фирм. Когда одни участники рынка обладают большими объемами информации, чем другие, это может привести к отказу менее информированных агентов от участия в рыночных операциях, что в свою очередь ухудшает общий уровень конкуренции.

Одним из наиболее значительных последствий асимметричной информации является негативный отбор и скрытая опасность. Эти два явления часто тесно переплетаются, что затрудняет их четкое разделение. Негативный отбор возникает в ситуациях, когда у одного из участников сделки есть скрытые характеристики, то есть такие свойства, о которых он осведомлен, но которые не проявляются явно и остаются неизвестными другой стороне сделки. В свою очередь, скрытая опасность связана с тем, что одна из сторон сделки может предпринимать скрытые действия, которые не могут быть проконтролированы другой стороной. Эти действия могут быть связаны с ухудшением условий сделки для менее информированного контрагента.

Особое внимание стоит уделить модели Акерлофа [7], которая объясняет, как асимметрия информации влияет на рынок товаров. В случае, если покупатели не обладают полной информацией о качестве товара на момент покупки, цена товара не должна отражать его истинное качество. Эта ситуация создает стимул для продавцов выпускать товары низкого качества, поскольку покупатели, не имея достоверной информации, не могут оценить реальные характеристики товара. Такое явление особенно характерно для товаров, качество которых нельзя проверить до покупки. Сюда можно отнести такие товары, как одежда, обувь и другие «разыскиваемые товары», качество которых потребитель может оценить только при их непосредственном использовании. В свою очередь, существуют товары, качество которых можно проверить только после их приобретения, такие как консервы или еда в ресторане — эти товары называются «проверяемыми». Кроме того, есть товары, качественные характеристики которых остаются непрозрачными даже после их потребления, например, своевременность медицинского вмешательства. Такие товары относятся к категории товаров, основанных на доверии, где потребители полагаются на репутацию поставщика или производителя.

Проблемы, связанные с асимметрией информации на рынках товаров, особенно тех, которые принадлежат к категориям «проверяемых» и «товаров на доверие», являются одними из самых острых в современной экономике. К числу наиболее важных из этих проблем относятся риск безответственного поведения со стороны производителей, а также негативный отбор. Оба этих явления могут привести к существенным искажениям на рынке и снижению общественного благосостояния. В ответ на эти вызовы государство и другие регулирующие органы могут принимать ряд мер для обеспечения баланса между интересами потребителей и производителей, а также для стимулирования развития высококачественных товаров.

Одной из ключевых стратегий, используемых государством, является поддержка стандартизации и сертификации. Стандарты, представляющие собой набор критериев, которым должен соответствовать товар для того, чтобы считаться высококачественным, могут быть введены как государственными регулирующими органами, так и профессиональными ассоциациями, например, союзами потребителей или промышленников. Сертификация товаров, в свою очередь, позволяет установить, соответствует ли товар заявленным стандартам, что помогает укрепить доверие потребителей. Примерами таких рынков являются рынки продуктов питания и лекарственных препаратов, где высокое качество имеет первостепенное значение для здоровья и безопасности потребителей.

Тем не менее, стандарты и сертификация могут привести к нежелательным побочным эффектам. Во-первых, существует риск их использования в антиконкурентных целях, когда компании или группы компаний могут манипулировать стандартами с целью ограничить доступ на рынок новых участников или создать барьеры для конкуренции. Во-вторых, стандарты могут не охватывать новые продукты, инновации или улучшенные характеристики, которые не соответствуют существующим нормативам. В-третьих, процесс стандартизации и сертификации связан с дополнительными издержками, что может увеличить стоимость продукции и снизить её доступность для потребителей.

Другой важной мерой, которую может предпринимать государство, является контроль за рекламной активностью рыночных агентов. В условиях асимметрии информации реклама может быть использована для распространения недостоверной или искажённой информации о товаре, что приводит к введению потребителей в заблуждение. Поэтому важнейшей задачей является обеспечение достоверности рекламных материалов и пресечение попыток манипулировать сознанием потребителей с целью повышения продаж.

Регулирование цен также является важным инструментом, направленным на борьбу с информационной асимметрией. Это может предотвратить ситуацию, при которой производители низкокачественных товаров используют свои преимущества в издержках для того, чтобы подавить ценовую конкуренцию и искусственно занижать цены на рынке. Такая ценовая конкуренция может привести к снижению качества товаров в долгосрочной перспективе. Государственное регулирование цен помогает создать более честные и конкурентные условия на рынке, обеспечивая защиту интересов потребителей. Однако важно, чтобы государственное вмешательство в рыночные процессы было сбалансированным. Оно должно сочетаться с усилиями производителей высококачественной продукции, направленными на информирование потребителей о достоинствах их товаров. Это создает конкуренцию на основе качества, что способствует стимулированию инноваций и повышению общих стандартов в индустрии.

Самым эффективным методом убеждения покупателей в качестве товара является репутация фирмы-производителя и продавца. Однако в условиях асимметричной информации, когда покупатели не обладают полной информацией о товаре, могут возникать ситуации, когда низкокачественные товары продаются под видом высококачественных. Это происходит, во-первых, когда производители маскируются под известные марки, и, во-вторых, когда торговые фирмы используют доверие потребителей к популярным торговым маркам. В таких условиях основным сигналом о качестве товара для потребителя становится не только репутация продавца, но и предоставление гарантий на товар.

Тем не менее, гарантия сама по себе не является идеальным сигналом о качестве, так как ее полнота может вызвать недоразумения. Неполная гарантия может восприниматься покупателем как сигнал о дефектах товара, в то время как полная гарантия может способствовать небрежному обращению с товаром, поскольку покупатель чувствует себя защищенным от последствий неправильной эксплуатации. В этом случае снова возникает проблема асимметричной информации — продавец не в состоянии контролировать, как покупатель будет обращаться с товаром после его приобретения. Это приводит к риску безответственного поведения со стороны покупателя, а также создает возможность для негативного отбора, поскольку полная гарантия может быть более привлекательной для недобросовестных покупателей, чем для тех, кто относится к товару ответственно.

Кроме того, наличие проблемы асимметричной информации о качестве товара создаёт дополнительные барьеры для новых игроков на рынке. Даже при использовании различных стратегий продавцов, таких как предоставление гарантий, установление низкой входной цены или применение расточительных расходов на продвижение, успешное позиционирование товара требует значительных затрат, связанных с развитием репутации. Неполная информированность покупателей о ценах и качестве товаров создает возможности для фирм на рынках с низкой концентрацией продавцов получать экономическую прибыль. Когда покупатели не обладают полной информацией о ценах, конкуренция между фирмами на рынке становится ограниченной. Чем хуже покупатели информированы о ценах на заменители товаров, тем легче продавцам устанавливать более высокие цены.

Таким образом, асимметрия информации о ценах и качестве товара снижает эффективность конкуренции и создает условия для возникновения монопольной или квазимонопольной власти на товарных рынках. Даже при наличии большого числа продавцов, недостаток информации у потребителей позволяет отдельным фирмам получать экономическую прибыль, по крайней мере, в краткосрочной перспективе. Расходы на получение информации, а также на предоставление сигналов о качестве товара, могут значительно повысить барьеры для входа на рынок новых игроков, что в дальнейшем способствует укреплению позиций уже существующих фирм и снижает конкуренцию.

4 Заключение

Рыночная неопределенность является неотъемлемым условием принятия экономических решений всеми субъектами рынка. Ее суть заключается в том, что экономические агенты вынуждены принимать решения в условиях, когда изменения внешней среды трудно предсказать, а вероятность этих изменений невозможно точно оценить. Поскольку неполнота информации неизбежно сопровождается

все экономические процессы, рыночная неопределенность в принципе не устранима, хотя её влияние можно минимизировать, но исключить полностью невозможно.

Рыночная неопределённость ведет к нескольким важным последствиям. Во-первых, она затрудняет принятие оптимальных решений, поскольку субъекты рынка не могут быть уверены в достоверности и полноте информации. Во-вторых, неопределенность порождает дополнительные транзакционные издержки, поскольку экономические агенты вынуждены тратить ресурсы на сбор, обработку и проверку информации. В-третьих, рыночная неопределенность создает неравные условия для субъектов рынка, что в свою очередь может приводить к неравномерному распределению благ и ресурсов. В-четвертых, высокая степень неопределенности способствует тому, что фирмы склонны действовать схожими стратегиями, что может привести к снижению конкуренции и эффективности рынка.

Неполнота информации является неотъемлемой частью экономической реальности, влияющей на функционирование рынков. Она создает дополнительные транзакционные издержки для экономических агентов, что обостряется в условиях асимметричной информации. Этот вид неполноты информации оказывает особенно сильное воздействие на рыночные процессы, создавая возможности для злоупотреблений, когда один из участников сделки использует неосведомлённость контрагента в своих интересах. В результате этого общественное благосостояние снижается.

Асимметрия информации влияет на поведение рыночных участников и механизмы функционирования рынка, приводя к неоптимальному распределению ресурсов. Это также препятствует достижению рыночного равновесия, создавая дисбаланс в обмене и распределении товаров и услуг. С развитием экономических процессов и усложнением организационно-правовых форм деятельности как юридических, так и физических лиц, проблемы асимметрии информации становятся более выраженными. В частности, рост размера корпораций, их географическое распространение и сложные организационные структуры лишь усугубляют эти проблемы. Чем больше организация, тем сложнее обмен информацией внутри нее, что приводит к ещё большей информационной асимметрии и создает условия для злоупотреблений.

Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке задания 1.7.01.4 программы “Конвергенция–2025”.

Литература

1. Андрейчиков, А. В., Андрейчикова, О. Н. *Анализ, синтез, планирование решений в экономике*, М.: Финансы и статистика, 2004. – 464 с.
2. Стиглер, Дж. *Совершенная конкуренция: исторический ракурс* // Вехи экономической мысли. Том 2. Теория фирмы/Под ред. В. М. Гальперина — СПб.: Экономическая школа, 2000. – С. 299–328 – 534 с.
3. Солодовников, А. С., Бабайцев, В. А., Браилов, А. В., Шандра, И. Г. *Математика в экономике*. Учебник. Часть 2, М.: Финансы и статистика, 2003. – 560 с.
4. Авондо-Бодино, Дж. *Применение в экономике теории графов*, М.: Прогресс, 1966. – 160 с.
5. Мажукин, В. И., Королева, О. Н. *Математическое моделирование в экономике*. Часть 3. Экономические приложения, М.: Флинта, МПСИ, 2005. – 176 с.
6. Вдовин, В. М., Суркова, Л. Е. *Информационные технологии в финансово-банковской сфере*, М.: Дашков и Ко, 2012. – 304 с.
7. Akerlof, G. A. *The Market for “Lemons”: Quality Uncertainty and the Market Mechanism*. The Quarterly Journal of Economics. 1970. V. 84, Issue 3, 488–500.

УДК 517.977

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРИВЕДЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С
НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИВ. В. Карпук¹, А. В. Метельский²e-mails: ¹vasvaskarpuk@gmail.com, ²ametelskii@gmail.com

Рассмотрена задача замыкания обратной связью линейной автономной дифференциальной системы запаздывающего типа с несоизмеримыми запаздываниями дифференциально-разностным регулятором, обеспечивающим замкнутой системе конечный спектр. Результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: дифференциальная система; несоизмеримые запаздывания; регулятор по типу обратной связи; конечный спектр.

SPECTRAL REDUCTION OF A DIFFERENTIAL SYSTEM WITH
INCOMMENSURABLE DELAYSV. V. Karpuk¹, A. V. Metel'skii²e-mail: ¹vasvaskarpuk@gmail.com, ²ametelskii@gmail.com

The problem of closing a linear autonomous differential system of delayed type with incommensurate delays by a differential-difference controller providing a finite spectrum to the closed-loop system is considered. The results are illustrated by examples.

Keywords: differential system; incommensurable delays; feedback controller; finite spectrum.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 34K06, Secondary 93B55.

1 Введение

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему управления запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - d_i) + bu(t), t > 0, \quad x(t) = \eta(t), t \in [-d_m, 0]. \quad (1)$$

Здесь x — n -вектор-столбец решения системы (1) ($n \geq 2$); $0 < d_1 < \dots < d_m$ — постоянные запаздывания; A_i — постоянные $n \times n$ -матрицы ($i = \overline{0, m}$); b — постоянный n -столбец; η — начальная кусочно непрерывная функция; u — скалярное управление. Векторные величины полагаем записанными в столбец, штрих ' обозначает операцию транспонирования.

Не ограничивая общности, полагаем $b = e_n = [0; \dots; 0; 1]'$. Этого всегда можно достичь невырожденным преобразованием переменных $\check{x} = Tx$ с постоянной матрицей T . Кроме того, выбрав управление $u(t) = -e'_n(A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - d_i)) + u_1(t)$ ($u_1(t)$ — новое управление), получим, что последняя строка матриц A_i ($i = \overline{0, m}$) — нулевая. Таким образом, считаем, что последнее уравнение системы (1) имеет вид $\dot{x}_n(t) = u_1(t)$. Если вход системы (1) содержит запаздывания: $\sum_{i=1}^m b_i u(t - d_i)$, b_i — постоянные n -столбцы ($i = \overline{0, m}$), то, введя вспомогательную переменную $u(t) = x_{n+1}(t)$, рассмотрим систему управления $(n+1)$ -го порядка: $\dot{x}_{n+1}(t) = u_1(t)$.

Пусть E_n — единичная матрица n -го порядка, и

$$W(p) = pE_n - (A_0 + A_1 e^{-pd_1} + \dots + A_m e^{-pd_m})$$

— характеристическая матрица ($p \in \mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), $w(p) = |W(p)|$ — характеристический квазиполином однородной ($b = 0$) системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ — определитель квадратной матрицы. Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbb{C} | w(p) = 0\}$ характеристического квазиполинома (с учетом их кратностей) называют спектром системы (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p)$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряженными парами.

Задача спектрального приведения заключается в замыкании системы (1) обратной связью по состоянию так, чтобы замкнутая система имела конечный спектр. При этом потребуем, чтобы замкнутая система сохраняла свой динамический тип. Конкретно в данном случае, замкнутая система должна оставаться дифференциально-разностной системой запаздывающего типа. Система вида (1) с конечным спектром это — по сути конечномерная система, что существенно упрощает решение задач управляемости и наблюдаемости для спектрально приведенной системы.

В работе [1] обосновано необходимое условие спектральной приводимости системы (1) в классе динамических дифференциально-разностных регуляторов: условие спектральной управляемости [2] системы (1) может нарушаться только в конечном числе точек

$$P = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, m_0} : \text{rank}[W(p_i), b] < n\}. \quad (2)$$

Там же установлено, что для системы (1) с соизмеримыми запаздываниями условие (2) обеспечивает существование дифференциально-разностного регулятора, приводящего систему (1) к системе с конечным спектром. В настоящей статье показано (пример 3), что условие (2) не является достаточным для спектральной приводимости системы (1) с несоизмеримыми запаздываниями даже в случае, когда $P = \emptyset$, т. е. когда система (1) спектрально управляема.

Достаточно полный обзор публикаций, посвященных различным задачам стабилизации и назначения спектра для линейных автономных систем с запаздыванием представлен в [3]. Большая часть известных работ относится к системам с одним или с соизмеримыми запаздываниями. Основные подходы здесь используют функционалы типа Ляпунова-Красовского, при этом критерий, как правило, формулируется в терминах линейных матричных неравенств [4, 5]. Эффективна теория устойчивости, развитая в работе [6] через изучение спектральных свойств инфинитезимального оператора полугруппы преобразований банахова пространства непрерывных функций, порождаемой системой нейтрального типа. На той же основе асимптотическая устойчивость и стабилизируемость системы нейтрального типа в гильбертовом пространстве состояний M_2 исследована в работе [7]. Частотные методы для дизайна стабилизирующих обратных связей применяются в работе [8]. Несмотря на огромный поток публикаций по обсуждаемой тематике, ощущается дефицит конструктивных, алгоритмизируемых результатов в задаче стабилизации и управления спектром систем с последействием.

Принципиально иной подход к решению задач, связанных с управлением спектром линейных автономных систем с запаздыванием, предлагается [9–11] авторами данной публикации. Основная идея этого подхода для системы с соизмеримыми запаздываниями следующая. Характеристический полином $d(p, \lambda)$ ($\lambda = e^{-ph}$, $h > 0$ — общая мера запаздываний) замкнутой системы принадлежит идеалу порожденному системой полиномов — алгебраических дополнений к элементам последней строки характеристической матрицы замкнутой системы. Поэтому класс возможных характеристических полиномов $d(p, \lambda)$ замкнутой системы может быть проанализирован через вычисление базиса Гребнера для системы алгебраических дополнений как полиномов переменных p, λ . Если выбранный полином $d(p, \lambda)$ принадлежит идеалу, то последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы, задающая искомый регулятор, может найдена методом неопределенных коэффициентов [9–11]. В настоящей статье этот подход демонстрируется на задаче спектрального приведения системы с несоизмеримыми запаздываниями.

2 Критерий спектральной приводимости системы с несоизмеримыми запаздываниями

Считаем, что в уравнении (1)

$$d_i = \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij} h_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где k_{ij} — целые числа, $0 < h_1 < \dots < h_\mu$ — попарно несоизмеримые запаздывания. Обозначим

$$\theta_i = e^{-pd_i} = \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}, \lambda_j = e^{-ph_j}, i = \overline{1, m}, p \in \mathbb{C}.$$

В операторной записи уравнений полагаем: $\theta_i = e^{-pd_i}$ ($\lambda_j = e^{-ph_j}$) — оператор сдвига, p — оператор дифференцирования:

$$p^s \theta_i f(t) = p^s e^{-pd_i} f(t) = f^{(s)}(t - d_i)$$

или

$$p^s \theta_i f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}} f(t) = p^s \prod_{j=1}^{\mu} e^{-pk_{ij}h_j} f(t) = f^{(s)}(t - \sum_{j=1}^{\mu} k_{ij}h_j),$$

$f(t)$ — функция; $s \geq 0, i = \overline{1, m}, k_{ij}$ — целые числа. Построим дифференциально-разностный регулятор, обеспечивающий приведение исходной системы (1) к системе с конечным спектром.

Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\mu)$, $A(\Lambda) = A_0 + \sum_{i=1}^m A_i \prod_{j=1}^{\mu} \lambda_j^{k_{ij}}, \lambda_j \in \mathbb{C}$. Обозначим

$$M(p, \Lambda) = [M_1(p, \Lambda), \dots, M_n(p, \Lambda)], \quad (4)$$

— алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы

$$F\varphi(p, \Lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\Lambda) & \dots & -a_{1,n-1}(\Lambda) & -a_{1,n}(\Lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1}(\Lambda) & \dots & -a_{n-1,n-1}(\Lambda) & -a_{n-1,n}(\Lambda) \\ -\varphi_1(\Lambda) & \dots & -\varphi_{n-1}(\Lambda) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i} \end{bmatrix}.$$

Здесь $a_{ij}(\Lambda)$ — элементы матрицы $A(\Lambda)$; $\varphi_i(\Lambda), i = \overline{1, n-1}, \bar{\varphi}_i(\Lambda), i = \overline{1, r}$, — полиномы с действительными коэффициентами, которые подбираем такими, чтобы

$$|F\varphi(p, \Lambda)| = d_0(p), \quad (5)$$

где $d_0(p)$ — некоторый полином степени $\nu = \deg d_0(p) \geq n$. Если это возможно, то систему назовем спектрально приводимой.

Теорема 1. Система (1) спектрально приводима, если и только если редуцированный базис Гребнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \dots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (4) содержит некоторый полином $\tilde{d}_0(p)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть редуцированный базис Гребнера (в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \dots > \lambda_{i_\mu} > p$) для системы полиномов (4) содержит некоторый полином $\tilde{d}_0(p)$, множество корней которого обозначим $\tilde{P}_0$. В частности, возможно $\tilde{d}_0(p) = 1$ и тогда $\tilde{P}_0 = \emptyset$. По свойству базиса Гребнера найдется векторный полином $\tilde{\varphi}'(p, \Lambda) = (\tilde{\varphi}_1(p, \Lambda), \dots, \tilde{\varphi}_n(p, \Lambda))$ такой, что справедливо разложение

$$\tilde{\varphi}'(p, \Lambda) M(p, \Lambda) = \tilde{d}_0(p). \quad (6)$$

Если степень полинома $\tilde{\nu} = \deg \tilde{d}_0(p)$ меньше чем n , то обе части равенства (6) домножим на полином $\delta(p)$ с действительными коэффициентами степени $n - \tilde{\nu}$. Обозначим $d_0(p) = \delta(p) \tilde{d}_0(p)$. Если $\deg \tilde{d}_0(p) \geq n$, то полагаем $\delta(p) = 1$. Таким образом, $\nu = \deg d_0(p) \geq n$.

Согласно [12, следствие 1], равенство (5) можно преобразовать к виду

$$[-\varphi_1(\Lambda), \dots, -\varphi_{n-1}(\Lambda), p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Lambda) p^{r-i}] M(p, \Lambda) = d_0(p), \quad (7)$$

где $\varphi_i(\Lambda), i = \overline{1, n-1}; \bar{\varphi}_i(\Lambda), i = \overline{1, r}, (r = \nu - n + 1 \geq 1)$ — некоторые полиномы. Полиномы $\varphi_i(\Lambda), i = \overline{1, n-1}; \bar{\varphi}_i(\Lambda), i = \overline{1, r}$, можно найти методом неопределенных коэффициентов, используя (7). Равенство (7) означает, что замкнутая система с характеристической матрицей $F\varphi(p, \Lambda)$ имеет конечный спектр.

Необходимость. Если система (1) спектрально приводима, то имеет место равенство (7). В таком случае по свойству базиса Гребнера редуцированный базис для системы полиномов (4), построенный

в словарном порядке вида $\lambda_{i_1} > \dots > \lambda_{i_\mu} > p$ для системы полиномов (4), необходимо содержит некоторый полином $\tilde{d}_0(p)$ такой, что $d_0(p) = \delta(p)\tilde{d}_0(p)$. Теорема доказана. $\square$

Считаем, что старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен 1. Множество различных корней полинома $d_0(p)$ обозначим $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, \mu_0}\}$.

Замечание 1. В силу равенства (7) значения $p_k \in \tilde{P}_0$ войдут в состав корней полинома $d_0(p)$ при любом выборе полиномов $\varphi_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{\varphi}_i(\Lambda)$, $i = \overline{1, r}$, обеспечивающих равенство (7). Поэтому $d_0(p) = \delta(p)\tilde{d}_0(p)$ и $\tilde{P}_0 \subseteq P_0$. Значения $p_k \in \tilde{P}_0$ будем называть инвариантными спектральными значениями, полином $\tilde{d}_0(p)$ — инвариантным полиномом.

Если система полиномиальных уравнений

$$M(p, \Lambda) = 0$$

несовместна (редуцированный базис Гребнера имеет вид $\{1\}$), то $\tilde{P}_0 = \emptyset$, и множество корней полинома $d_0(p) = \delta(p)$ при спектральном приведении может быть произвольным самосопряженным.

3 Примеры

Набор запаздываний $h_1 < \dots < h_\mu$, порождающий переменные $\lambda_i = e^{-ph_i}$, $i = \overline{1, \mu}$, назовем базисным. Этот набор, для заданных $0 < d_1 < \dots < d_m$ (см. представление (3)) очевидно, можно сформировать по-разному. Следующий пример показывает, что для одного базисного набора спектрально управляемая система (1) с несоизмеримыми запаздываниями будет спектрально приводимой, а для другого — нет. В этом принципиальное отличие систем вида (1) от систем с соизмеримыми запаздываниями: $d_i = ih$, $h > 0$, $i = \overline{1, m}$, которые в случае спектральной управляемости всегда спектрально приводимы [1].

Поясним это замечание следующими примерами, иллюстрирующими приемы решения задачи спектрального приведения.

Пример 1. Пусть система задана своей характеристической матрицей $(\Theta = (\theta_1, \theta_2))$, $\theta_i = e^{-pd_i}$, $i = \overline{1, 2}$

$$pE_2 - \tilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p - \theta_2 & -\theta_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \ln 2, \quad d_2 = \ln 3. \quad (8)$$

Система (8) имеет бесконечный спектр, ее характеристический квазиполином: $w(p) = p(p - 3^{-p})$. Алгебраические дополнения $\tilde{M}(p, \Theta) = [\tilde{M}_1(p, \Theta), \tilde{M}_2(p, \Theta)]'$ к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p, \Theta)$:

$$\tilde{M}_1(p, \Theta) = \theta_1, \quad \tilde{M}_2(p, \Theta) = p - \theta_2.$$

Очевидно, что при любых запаздываниях d_1, d_2 данная система спектрально управляема, т. к. $\theta_1 = e^{-pd_1} \neq 0$ для всех $p \in \mathbb{C}$. В то же время система

$$\tilde{M}(p, \Theta) = 0$$

относительно p имеет бесконечно много решений, поэтому для базисного набора $h_1 = \ln 2$, $h_2 = \ln 3$ спектральное приведение невозможно. Действительно, тогда $\lambda_1 = \theta_1$, $\lambda_2 = \theta_2$. Полагая $\theta_1 = 0$, получаем:

$$\begin{vmatrix} p - \theta_2 & 0 \\ -\varphi_1(\Theta) & p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Theta)p^{r-i} \end{vmatrix} = (p - \theta_2)(p^r - \sum_{i=1}^r \bar{\varphi}_i(\Theta)p^{r-i}), \quad \theta_2 = e^{-pd_2}, \quad (9)$$

т. е. система (8) не приводится к системе конечного спектра.

Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_1 \neq 0$. Представим $d_2 = (\ln 3 - \ln 2) + \ln 2$ и возьмем $h_1 = \ln 3 - \ln 2$, $h_2 = \ln 2$. Тогда $\theta_2 = e^{-pd_2} = e^{-ph_1}e^{-ph_2} = \lambda_1\lambda_2$ ($\lambda_i = e^{-ph_i}$, $i = \overline{1, 2}$); $\lambda_1 = \theta_2/\theta_1$ и $\theta_1 \neq 0$.

Имеем $(\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2))$:

$$pE_2 - A(\Lambda) = \begin{bmatrix} p - \lambda_1\lambda_2 & -\lambda_2 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Отсюда $M_1(p, \Lambda) = \lambda_2$, $M_2(p, \Lambda) = p - \lambda_1 \lambda_2$. Находим базис Гребнера: $\{p, \lambda_2\}$ для системы полиномов $M(p, \Lambda)$, значит в разложении (6) $\tilde{d}_0(p) = p$. Возьмем $\delta(p) = (p + 1)$, тогда $d_0(p) = p(p + 1)$, $P_0 = \{0; -1\}$. Равенство (7) примет вид

$$[\lambda_1 + \lambda_2 \lambda_1^2, p + 1 + \lambda_1 \lambda_2] M(p, \Lambda) = p(p + 1),$$

или

$$\begin{vmatrix} p - \lambda_1 \lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \lambda_1^2 & p + 1 + \lambda_1 \lambda_2 \end{vmatrix} = p(p + 1).$$

С учетом $\lambda_2 = \theta_1$, $\lambda_1 = \theta_2/\theta_1$ получаем

$$\begin{vmatrix} p - \theta_2 & -\theta_1 \\ \theta_2/\theta_1 + \theta_2^2/\theta_1 & p + 1 + \theta_2 \end{vmatrix} = p(p + 1).$$

Таким образом, второе уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t - (d_2 - d_1)) - x_1(t - (2d_2 - d_1)) - x_2(t) - x_2(t - d_2).$$

Заметим, что везде аргумент запаздывающего типа: $d_2 - d_1 > 0$, $2d_2 - d_1 > 0$

Следующий пример показывает, что при построении контура спектрального приведения можно использовать сугубо операторную запись системы управления, т.е. ее характеристическую матрицу.

Пример 2.

$$pE_2 - \tilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p - \theta_1 & -\theta_2 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < d_1 < d_2. \quad (10)$$

При любых запаздываниях d_1, d_2 данная система спектрально управляема, т. к. $\theta_2 = e^{-pd_2} \neq 0$ для всех $p \in \mathbb{C}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $d_1 = \ln 2$, $d_2 = \ln 3$. Полагая $\theta_2 = 0$, имеем равенство, аналогичное (9). Поэтому для базисного набора $h_1 = \ln 2$, $h_2 = \ln 3$ спектральное приведение невозможно. Преобразуем запаздывания так, чтобы $\theta_2 \neq 0$.

Поскольку $2d_1 > d_2$, то первую строку характеристической матрицы (10) представим следующим образом:

$$(p - (\theta_1^2/\theta_2)(\theta_2/\theta_1), -(\theta_2/\theta_1)^2(\theta_1^2/\theta_2)).$$

Это равносильно преобразованию запаздываний

$$d_1 = (2d_1 - d_2) + (d_2 - d_1), \quad d_2 = 2(d_2 - d_1) + (2d_1 - d_2).$$

Введя новые базисные запаздывания $h_1 = 2d_1 - d_2 > 0$, $h_2 = d_2 - d_1 > 0$, первую строку характеристической матрицы получим в виде

$$(p - \lambda_1 \lambda_2, -\lambda_2^2 \lambda_1), \quad \lambda_1 = \theta_1^2/\theta_2, \quad \lambda_2 = \theta_2/\theta_1.$$

Теперь базис Гребнера для полиномов $\{\lambda_2^2 \lambda_1, p - \lambda_1 \lambda_2\}$ содержит полином p^2 : $\{p^2, p \lambda_2, p - \lambda_1 \lambda_2\}$. Решая полиномиальное уравнение (7), где $d_0(p) = p^2$, $M(p, \Lambda) = (\lambda_2^2 \lambda_1, p - \lambda_1 \lambda_2)$, находим вторую строку спектрально приведенной системы $(\lambda_1, p + \lambda_1 \lambda_2)$:

$$\begin{vmatrix} p - \theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^2/\theta_2 & p + \theta_1 \end{vmatrix} = p^2, \quad \theta_i = e^{-pd_i}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

2) Пусть $d_1 = \ln 2$, $d_2 = \ln 5$. Поскольку $2d_1 < d_2$, а $3d_1 > d_2$, то первую строку характеристической матрицы (10) преобразуем таким образом:

$$(p - (\theta_1^3/\theta_2)(\theta_2/\theta_1^2), -(\theta_2/\theta_1^2)^3(\theta_1^3/\theta_2)^2).$$

Введем базисные запаздывания: $h_1 = d_2 - 2d_1 > 0$, $h_2 = 3d_1 - d_2 > 0$. Первая строка характеристической матрицы (10) примет вид

$$(p - \lambda_1 \lambda_2, -\lambda_1^3 \lambda_2^2), \quad \lambda_1 = \theta_2/\theta_1^2, \quad \lambda_2 = \theta_1^3/\theta_2.$$

Аналогично п. 1), находим базис Гребнера: $\{p^3, \lambda_1 p^2, \lambda_1 \lambda_2 - p\}$ для системы полиномов $\{\lambda_1^3 \lambda_2^2, p - \lambda_1 \lambda_2\}$ и вторую строку спектрально приведенной системы

$$\begin{vmatrix} p - \theta_1 & -\theta_2 \\ \theta_1^3/\theta_2 & p^2 + p\theta_1 + \theta_1^2 \end{vmatrix} = p^3.$$

Запишем ее в нормальной форме

$$\begin{vmatrix} p - \theta_1 & -\theta_2 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ \theta_1^3/\theta_2 & \theta_1^2 & p + \theta_1 \end{vmatrix} = p^3.$$

В случае спектральной управляемости система вида (1) с соизмеримыми запаздываниями всегда спектрально приводима [1]. Для систем того же вида с несоизмеримыми запаздываниями это не так. Приведем простой пример спектрально управляемой системы с несоизмеримыми запаздываниями, которая не является спектрально приводимой ни при каком базисном наборе запаздываний (см. (3)).

Пример 3.

$$pE_2 - \tilde{A}(\Theta) = \begin{bmatrix} p - \theta_2 & 1 - \theta_1 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \ln 2, \quad d_2 = \ln 3.$$

Можно убедиться, что при любых несоизмеримых запаздываниях d_1, d_2 данная система спектрально управляема, т. к. система уравнений $p - e^{-pd_2} = 0, 1 - e^{-pd_1} = 0$ относительно p при несоизмеримых d_1, d_2 несовместна.

При любом представлении запаздываний можно положить $\theta_1 = 1$ (даже если переменная θ_1 окажется в знаменателе), и тогда получаем равенство вида (9). Таким образом, данная система дифференциально-разностным регулятором к конечному спектру не приводится.

4 Заключение

1. Система вида (1) с конечным спектром это — по сути конечномерная система, что существенно упрощает решение задач управляемости и наблюдаемости для спектрально приведенной системы.

2. Характеристический полином $d(p, \Lambda)$ замкнутой системы принадлежит идеалу порожденному системой полиномов (4) — алгебраических дополнений к элементам последней строки характеристической матрицы замкнутой системы. Поэтому класс возможных характеристических полиномов $d(p, \Lambda)$ замкнутой системы может быть проанализирован через вычисление базиса Гребнера для системы алгебраических дополнений (4) как полиномов переменных p, Λ . Если выбранный полином $d(p, \Lambda)$ принадлежит идеалу, то последняя строка характеристической матрицы замкнутой системы может найдена методом неопределенных коэффициентов.

3. Изложенный выше подход к построению регулятора спектральной приводимости является по своей сути алгебраическим, а его реализация использует стандартные операции над полиномами и полиномиальными матрицами.

Литература

1. Булатов В.И. *Спектральная приводимость систем с запаздываниями* // Вестник БГУ. Сер.1. 1979. № 3. С. 78–80. <http://elibrary.by/handle/123456789/12045>
2. Manitius A., Triggiani R. *Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions* // SIAM J. Control Optimization. 1978. V.16, № 4. P. 599–645. <https://doi.org/10.1137/0316041>
3. Pekar L., Gao Q. *Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: A literature overview of some recent results* // IEEE Access. 2018. № 6. P. 35457–35491. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2851453>
4. Chen J. D., Lien C. H., Fan K. K., Chou J. H. *Criteria for asymptotic stability of a class of neutral systems via a LMI approach* // IEE Proceedings - Control Theory and Applications. 2001. V.148, № 6. P. 442–447. <https://doi.org/10.1049/ip-cta:20010772>
5. Park J. H., Won S. *Asymptotic Stability of Neutral Systems with Multiple Delays* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1999. V.103, № 1. P. 183–200. <https://doi.org/10.1023/A:1021781602182>
6. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. *Strong stabilization of neutral functional differential equations* // IMA J. Math. Control Inf. 2002. V.19, № 1-2. P. 5–23. https://doi.org/10.1093/imamci/19.1_and_2.5
7. Rabah R., Sklyar G. M., Barkhayev P. Y. *Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems* // ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. 2012. V.18, № 3. P. 656–692. <https://doi.org/10.1051/cocv/2011166>

8. Hu G.-D. *An observer-based stabilizing controller for linear neutral delay systems* // Siberian Mathematical Journal. 2022. V. 63, № 4. P. 789–800. <https://doi.org/10.1134/S003744662204019X>

9. Карпук В. В., Метельский А. В. *Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28. <https://elibrary.ru/kyfygz>

10. Метельский А. В., Карпук В. В. *Финитная стабилизация дифференциальных систем с несоизмеримыми запаздываниями* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 1. С. 105–119. <https://doi.org/10.31857/S0374064122010113>

11. Метельский А. В. *Стабилизация дифференциально-разностной системы запаздывающего типа* // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 4. С. 531–553. <https://doi.org/10.31857/S0374064123040106>

12. Метельский А. В. *Построение наблюдателей для дифференциальной системы запаздывающего типа с одномерным выходом* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 396–408. <https://doi.org/10.1134/S0374064119030130>

УДК 517.958(075.8)

ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В. И. Корзюк¹, И. С. Козловская²
e-mails: ¹korzyuk@bsu.by, ²kozlovskaja@bsu.by

В работе рассматривается классическое решение задачи для простейшего гиперболического уравнения с интегральным и граничными условиями. Основная цель — показать, что метод характеристик является эффективным и в случае интегральных условий. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования для заданных функций на границе области в точках их соприкосновения, при выполнении которых наряду с определенной гладкостью всех функций задачи решение ее принадлежит множеству непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций (до заданного порядка).

Ключевые слова: классическое решение; метод характеристик; интегральное условие.

ARBITRARY SMOOTHNESS CLASSICAL SOLUTION OF THE PROBLEM IN A QUARTER PLANE FOR A WAVE EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION

V. I. Korzyuk¹, I. S. Kozlovskaya²
e-mail: ¹korzyuk@bsu.by, ²kozlovskaja@bsu.by

The paper considers the classical solution to the problem for the simplest hyperbolic equation with integral boundary conditions. The main goal is to show that the method of characteristics is also effective in the case of integral conditions. Necessary and sufficient conditions for arbitrary smoothness of the solution are proved.

Keywords: classic solution; characteristics method; integral condition.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35A09, Secondary 35B65.

1 Введение

В работе рассматривается классическое решение задачи для простейшего гиперболического уравнения с интегральным и граничными условиями. В такой постановке решения задач в случае неограниченных областей с интегральными условиями для гиперболических уравнений нет (по крайней мере авторам не известны), тем более произвольной гладкости. Гладкость решения зависит не только от гладкости заданных функций, но и от условий согласования этих функций в точках соприкосновения. При этом условия согласования в настоящей статье выписаны в явном виде и доказано, что они являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи принадлежало заданной гладкости (условиям непрерывности в замыкании всей области) наряду с требованиями определенной гладкости заданных функций. В литературе и статьях условия согласования, как правило, не указываются, что приводит к проблеме численной реализации отыскания решения с помощью вычислительной математики.

Близкими работами к данной статье являются [1, 2, 3]. Однако в них полученные результаты отличаются от результатов, представленных здесь.

2 Постановка задачи

Обозначим через $C^s(G)$ множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до порядка s , заданных на G , где s — целое положительное число ($s \in \mathbb{N}$). В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty)$ области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ найти решение уравнения

$$(\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0, x_2) = \varphi(x_2), \quad \partial_{x_1} u(0, x_2) = \psi(x_2), \quad x_2 \in [0, \infty), \quad (2)$$

и интегральному условию

$$\int_0^{ax_1} u(x_1, x_2) dx_2 = \mu(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty) \quad (3)$$

где $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\mu \in C^{k-1}([0, \infty))$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$, $\partial_{x_j}^2$ — операторы одноименных частных производных второго порядка по переменным x_j , $j = 1, 2$.

Для краткости задачу (1), (2), (3) будем называть задачей $M(k)$.

3 Частное решение уравнения (1) задачи $M(k)$

Решение задачи (1)–(3) будем находить исходя из общего решения линейного уравнения (1) (см., например [4, гл. 4, § 4.1]).

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= u^{(0)}(\mathbf{x}) + V_p(\mathbf{x}) = \\ &= g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u^{(0)}$ — общее решение однородного уравнения

$$\left(\partial_{x_1}^2 u^{(0)} - a^2 \partial_{x_2}^2 u^{(0)} \right) (\mathbf{x}) = 0,$$

$g^{(1)}$ — произвольная функция из класса $C^k(R)$ при предположении для определенности $a > 0$, $g^{(2)}$ — произвольная функция из класса $C^k([0, \infty))$, V_p — частное решение уравнения (1) из класса $C^k(\bar{Q})$.

Здесь построим частное решение из класса $C^k(\bar{Q})$, которое удовлетворяет не только однородным условиям Коши (2), но и однородному условию (3).

Таким образом, частное решение V_p есть решение следующей задачи. В замыкании $\bar{Q}$ найти функцию V_p из класса $C^k(\bar{Q})$, $k \geq 2$, которая удовлетворяет уравнению

$$(\partial_{x_1}^2 V_p - a^2 \partial_{x_2}^2 V_p) (\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}, \quad (5)$$

однородным условиям Коши

$$V_p(0, x_2) = \partial_{x_1} V_p(0, x_2) = 0 \quad (6)$$

и интегральному условию

$$\int_0^{ax_1} V_p(x_1, x_2) dx_2 = \sum_{m=1}^k \frac{b^{(m)}(-ax_1)^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (7)$$

Относительно коэффициентов $b^{(m)}$, $m = 1, \dots, k$, будет сказано ниже.

Решение V_p задачи (5)–(7) находим путем интегрирования уравнения (5) в области Q , а затем от полученного выражения требуем выполнения условий (6), (7).

Чтобы проинтегрировать уравнение (5) с помощью характеристических выражений приводим его ко второму каноническому виду. Для этого записываем уравнение характеристик

$$(dx_2)^2 - a^2(dx_1)^2 = (dx_2 - adx_1)(dx_2 + adx_1) = 0,$$

соответствующее уравнению (5). Из последнего уравнения находим его решения, т.е. два семейства характеристик

$$x_2 - ax_1 = \text{const}, \quad x_2 + ax_1 = \text{const}$$

уравнения (5). Делаем замену независимых переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ через новые $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ согласно формулам

$$y_1 = x_2 - ax_1, \quad y_2 = x_2 + ax_1$$

или

$$x_1 = \frac{y_2 - y_1}{2a}, \quad x_2 = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

У нас $V_p(\mathbf{x}) = w(\mathbf{y}) = w(x_2 - ax_1, x_2 + ax_1)$. Вычисляем производные функции V_p через производные функции w как производные сложной функции. В результате получим

$$\partial_{x_1} V_p(\mathbf{x}) = \partial_{y_1} w(\mathbf{y})(-a) + a \partial_{y_2} w(\mathbf{y}),$$

$$\partial_{x_1}^2 V_p(\mathbf{x}) = a^2 \partial_{y_1}^2 w(\mathbf{y}) - 2a^2 \partial_{y_2} \partial_{y_1} w(\mathbf{y}) + a^2 \partial_{y_2}^2 w(\mathbf{y}),$$

$$\partial_{x_2} V_p(\mathbf{x}) = \partial_{y_1} w(\mathbf{y}) + \partial_{y_2} w(\mathbf{y}),$$

$$\partial_{x_2}^2 V_p(\mathbf{x}) = \partial_{y_1}^2 w(\mathbf{y}) + 2 \partial_{y_1} \partial_{y_2} w(\mathbf{y}) + \partial_{y_2}^2 w(\mathbf{y}).$$

Отсюда, подставляя полученные соотношения производных $\partial_{x_j}^2 V_p(\mathbf{x})$ через производные от функции w в уравнении (5), получим дифференциальное уравнение относительно функции w ,

$$\partial_{y_1} \partial_{y_2} w(\mathbf{y}) = -\frac{1}{4a^2} f\left(\frac{y_2 - y_1}{2a}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right), \mathbf{y} = (y_1, y_2). \quad (8)$$

Область Q в декартовой системе координат x_1 и x_2 представляет собой четверть плоскости, представленной на рисунке 1. В результате замены $y_1 = x_2 - ax_1$, $y_2 = x_2 + ax_1$ перейдем в область Ω , представленную на рисунке 2 в декартовой системе координат y_1 и y_2 .

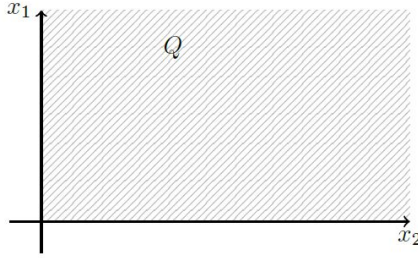


Рис. 1. Область Q .

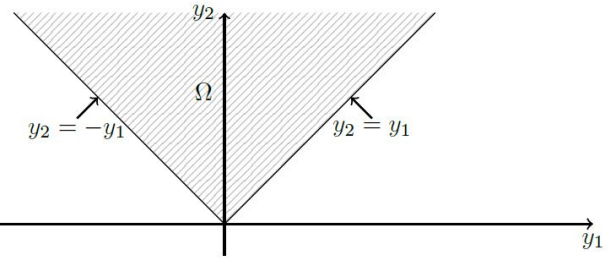


Рис. 2. Область Ω .

Интегрируем уравнение (8) в пределах области Ω по переменным y_1 и y_2 . Затем возвращаемся к переменным x_1 и x_2 . В результате получим

$$V_p(\mathbf{x}) = w(x_2 - ax_1, x_2 + ax_1) = f^{(1)}(x_2 - ax_1) + f^{(2)}(x_2 + ax_1) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{|x_2 - ax_1|}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi, \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}, \quad (9)$$

где произвольно выбранные функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ из класса C^k на соответствующих областях определения $D(f^{(1)}) = \mathbb{R}$, $D(f^{(2)}) = [0, \infty)$, если $a > 0$ и $\mathbf{x} \in \bar{Q}$. В формуле (9) слагаемое

$$\widetilde{V}_p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{|x_2 - ax_1|}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi$$

за счет предела интегрирования $|x_2 - ax_1|$ не будет из класса $C^k(\bar{Q})$ для $k \geq 2$ при любом предположении гладкости f . Поэтому гладкость V_p из класса $C^k(\bar{Q})$ можно достичь не только от требований соответствующей гладкости подынтегральной функции f , но и при соответствующем выборе функций $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$.

Для этого характеристикой $x_2 - ax_1 = 0$ область Q разбиваем на две подобласти $Q^{(1)} = \{\mathbf{x} \in Q | x_2 - ax_1 > 0\}$, $Q^{(2)} = \{\mathbf{x} \in Q | x_2 - ax_1 < 0\}$. Формулу (9) запишем в модифицированном виде через числа $b^{(m)}$ условия (7)

$$V_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_p^{(1)}(\mathbf{x}) = v_p^{(1)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\mathbf{x}) = v_p^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^k \frac{b^{(m)}(x_2 - ax_1)^m}{m!}, & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$v_p^{(j)}(\mathbf{x}) = v_p(\mathbf{x}) = f^{(1,j)}(x_2 - ax_1) + f^{(2)}(x_2 + ax_1) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{(-1)^j(ax_1 - x_2)}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

$\overline{Q^{(j)}}$ — замыкания соответствующих подобластей $Q^{(j)}$. Из формул (10) и (11) видно, что если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, то $v_p^{(j)}, V_p^{(j)} \in C^k(\bar{Q^{(j)}})$.

Если $V_p^{(j)} \in C^k(\bar{Q^{(j)}})$, то для того, чтобы функция V_p , определяемая формулой (9), принадлежала классу C^k на всем множестве $\bar{Q}$, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^m V_p^{(1)}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^m V_p^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

для $\mathbf{x} \in \gamma = \{\mathbf{x} | x_2 = ax_1\}$, $0 \leq m + i \leq k$, дополнительно к требованию $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$. Выполнение равенств (12) можно достичь за счет соответствующим образом выбора функций $f^{(1,j)}$, $j = 1, 2$, и $f^{(2)}$. Кроме этого эти функции должны быть такими, чтобы выполнялись условия (6) и (7).

Числа $b^{(m)}$, $m = 1, \dots, k$, выбираем такими, чтобы функция

$$v_p(\mathbf{x}) = v_p^{(j)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2,$$

удовлетворяла однородному интегральному условию

$$\int_0^{ax_1} v_p(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^{ax_1} v_p^{(2)}(x_1, x_2) dx_2 = 0.$$

В этом случае V_p удовлетворяет условию (7).

Далее согласно условиям (6) имеем равенства

$$\begin{aligned} v_p(0, x_2) &= v_p^{(1)}(0, x_2) = f^{(1,1)}(x_2) + f^{(2)}(x_2) = 0, \quad x_2 \in [0, \infty), \\ \partial_{x_1} v_p(0, x_2) &= \partial_{x_1} v_p^{(1)}(0, x_2) = -a f^{(1,1)}(x_2) + a f^{(2)}(x_2) - \\ &\quad - \frac{1}{2a} \int_0^{x_2} f\left(\frac{x_2 - \xi}{2a}, \frac{x_2 + \xi}{2}\right) d\xi = 0, \quad x_2 \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (13)$$

Решая систему (13), получим значения функций $f^{(1,1)}$, $f^{(2)}$, а именно:

$$\begin{aligned} f^{(1,1)}(z) &= -\frac{1}{4a^2} \int_0^z \left(\int_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta, \quad z \in [0, \infty), \\ f^{(2)}(z) &= \frac{1}{4a^2} \int_0^z \left(\int_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta, \quad z \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, из (11) и (14) функция $v_p^{(1)}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} v_p^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{x_2 - ax_1}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 + ax_1} \left(\int_0^\eta f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

Итак, вторая составляющая частного решения $V_p^{(2)}$ определяется формулой

$$V_p^{(2)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{ax_1 - x_2}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + f^{(1,2)}(x_2 - ax_1) + f^{(2)}(x_2 + ax_1) + \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} (x_2 - ax_1)^j = \\
& = -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{ax_1 - x_2}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi + \\
& + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 + ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta + f^{(1,2)}(x_2 - ax_1) + \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} (x_2 - ax_1)^j.
\end{aligned} \tag{16}$$

Если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$ и выполняются условия согласования на характеристике γ

$$\partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^m v_p^{(1)}(\mathbf{x}) = \partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^m V_p^{(2)}(\mathbf{x}), \quad 0 \leq m + i \leq k, \tag{17}$$

то $V_p(\mathbf{x}) = V_p^{(j)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \bar{Q}^{(j)}$, $j = 1, 2$, принадлежит множеству $C^k(\bar{Q})$. Выполнение условий (17) всегда можно достичь при соответствующем выборе постоянных $b^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, и $f^{(1,2)}(0) = 0$ в соотношении (16).

За счет соответствующего выбора функции $f^{(1,2)}$ потребуем выполнения для частного решения v_p однородного условия (3) (см. далее (18)).

Для определения функции $f^{(1,2)}$ используем однородное интегральное условие (3) и представление (16) без последнего слагаемого, т.е. $v_p^{(2)}(\mathbf{x}) = V_p^{(2)}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} (x_2 - ax_1)^j$.

Итак, за счет соответствующего выбора функции $f^{(1,2)}$ функция $v_p^{(2)}$ удовлетворяет однородному уравнению (3), т.е.

$$\int_0^{ax_1} v_p^{(2)}(x_1, x_2) dx_2 = 0, \quad x_1 \in ([0, \infty)), \tag{18}$$

где полагаем $f^{(1,2)}(0) = 0$.

Действительно, согласно (16) и (18)

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4a^2} \int_0^{ax_1} \left(\int_0^{x_2 + ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta \right) dx_2 + \\
& + \frac{1}{4a^2} \int_0^{ax_1} \left(\int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{ax_1 - x_2}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi \right) dx_2 = \\
& = \int_0^{ax_1} f^{(1,2)}(x_2 - ax_1) dx_2, \quad x_1 \in [0, \infty), \quad f^{(1,2)}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Чтобы определить значения функции $f^{(1,2)}$, продифференцируем равенство (19) по переменному x_1 . В результате получим соотношение

$$\begin{aligned}
a \int_0^{ax_1} df^{(1,2)}(x_2 - ax_1) dx_2 &= \frac{a}{4a^2} \int_0^{2ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta + \\
& + \frac{1}{4a} \int_0^{ax_1} \left(\int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{x_2 + ax_1 - \xi}{2a}, \frac{x_2 + ax_1 + \xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 + \\
& + \frac{1}{4a} \int_0^{ax_1} \left(\int_{ax_1 - x_2}^{ax_1 + x_2} f\left(\frac{\eta - x_2 + ax_1}{2a}, \frac{\eta + x_2 - ax_1}{2}\right) d\eta \right) dx_2 - \\
& - \frac{1}{4a} \int_0^{ax_1} \left(\int_0^{x_2 - ax_1} f\left(\frac{x_2 + ax_1 - \xi}{2a}, \frac{x_2 + ax_1 + \xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 +
\end{aligned} \tag{20}$$

$$+ \frac{1}{4a} \int_0^{ax_1} \left(\int_0^{x_2-ax_1} f \left(\frac{ax_1-x_2-\xi}{2a}, \frac{ax_1-x_2+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2.$$

Подынтегральная функция в левой части равенства (20) представляет собой фактически частную производную по x_2 , т.е.

$$df^{(1,2)}(x_2 - ax_1) = \partial_{x_2} f(x_2 - ax_1).$$

Поэтому, интегрируя в левой части (20), получим

$$\int_0^{ax_1} df^{(1,2)}(x_2 - ax_1) dx_2 = f^{(1,2)}(0) - f^{(1,2)}(-ax_1). \quad (21)$$

Делая замену независимых переменных $-ax_1 = z$, где $a > 0$, $x_1 \in [0, \infty)$, $z \in (-\infty, 0]$, получим

$$\begin{aligned} f^{(1,2)}(z) = & \frac{1}{4a^2} \left[\int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2+z} f \left(\frac{x_2-z-\xi}{2a}, \frac{x_2-z+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2 - \right. \\ & - \int_0^{-2z} \left(\int_0^{\eta} f \left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2} \right) d\xi \right) d\eta - \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2-z} f \left(\frac{x_2-z-\xi}{2a}, \frac{x_2-z+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2 - \\ & - \int_0^{-z} \left(\int_{-x_2-z}^{x_2-z} f \left(\frac{\eta-x_2-z}{2a}, \frac{\eta+x_2+z}{2} \right) d\eta \right) dx_2 - \\ & \left. - \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2+z} f \left(\frac{-x_2-z-\xi}{2a}, \frac{-x_2-z+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2 \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Определенная формулой (22) функция $f^{(1,2)}$, очевидно, удовлетворяет условию $f^{(1,2)}(0) = 0$ и $f^{(1,2)} \in C^{(k)}((-\infty, 0])$, если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$.

Таким образом, вторая составляющая частного решения $V_p^{(2)}$ уравнения (1) определяется формулой

$$\begin{aligned} V_p(\mathbf{x}) = V_p^{(2)}(\mathbf{x}) = v_p^{(2)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} (x_2 - ax_1)^j = \\ = \frac{1}{4a^2} \left[- \int_0^{x_2-ax_1} \left(\int_{ax_1-x_2}^{ax_1+x_2} f \left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2} \right) d\eta \right) d\xi + \int_0^{x_2+ax_1} \left(\int_0^{\eta} f \left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2} \right) d\xi \right) d\eta + \right. \\ + \int_0^{ax_1-x_2} \left(\int_0^{2x_2-ax_1} f \left(\frac{x_2-ax_1-\xi}{2a}, \frac{x_2-ax_1+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2 - \\ - \int_0^{2ax_1-2x_2} \left(\int_0^{\eta} f \left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2} \right) d\xi \right) d\eta - \int_0^{ax_1-x_2} \left(\int_0^{ax_1} f \left(\frac{ax_1-\xi}{2a}, \frac{ax_1+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2 - \\ - \int_0^{ax_1-x_2} \left(\int_{ax_1-2x_2}^{ax_1} f \left(\frac{\eta-2x_2+ax_1}{2a}, \frac{\eta+2x_2-ax_1}{2} \right) d\eta \right) dx_2 - \\ \left. - \int_0^{ax_1-x_2} \left(\int_0^{2x_2-ax_1} f \left(\frac{ax_1-2x_2-\xi}{2a}, \frac{ax_1-2x_2+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2 \right] + \\ + \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} (x_2 - ax_1)^j, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2)}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из формул (15) и (23) следует: если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, то $V_p^{(j)} \in C^k(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2$, где $V_p^{(1)}(\mathbf{x}) = v_p^{(1)}(\mathbf{x})$. При данном предположении гладкости f частное решение V_p будет из класса $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда еще будут выполняться условия непрерывности (17) на характеристике $\gamma = \{\mathbf{x}, x_2 = ax_1\}$. А для выполнения этого требования необходимо и достаточно равенство значений $F^{(1,j)}(z)$, $j = 1, 2$, и их производных до порядка k в точке $z = 0$, т. е.

$$d^m F^{(1,1)}(0) = d^m F^{(1,2)}(0), \quad m = 0, 1, \dots, k, \quad (24)$$

где $F^{(1,1)}(z)$ из (15) определена формулой

$$F^{(1,1)}(z) = \int_0^z \left(\int_0^z f\left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi - \int_0^z \left(\int_0^\eta f\left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta, \quad (25)$$

$F^{(1,2)}(z)$ — некоторыми слагаемыми из (23).

$$\begin{aligned} F^{(1,2)}(z) = & \int_0^z \left(\int_0^{-z} f\left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi + \\ & + \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2+z} f\left(\frac{z-\xi}{2a}, \frac{z+\xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 - \int_0^{-2z} \left(\int_0^\eta f\left(\frac{\eta-\xi}{2a}, \frac{\eta+\xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta - \\ & - \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2-z} f\left(\frac{x_2-z-\xi}{2a}, \frac{x_2-z+\xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 - \\ & - \int_0^{-z} \left(\int_{-x_2-z}^{x_2-z} f\left(\frac{\eta-x_2-z}{2a}, \frac{\eta+x_2+z}{2}\right) d\eta \right) dx_2 - \\ & - \int_0^{-z} \left(\int_0^{x_2+z} f\left(\frac{-x_2-z-\xi}{2a}, \frac{-x_2-z+\xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 + \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} z^j. \end{aligned} \quad (26)$$

Из соотношений (25) и (26) легко видеть, что равенство (24) для $m = 0$ выполняется. Для производных выполнение равенств (24) ($m = 1, \dots, k$) достигается за счет выбора для каждого порядка $m = 1, \dots, k$ соответствующего числа $b^{(m)}$ из (26).

Таким образом, функция

$$V_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} V_p^{(1)}(\mathbf{x}) = v_p^{(1)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases} \quad (27)$$

если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, будет из класса $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (24) при соответствующем выборе коэффициентов $b^{(m)}$, $m = 1, \dots, k$, где значение $v_p^{(1)}(\mathbf{x})$ функции $v^{(1)}$ определяется формулой (15), а $V_p^{(2)}(\mathbf{x})$ функции $V_p^{(2)}$ — формулой (23), является решением уравнения (1).

Результат исследований относительно частного решения уравнения (1) в случае задачи $M(k)$ сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$ уравнения (1), то функция V_p согласно формуле (27), формуле (15) для $v_p^{(1)}$, (23) — для $v_p^{(2)}$, принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (24), удовлетворяет однородным условиям Коши (2), является решением уравнения (1). Кроме этого функция $v_p^{(2)}$ удовлетворяет однородному интегральному условию (18), выполнение условий (24) всегда достигается за счет соответствующих в последнем слагаемом (23) коэффициентов $b^{(m)}$ из расчета один коэффициент $b^{(m)}$ для соответствующего одного уравнения для того же числа m .

4 Решение задачи $M(k)$

Классическое решение задачи $M(k)$ находим из представления общего решения (4) уравнения (1), где частное решение V_p этого уравнения построено выше в этом параграфе и согласно теореме 1 принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$, $k \geq 2$, если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, удовлетворяет однородным условиям Коши (2) и $v_p^{(2)}$ — однородному интегральному условию (18). За счет произвольно выбранных в (4) функций $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ из класса C^k из общего решения (4) выбираем то, которое удовлетворяет неоднородным заданным условиям Коши (2) и интегральному условию (3).

Представление (4) подставляем в условия Коши (2). В результате получим значения функций $g^{(j)}$, ($j = 1, 2$) для $z \in ([0, \infty))$ — внешних аргументов $z = x_2 - ax_1$, $z = x_2 + ax_1$, $a > 0$, $\mathbf{x} \in \bar{Q}^{(1)}$.

$$\begin{aligned} g^{(1)}(z) &= g^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(\xi) d\xi - C, \\ g^{(2)}(z) &= \frac{1}{2}\varphi(z) + \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(\xi) d\xi + C. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что для $z \in ([0, \infty))$ функция $g^{(2)}(x_2 + ax_1)$ определена соответствующей формулой из (28) для всех $x \in \bar{Q}$. Для этих же $z \in ([0, \infty))$ значения $g^{(1)}(x_2 - ax_1)$ определены только для $\mathbf{x} \in \bar{Q}^{(1)}$.

Для определения $g^{(1)}(x_2 - ax_1)$ для $\mathbf{x} \in \bar{Q}^{(2)}$ используем интегральное условие (3). Подставляя выражение (4) в уравнение (3), получим интегральное соотношение

$$\begin{aligned} &\int_0^{ax_1} [g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1)] dx_2 = \\ &= \mu(x_1) + \sum_{m=1}^k \frac{b^{(m)}(-ax_1)^{m+1}}{(m+1)!} = \tilde{\mu}(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (29)$$

относительно функции $g^{(1)}$. Здесь для функции $v_p^{(2)}$ использовано однородное условие (3). Согласно (28) уравнение (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} &\int_0^{ax_1} g^{(1,2)}(x_2 - ax_1) dx_2 = \tilde{\mu}(x_1) - \\ &- \int_0^{ax_1} \left[\frac{1}{2}\varphi(x_2 + ax_1) + \frac{1}{2a} \int_0^{x_2+ax_1} \psi(\xi) d\xi + C \right] dx_2, \quad x_1 \in ([0, \infty)), \mathbf{x} \in \bar{Q}^{(2)}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $g^{(1)}(x_2 - ax_1) = g^{(1,2)}(x_2 - ax_1)$ для $\mathbf{x} \in \bar{Q}^{(2)}$.

Пусть $\mu \in C^{k+1}([0, \infty))$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$, $k \geq 2$. В этом случае $g^{(1,2)}(z) \in C^k((-\infty, 0])$ или $G^{(1,2)}(\mathbf{x}) = g^{(1,2)}(x_2 - ax_1) \in C^k(\bar{Q}^{(2)})$. Это видно из уравнения (30).

Чтобы записать в аналитическом виде значения функции $g^{(1,2)}$, продифференцируем равенство (30) по x_1 . В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} &ag^{(1,2)}(0) - a \int_0^{ax_1} dg^{(1,2)}(x_2 - ax_1) dx_2 = d\tilde{\mu}(x_1) - \frac{a}{2}\varphi(2ax_1) - \\ &- \frac{a}{2} \int_0^{ax_1} d\varphi(x_2 + ax_1) dx_2 - \frac{1}{2} \int_0^{2ax_1} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{ax_1} \psi(x_2 + ax_1) dx_2 - aC, \quad x_1 \in ([0, \infty)). \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что $dg^{(1,2)}(x_2 - ax_1) = \partial_{x_2} g^{(1,2)}(x_2 - ax_1)$. Также $d\varphi(x_2 + ax_1) = \partial_{x_2} \varphi(x_2 + ax_1)$. В силу последнего замечания равенство (31) записывается в виде

$$ag^{(1,2)}(0) - ag^{(1,2)}(0) + ag^{(1,2)}(-ax_1) = d\mu(x_1) - \frac{a}{2}\varphi(2ax_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a}{2} \varphi(ax_1) - \frac{a}{2} \varphi(2ax_1) - \frac{1}{2} \int_0^{2ax_1} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{ax_1} \psi(x_2 + ax_1) dx_2 + \\
& + a \sum_{m=1}^k \frac{b^{(m)}(-ax_1)^m}{m!} - aC,
\end{aligned}$$

или, после замены независимой переменной $-ax_1 = z$,

$$\begin{aligned}
g^{(1,2)}(z) &= \frac{1}{a} d\mu\left(-\frac{z}{a}\right) - \varphi(-2z) + \frac{1}{2} \varphi(-z) - \int_0^{-2z} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{-z} \psi(\xi) d\xi - \\
& - \sum_{m=1}^k \frac{b^{(m)} z^m}{m!} - C, \quad z \in ((-\infty, 0]).
\end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, в аналитическом виде (32) определена и функция $g^{(1,2)}(x_2 - ax_1)$ для $\mathbf{x} \in \overline{Q^{(2)}}$. Согласно представлению (4) составляющие $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, решения u задачи $M(k)$ записываются в виде

$$u^{(j)}(\mathbf{x}) = g^{(1,j)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p^{(j)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(j)}}, j = 1, 2. \tag{33}$$

Все составляющие формул (33) в случае задачи $M(k)$ определены в явном виде. Собирая воедино можно выписать в виде формул $u^{(j)}(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2$) функций $u^{(j)}$.

Итак,

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} [\varphi(x_2 - ax_1) + \varphi(x_2 + ax_1)] + \frac{1}{2a} \int_{x_2 - ax_1}^{x_2 + ax_1} \psi(\xi) d\xi - \\
& - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{x_2 - ax_1}^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi - \\
& - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta + \\
& + \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 + ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta, \quad \mathbf{x} \in \overline{Q^{(1)}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{a} d\mu(x_1 - \frac{x_2}{a}) + \frac{1}{2} [\varphi(ax_1 - x_2) + \varphi(ax_1 + x_2)] - \\
& - \varphi(2ax_1 - 2x_2) - \int_0^{-2x_2 - 2ax_1} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{-x_2 - ax_1} \psi(\xi) d\xi + \\
& + \frac{1}{4a^2} \left[\int_0^{x_2 + ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta - \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\int_{ax_1 - x_2}^{ax_1 + x_2} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\eta \right) d\xi + \right. \\
& + \int_0^{ax_1 - x_2} \left(\int_0^{2x_2 - ax_1} f\left(\frac{x_2 - ax_1 - \xi}{2a}, \frac{x_2 - ax_1 + \xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 - \\
& - \int_0^{-2x_2 + 2ax_1} \left(\int_0^{\eta} f\left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}\right) d\xi \right) d\eta - \int_0^{ax_1 - x_2} \left(\int_0^{ax_1} f\left(\frac{ax_1 - \xi}{2a}, \frac{ax_1 + \xi}{2}\right) d\xi \right) dx_2 - \\
& \left. - \int_0^{ax_1 - x_2} \left(\int_{ax_1 - 2x_2}^{ax_1} f\left(\frac{\eta - 2x_2 + ax_1}{2a}, \frac{\eta + 2x_2 - ax_1}{2}\right) d\eta \right) dx_2 - \right.
\end{aligned} \tag{35}$$

$$- \int_0^{ax_1-x_2} \left(\int_0^{2x_2-ax_1} f \left(\frac{ax_1-2x_2-\xi}{2a}, \frac{ax_1-2x_2+\xi}{2} \right) d\xi \right) dx_2 \Big].$$

Из формул (34) и (35) видно: если $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$, $\mu \in C^{k+1}([0, \infty))$, то функции $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, определяемые этими формулами, принадлежат классам $C^k(\bar{Q}^{(j)})$ соответственно для $j = 1$ и $j = 2$. Отсюда следует: для того чтобы функция

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^{(1)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{Q}^{(1)}, \\ u^{(2)}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \bar{Q}^{(2)}, \end{cases} \quad (36)$$

принадлежала классу $C^k(\bar{Q})$ необходимо и достаточно выполнения на характеристике $\gamma = \{\mathbf{x} | x_2 = ax_1\}$ условий согласования

$$D^{(\alpha)}u^{(1)}(\mathbf{x}) = D^{(\alpha)}u^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq k, \quad (37)$$

где $D^{(\alpha)} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2}$.

Так как $V_p \in C^k(\bar{Q})$ и $g^{(2)}(x_2 - ax_1) \in C^k(\bar{Q})$, то условия (37) эквивалентны условиям

$$d^m g^{(1,1)}(0) = d^m g^{(1,2)}(0), \quad m = 0, 1, \dots, k. \quad (38)$$

Выпишем условия (38) через заданные функции задачи (1), (2), (3). Согласно (28)

$$g^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2}\varphi(z) - \frac{1}{2a} \int_0^z \psi(\xi) d\xi - C, \quad z \in ([0, \infty)). \quad (39)$$

Из (32)

$$\begin{aligned} g^{(1,2)}(z) &= \frac{1}{a} d\mu\left(-\frac{z}{a}\right) - \varphi(-2z) + \frac{1}{2}\varphi(-z) - \int_0^{-2z} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{-z} \psi(\xi) d\xi - \\ &- \sum_{j=1}^k \frac{b^{(j)}}{j!} z^j - C, \quad z \in ((-\infty, 0]). \end{aligned} \quad (40)$$

Вычисляя производные функций (39) и (40), получим соотношения

$$d^m g^{(1,1)}(z) = \frac{1}{2} d^m \varphi(z) - \frac{1}{2a} d^{m-1} \psi(z), \quad m = 1, \dots, k, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} d^m g^{(1,2)}(z) &= (-1)^m \frac{1}{a^{m+1}} d^{m+1} \mu\left(-\frac{z}{a}\right) - (-2)^m d^m \varphi(-2z) + \\ &+ (-1)^m \frac{1}{2} d^m \varphi(-z) - (-2)^m d^{m-1} \psi(-2z) - (-1)^m \frac{1}{2} d^{m-1} \psi(-z) - \\ &- \sum_{j=m}^k \frac{b^{(j)}}{(j-m)!} z^{j-m}, \quad m = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (42)$$

Подставляя значения соотношений (39)–(42) в равенства (38), получим новые равенства

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \frac{1}{a} d\mu(0) &= 0, \quad m = 0, \\ d^m \varphi(0) - 2^m d^m \varphi(0) - \left(\frac{1}{2a} - 2^m\right) d^{m-1} \psi(0) + \\ &+ \frac{1}{a^{m+1}} d^{m+1} \mu(0) + b^{(m)} &= 0, \quad m = 1, 3, \dots \leq k, \\ 2^m d^m \varphi(0) + 2^m d^{m-1} \psi(0) - \frac{1}{a^{m+1}} d^{m+1} \mu(0) + b^{(m)} &= 0, \quad m = 2, \dots, \leq k, \end{aligned} \quad (43)$$

где числа $b^{(m)}$ определены через значения функции f и ее производных (см. теорему 1). Полученные условия эквивалентны условиям (37), являются необходимыми и достаточными для того, чтобы решение u задачи $M(k)$, представленное формулами (34) и (35) было из класса $C^k(\bar{Q})$.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть заданные функции задачи $M(k)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости: $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$, $\mu \in C^{k+1}([0, \infty))$. Тогда функция u , определенная формулами (36), (34) и (35):

1) принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (43);

2) является на $\bar{Q}$ решением задачи (1)–(3);

3) является единственным из класса $C^k(\bar{Q})$ решением задачи (1)–(3).

Единственность классического решения из класса $C^k(\bar{Q})$ задачи $M(k)$ доказывается методом от противного. Тогда для разности u в силу линейности задачи $M(k)$ получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (2) и (3). В силу тех же формул (34) и (35) получаем нулевые решения для разности, т.е. единственность из класса $C^k(\bar{Q})$ классического решения задачи $M(k)$.

Литература

1. Корзюк, В. И., Наумовец, С. Н., Козловская, И. С. Классическое решение задачи для одномерного волнового уравнения с интегральными условиями второго рода // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 361–369.
2. Корзюк, В. И., Ерофеев, В. Т., Пулко Ю. В. Классическое решение начально-краевой задачи для волнового уравнения с интегральным по времени граничным условием // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 82. № 5 С. 36–41.
3. Пулькина, Л. С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки 2003. Т. 74, выпуск 3. С. 435–445.
4. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики. М.: Ленанд, 2021.

UDC 517.956.35

CLASSICAL SOLUTION OF AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A MIXED BOUNDARY CONDITION FOR A MILDLY QUASILINEAR WAVE EQUATION

V. I. Korzyuk¹, J. V. Rudzko²e-mails: ¹korzyuk@bsu.by, ²janycz@yahoo.com

We consider an initial-boundary value problem for a mildly quasilinear wave equation in the first quadrant in which we pose the Cauchy conditions on the spatial half-line and a mixed boundary condition on the time half-line. We use the method of characteristics to construct the solution in an implicit analytical form as a solution of some integro-differential equations. The solvability of these equations is studied, as well as the dependence on the initial data and the smoothness of their solutions. For the problem in question, the uniqueness of the solution is proved, and the conditions under which its classical solution exists are established.

Keywords: initial-boundary value problem; mildly quasilinear wave equation; classical solution; mixed boundary condition; matching conditions; method of characteristics.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35L71, Secondary 35A09.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ СЛАБО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Корзюк¹, Я. В. Рудько²e-mails: ¹korzyuk@bsu.by, ²janycz@yahoo.com

Рассматривается начальная задача в первом квадранте для слабо квазилинейного волнового уравнения, в которой на пространственной полупрямой задаются условия Коши, а на временной полупрямой — смешанное граничное условие. Методом характеристик строится решение в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Изучается разрешимость этих уравнений, а также зависимость от начальных данных и гладкость их решений. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при которых существует классическое решение.

Ключевые слова: начально-краевая задача; слабо квазилинейное волновое уравнение; классическое решение; смешанное граничное условие; условия согласования; метод характеристик.

1 Statement of the problem

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ of two independent variables $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}$ for the nonlinear equation of the form

$$\square_a u(t, x) = \mathcal{N}[u](t, x) := f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x)), \quad (1)$$

we consider a mixed problem with the Cauchy conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

and the Zaremba boundary condition

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \in [0, t_*], \quad (3)$$

$$\partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \in [t_*, \infty), \quad (4)$$

In the formulas (1) – (4) we have used the following notation: $\square_a = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ is the d'Alembert operator ($a > 0$ for definiteness), t_* is a positive real number, f is a function given on the set $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3$, φ and ψ are functions given on the half-line $[0, \infty)$, μ_1 is a function given on the segment $[0, t_*)$, and μ_2 is a function given on the half-line $[t_*, \infty)$.

2 Integro-differential equations

We divide the domain Q by the characteristic $x - at = 0$ into two subdomains

$$Q^{(j)} = \{(t, x) : (-1)^j(at - x) > 0\}, \quad j = 1, 2.$$

In the closure $\overline{Q^{(j)}}$ of each of the subdomains $Q^{(j)}$ we consider the integro-differential equation

$$u^{(j)}(t, x) = g^{(1,j)}(x - at) + g^{(2)}(x + at) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x-at} dy \int_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \mathcal{N}[u^{(j)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) dz, \\ (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

where $g^{(2)}$, $g^{(1,1)}$, and $g^{(1,2)}$ are some functions, the first two of them given on the nonnegative half-line and the last one, on the nonpositive half-line.

On the closure $\overline{Q}$ of the domain Q , we define a function u by the following formula

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

with the solution $u^{(j)}$ of Eq. (5) on the closure $\overline{Q^{(j)}}$ of the domain $Q^{(j)}$.

One can prove a theorem about the equivalence of the solution of the differential equation (1) and the integro-differential equation (5).

Theorem 2.1. *Let the condition $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ be satisfied. The function u belongs to the class $C^2(\overline{Q})$ and satisfies Eq. (1) if and only if for each $j = 1, 2$ it is a continuous differentiable solution of Eq. (5) in which the functions $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$, and $g^{(2)}$ are in the classes $C^2([0, \infty))$, $C^2((-\infty, 0])$, and $C^2([0, \infty))$, respectively, and the following matching conditions are satisfied:*

$$g^{(1,1)}(0) - g^{(1,2)}(0) = 0 \quad (7)$$

$$Dg^{(1,1)}(0) - Dg^{(1,2)}(0) = 0 \quad (8)$$

$$D^2g^{(1,1)}(0) - D^2g^{(1,2)}(0) + \frac{1}{a^2} \left(f(0, 0, g^{(2)}(0) + g^{(1,1)}(0), \right. \\ \left. a^2 Dg^{(2)}(0) - a^2 Dg^{(1,1)}(0), Dg^{(2)}(0) + Dg^{(1,1)}(0) \right) = 0, \quad (9)$$

where D is the ordinary derivative operator.

Proof. 1. Let the function $u \in C^2(\overline{Q})$ satisfy Eq. (1). Making the linear nondegenerate change of the independent variables $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ and denoting $u(t, x) = v(\xi, \eta)$, we obtain the new differential equation

$$\partial_\xi \partial_\eta v(\xi, \eta) = -\frac{1}{4a^2} \mathcal{N}[u] \left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2} \right).$$

Let us integrate it twice to obtain the equation

$$v(\xi, \eta) = g^{(1,j)}(\xi) + g^{(2)}(\eta) \\ - \frac{1}{4a^2} \int_0^\xi dy \int_{|\xi|}^\eta \mathcal{N}[u] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) dz, \quad \left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2} \right) \in \overline{Q^{(j)}}. \quad (10)$$

Equations (10) are Eqs. (5). This also implies that the functions $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$, and $g^{(2)}$ belong to the classes $C^2([0, \infty))$, $C^2((-\infty, 0])$, and $C^2([0, \infty))$, respectively. In addition, the continuity conditions of the function and its partial derivatives are to the second order inclusive satisfied up, i.e.,

$$\partial_t^k \partial_x^p u^{(1)}(t, x = at) = \partial_t^k \partial_x^p u^{(2)}(t, x = at), \quad 0 \leq k + p \leq 2. \quad (11)$$

Repeating the reasoning of the paper [1], we derive conditions (7) – (9) based on equalities (11) and representations (5).

2. Let us assume that the continuous differentiable function u is represented in the form (5) and (6), where $g^{(1,1)} \in C^2([0, \infty))$, $g^{(1,2)} \in C^2((-\infty, 0])$, and $g^{(2)} \in C^2([0, \infty))$, and the matching conditions (7) – (9) are satisfied. Due to the smoothness condition $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ and the fact that the functions

$g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$, and $g^{(2)}$ are twice continuously differentiable, similar to [2], we conclude that the function u belongs to the classes $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ and $C^2(\overline{Q^{(2)}})$. We substitute the representations (5) into Eq. (1) and verify that the function u satisfies this equation in $\overline{Q^{(1)}}$ and $\overline{Q^{(2)}}$. In this case, for the function u to belong to the class $C^2(\overline{Q})$, it is sufficient that the values of the functions $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, the values of their first derivatives, and the values of their second derivatives coincide with each other on the characteristic $x = at$, i.e., that the equalities (11) hold. The latter is equivalent to the validity of the conditions (7) – (9), as can be easily derived by following the argument in the reverse order to that in item 1 of the proof, based on the representations (5). However, these arguments present some difficulties, so we will outline them.

Let us consider the value of the difference between the quantities $u^{(1)}(t, x)$ and $u^{(2)}(t, x)$ on the characteristic $\gamma = \{(t, x) : x = at\}$

$$u^{(1)}(t, x) - u^{(2)}(t, x) = g^{(1,1)}(0) - g^{(1,2)}(0)$$

It implies the condition (7) for $k = p = 0$.

Let us calculate the first and second derivatives of the functions $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, on the characteristic $\gamma = \{(t, x) \mid x = at\}$. We have

$$\begin{aligned} \partial_t u^{(1)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) - \partial_t u^{(2)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) &= -a \left(\partial_x u^{(1)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) - \partial_x u^{(2)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) \right) \\ &= aDg^{(1,2)}(0) - aDg^{(1,1)}(0) - \frac{1}{4a} \int_0^x \left(\mathcal{N}[u^{(2)}]\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - \mathcal{N}[u^{(1)}]\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) dz, \end{aligned} \quad (12)$$

which generally does not mean that the condition (8) is true for $k + p = 1$. However, we can use the mean value theorem for a continuously differentiable function f :

$$\begin{aligned} \partial_t u^{(1)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) - \partial_t u^{(2)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) &= aDg^{(1,2)}(0) - aDg^{(1,1)}(0) - \frac{1}{4a} \\ &\times \int_0^x \left\langle \alpha(z) \mid \left(0, 0, (u^{(2)} - u^{(1)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right), \partial_t(u^{(2)} - u^{(1)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right), \right. \right. \\ &\left. \left. \partial_x(u^{(2)} - u^{(1)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) \right\rangle dz, \quad x \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \int_0^1 \nabla f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (cu^{(2)} + (1-c)u^{(1)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right), \right. \\ &\left. \partial_t(cu^{(2)} + (1-c)u^{(1)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right), \partial_x(cu^{(2)} + (1-c)u^{(1)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) dc, \end{aligned}$$

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ is the scalar product, and the integral of a vector is understood componentwise.

After some transformations of the expression (13), taking into account the fulfillment of the condition (11) for $k + p = 0$, we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t u^{(1)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) - \partial_t u^{(2)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) &= aDg^{(1,2)}(0) - aDg^{(1,1)}(0) \\ &- \frac{1}{4a} \int_0^x (\partial_t u^{(1)} - \partial_t u^{(2)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) (\alpha_5(z) - a\alpha_4(z)) dz, \quad x \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (14)$$

where α_i is the i^{th} component of the vector α . We can think of the equality (14) as a linear integral equation for the function

$$U_t : [0, \infty) \ni z \mapsto U_t(z) = (\partial_t u^{(1)} - \partial_t u^{(2)})\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right),$$

i.e.,

$$U_t(x) = aDg^{(1,2)}(0) - aDg^{(1,1)}(0) - \frac{1}{4a} \int_0^x U_t(z) (\alpha_5(z) - a\alpha_4(z)) dz, \quad x \in [0, \infty). \quad (15)$$

If the equality (8) holds, then the function $U_t \equiv 0$ satisfies Eq. (15), and due to the theorem of existence and uniqueness of the solution of a linear Volterra integral equation of the second kind, it is unique in the class of continuous functions. Due to the representation (12), this fact implies the fulfillment of the condition (11) for $p + k = 1$ if the condition (8) is satisfied.

Let us calculate the second derivatives of the functions $u^{(j)}$, $j = 1, 2$, on the characteristic $\gamma = \{(t, x) : x = at\}$. Taking into account the fulfillment of the comparability conditions (11) for $k + p \leq 1$, we have

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u^{(1)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) - \partial_t^2 u^{(2)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) &= a^2 \left(\partial_x^2 u^{(1)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) - \partial_x^2 u^{(2)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) \right) \\ &= -a \left(\partial_t \partial_x u^{(1)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) - \partial_t \partial_x u^{(2)}\left(\frac{x}{2a}, \frac{x}{2}\right) \right) = a^2 (D^2 g^{(1,1)}(0) - D^2 g^{(2)}(0)) \\ &\quad + f(0, 0, g^{(2)}(0) + g^{(1,1)}(0), a^2 Dg^{(2)}(0) - a^2 Dg^{(1,1)}(0), Dg^{(2)}(0) + Dg^{(1,1)}(0)) \\ &\quad + \frac{1}{4a^2} \int_0^x \left(\partial_t^2 u^{(1)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - \partial_t^2 u^{(2)}\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) \left(a\mathcal{P}_4[u^{(1)}]\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - \mathcal{P}_5[u^{(2)}]\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) dz, \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\mathcal{P}_4[u^{(1)}](t, x) = \partial_{z_4} f(t, x, u^{(1)}(t, x), z_4 = \partial_t u^{(1)}(t, x), \partial_x u^{(1)}(t, x)),$$

and

$$\mathcal{P}_5[u^{(1)}](t, x) = \partial_{z_5} f(t, x, u^{(1)}(t, x), \partial_t u^{(1)}(t, x), z_5 = \partial_x u^{(1)}(t, x)).$$

We can also consider the representation (16) as an integral equation with respect to the function $U_{tt} : [0, \infty) \ni z \mapsto U_{tt}(z) = (\partial_t^2 u^{(1)} - \partial_t^2 u^{(2)})(z/(2a), z/2)$:

$$\begin{aligned} U_{tt}(x) &= f(0, 0, g^{(2)}(0) + g^{(1,1)}(0), a^2 Dg^{(2)}(0) - a^2 Dg^{(1,1)}(0), Dg^{(2)}(0) + Dg^{(1,1)}(0)) \\ &\quad + \int_0^x U_{tt}(z) \left(a\mathcal{P}_4[u^{(1)}]\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - \mathcal{P}_5[u^{(2)}]\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) \right) dz, \quad x \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (17)$$

By the theorem of existence and uniqueness of a solution of a linear Volterra integral equation of the second kind, if the equality (9) is satisfied, then the function $U_{tt} \equiv 0$ is the unique solution of Eq. (17). From the equality $U_{tt} \equiv 0$ and the formulas (16) it follows that the conditions (11) for $k + p = 2$ are fulfilled. The proof of the theorem is complete.

Equations (5) contain the functions $g^{(1,1)}$, $g^{(2)}$ and $g^{(1,2)}$, which must be determined before we proceed to the study of the solvability of these equations. These functions should be chosen such that the initial (2) and boundary conditions (3), (4) are satisfied.

Similar to article [1], the functions $g^{(1,1)}$ and $g^{(2)}$ are determined from the Cauchy conditions (2)

$$g^{(1,1)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz - C - \frac{1}{4a^2} \int_0^x dz \int_0^z \mathcal{N}[u^{(1)}]\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dy, \quad x \geq 0, \quad (18)$$

$$g^{(2)}(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz + C + \frac{1}{4a^2} \int_0^x dz \int_0^z \mathcal{N}[u^{(1)}]\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dy, \quad x \geq 0, \quad (19)$$

where C is an arbitrary real constant. Also, according to [1], we determine the function $g^{(1,2)}$ on the segment $[-at_*, 0]$ from the boundary condition (3)

$$\begin{aligned} g^{(1,2)}(x) &= \mu_1\left(-\frac{x}{a}\right) - \frac{\varphi(-x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{-x} \psi(z) dz - C - \frac{1}{4a^2} \int_0^{-x} dz \int_0^z \mathcal{N}[u^{(1)}]\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dy, \\ &\quad - at_* \leq x \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

The function $g^{(1,2)}$ on the half-line $(-\infty, -at_*)$ can be defined similarly to [4]. According to the boundary condition (1.4), the function $g^{(1,2)}$ on the interval $(-\infty, -at_*)$ satisfies the following differential equation

$$Dg^{(1,2)}(z) + Dg^{(2)}(-z) - \frac{1}{2a^2} \int_0^z \mathcal{N}[u^{(2)}]\left(\frac{-y-z}{2a}, \frac{y-z}{2}\right) dy = \mu_2\left(-\frac{z}{a}\right), \quad z < -at_* \quad (21)$$

According to Theorem 2.1, the function $g^{(1,2)}$ must be continuous, so we have the conjugation condition

$$g^{(1,2)}(-at_* - 0) = g^{(1,2)}(-at_* + 0). \quad (22)$$

We consider Eq. (21) for $g^{(1,2)}$ together with the condition (22) as the Cauchy problem for a first-order differential equation. The solution of this problem is determined by the formula

$$\begin{aligned} g^{(1,2)}(z) = & g^{(1,2)}(-at_*) + g^{(2)}(-z) - g^{(2)}(at_*) + \int_{-at_*}^z \left(\mu_2\left(-\frac{s}{a}\right) \right. \\ & + \frac{1}{2a^2} \int_0^s \mathcal{N}[u^{(2)}] \left(\frac{-y-s}{2a}, \frac{y-s}{2} \right) ds = \mu_1(t_*) + \frac{\varphi(-x)}{2} - \varphi(at_*) \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^{-x} \psi(z) dz - \frac{1}{a} \int_0^{at_*} \psi(z) dz - C + \frac{1}{4a^2} \int_0^{-x} dz \int_0^z \mathcal{N}[u^{(1)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2} \right) dy \\ & - \frac{1}{2a^2} \int_0^{at_*} dz \int_0^z \mathcal{N}[u^{(1)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2} \right) dy + \int_{-at_*}^x \mu_2\left(-\frac{s}{a}\right) ds \\ & \left. + \frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^x dz \int_0^z \mathcal{N}[u^{(1)}] \left(\frac{-z-y}{2a}, \frac{y-z}{2} \right) dy, \quad z \leq -at_*. \quad (23) \right. \end{aligned}$$

Substituting the formulas (18) – (20), and (23) into the original integro-differential equations (5), we get the following representations:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x) = & \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{4a^2} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_{x-at}^z \mathcal{N}[u^{(1)}] \left(\frac{x-y}{2a}, \frac{x+y}{2} \right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t, x) = & \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - u^{(1)}\left(\frac{at-x}{2a}, \frac{at-x}{2}\right) + u^{(1)}\left(\frac{x+at}{2a}, \frac{x+at}{2}\right) \\ & - \frac{1}{4a^2} \int_{at-x}^{x+at} dz \int_0^{x-at} \mathcal{N}[u^{(2)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2} \right) dy, \quad (t, x) \in \Omega_1, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(t, x) = & u^{(2)}\left(\frac{x+at-at_*}{2a}, \frac{x+at-at_*}{2}\right) - a \int_{t_*}^{t-x/a} \mu_2(z) dz \\ & + u^{(2)}\left(\frac{at-x-at_*}{2a}, \frac{at-x-at_*}{2}\right) - \mu_1(t_*) \\ & - \frac{1}{4a^2} \int_{-at_*}^{x-at} dy \int_{at-x}^{x+at} \mathcal{N}[u^{(2)}] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2} \right) dz \\ & - \frac{1}{2a} \int_{t_*}^{t-x/a} dz \int_{-at_*}^{-az} \mathcal{N}[u^{(2)}] \left(\frac{az-y}{2a}, \frac{y+az}{2} \right) dy, \quad (t, x) \in \Omega_2, \quad (26) \end{aligned}$$

where $\Omega_1 = \overline{Q^{(2)}} \cap \{(t, x) : x - at \geq -at_*\}$ and $\Omega_2 = \overline{Q^{(2)}} \cap \{(t, x) : x - at \leq -at_*\}$.

Note that the representation (24) for the function $u^{(1)}$ can be derived from Green's theorem, and the formulas (25) and (26) for the function $u^{(2)}$ can be obtained using the characteristic parallelogram identity [3], similar to what was done in [5–7].

Now, assuming that the nonlinearity f satisfies the Lipschitz condition

$$|f(t, x, u, u_t, u_x) - f(t, x, z, z_t, z_x)| \leq L(t, x)(|u - z| + |u_t - z_t| + |u_x - z_x|) \quad (27)$$

with a continuous function $L: \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$, we solve Eqs. (24) – (26) by the method of successive approximations, i.e., Picard iterations.

For the sake of clarity, let us consider Eq. (24). Let us rewrite it in operator form as

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x) = K[u^{(1)}](t, x) &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi, u^{(1)}(\tau, \xi), \partial_t u^{(1)}(\tau, \xi), \partial_x u^{(1)}(\tau, \xi)) d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \end{aligned} \quad (28)$$

It is natural to solve Eq. (28) in the Fréchet space $C^1(\overline{Q^{(1)}})$, whose topology can be induced by a countable family of seminorms

$$\|\cdot\|_{C^1(\Omega_m)} = \max \left\{ \|\cdot\|_{C(\Omega_m)}, \|\partial_t \cdot\|_{C(\Omega_m)}, \|\partial_x \cdot\|_{C(\Omega_m)} \right\},$$

where $\Omega_m = \{(t, x) : (t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \wedge x + at \leq m\}$. Note that the sequence $(w_i)_{i=0}^\infty$ converges to the converges in the space $C^1(\overline{Q^{(1)}})$ (with respect to its metric) if and only if it converges with respect to each of the seminorms $\|\cdot\|_{C^1(\Omega_m)}$, $m \in \mathbb{N}$.

It is also necessary that the operator K acts from the space $C^1(\overline{Q^{(1)}})$ into $C^1(\overline{Q^{(1)}})$. It can be achieved by requiring $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$ and $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$.

Take the initial approximation $u^{(1,0)} \equiv 0$. Then every subsequent approximation is calculated by the formula

$$u^{(1,n)}(t, x) = K[u^{(1,n-1)}](t, x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \quad (29)$$

Let $\alpha = \max \{1, a^{-1/2}, a^{-1}\}$,

$$\mathfrak{L}_m = \max \left\{ \|L\|_{C(\Omega_m)}, \left\| \Omega_m \ni (t, x) \mapsto \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} L^2(\tau, \xi) d\xi} \in \mathbb{R} \right\|_{C(\Omega_m)} \right\}.$$

Then,

$$\begin{aligned} &\max \{ |u^{(1,1)}(t, x) - u^{(1,0)}(t, x)|, |\partial_t u^{(1,1)}(t, x) - \partial_t u^{(1,0)}(t, x)|, |\partial_x u^{(1,1)}(t, x) - \partial_x u^{(1,0)}(t, x)| \} \\ &\leq \mathcal{M} := \|u^{(1,1)} - u^{(1,0)}\|_{C^1(\Omega_m)}, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ &|u^{(1,2)}(t, x) - u^{(1,1)}(t, x)| \leq \frac{1}{2a} \left| \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \mathcal{N}[u^{(1,1)}](\tau, \xi) d\xi - \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \mathcal{N}[u^{(1,0)}](\tau, \xi) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} (L(\tau, \xi)(|u^{(1,1)} - u^{(1,0)}|(\tau, \xi) + |\partial_t u^{(1,1)} - \partial_t u^{(1,0)}|(\tau, \xi) + \\ &\quad + |\partial_x u^{(1,1)} - \partial_x u^{(1,0)}|(\tau, \xi))) d\xi \leq \frac{1}{2a} \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} L^2(\tau, \xi) d\xi} \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \mathcal{M}^2 d\xi} \\ &\leq \frac{\mathfrak{L}_m \mathcal{M} t}{2\sqrt{a}} \leq \mathfrak{L}_m \mathcal{M} \alpha t, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ &|\partial_t u^{(1,2)}(t, x) - \partial_t u^{(1,1)}(t, x)| \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^t (\mathcal{N}[u^{(1,1)}](\tau, x - a(t - \tau)) + \mathcal{N}[u^{(1,1)}](\tau, x + a(t - \tau))) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (\mathcal{N}[u^{(1,0)}](\tau, x - a(t - \tau)) + \mathcal{N}[u^{(1,0)}](\tau, x + a(t - \tau))) d\tau \right| \leq \int_0^t \mathfrak{L}_m \mathcal{M} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathfrak{L}_m \mathcal{M} t \leq \mathfrak{L}_m \mathcal{M} t \alpha, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N}, \\
&|\partial_x u^{(1,2)}(t, x) - \partial_x u^{(1,1)}(t, x)| \leq \frac{\mathfrak{L}_m \mathcal{M} t}{a} \leq \mathfrak{L}_m \mathcal{M} t \alpha, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N}, \\
&\max\{|u^{(1,2)}(t, x) - u^{(1,1)}(t, x)|, |\partial_t u^{(1,2)}(t, x) - \partial_t u^{(1,1)}(t, x)|, |\partial_x u^{(1,2)}(t, x) - \partial_x u^{(1,1)}(t, x)|\} \\
&\leq \mathfrak{L}_m \mathcal{M} t \alpha, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

In what follows, by induction in which the last inequality is chosen as the base case, one can readily prove the estimate

$$\begin{aligned}
&\max\{|u^{(1,j+1)}(t, x) - u^{(1,j)}(t, x)|, |\partial_t u^{(1,j+1)}(t, x) - \partial_t u^{(1,j)}(t, x)|, \\
&\quad |\partial_x u^{(1,j+1)}(t, x) - \partial_x u^{(1,j)}(t, x)|\} \leq \frac{\mathfrak{L}_m^j \mathcal{M} t^j \alpha^j}{j!}, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}
\|u^{(1,j+k)}(t, x) - u^{(1,j)}(t, x)\|_{C^1(\Omega_m)} &\leq \sum_{i=j}^{j+k-1} \|u^{(1,i+1)}(t, x) - u^{(1,i)}(t, x)\|_{C^1(\Omega_m)} = \sum_{i=j}^{j+k-1} \frac{\mathfrak{L}_m^i \mathcal{M} T_m^i \alpha^i}{i!} \\
&\leq \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\mathfrak{L}_m^i \mathcal{M} T_m^i \alpha^i}{i!} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \quad (30)
\end{aligned}$$

where $T_m = \max_{(t,x) \in \Omega_m} |t| = a^{-1}m$. The inequality (30) means that the sequence $(u^{(1,i)})_{i=0}^{\infty}$ is Cauchy in the Banach space $C^1(\Omega_m)$. Thus, the successive approximations by the continuously differentiable functions $u^{(1,k)}$, $k = 0, 1, \dots$, converge to a continuously differentiable function $u^{(1)}: \Omega_m \mapsto \mathbb{R}$ with respect to the seminorm $\|\cdot\|_{C^1(\Omega_m)}$, and, by virtue of $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$ to a unique function $u^{(1)}: \overline{Q^{(1)}} \mapsto \mathbb{R}$ in the space $C^1(\overline{Q^{(1)}})$. Passing to the limit as $n \rightarrow \infty$ in (29), we conclude that the function is a solution of Eq. (28).

Let us prove the uniqueness of the solution of Eq. (28) by contradiction. Let Eq. (28) has two solutions u_1 and u_2 . Denote $U = u_1 - u_2$. Then

$$U(t, x) = K[u_1](t, x) - K[u_2](t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \quad (31)$$

The function U is continuously differentiable, and hence $\|U\|_{C^1(\Omega_m)} = \mathcal{M}_{U;m}$. It follows from (31) with allowance for the Lipschitz condition and the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality that

$$\max\{|U(t, x)|, |\partial_t U(t, x)|, |\partial_x U(t, x)|\} \leq \mathfrak{L}_m \mathcal{M}_{U;m} t \alpha, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

By induction, we arrive at the estimate

$$\max\{|U(t, x)|, |\partial_t U(t, x)|, |\partial_x U(t, x)|\} \leq \frac{\mathfrak{L}_m^j \mathcal{M}_{U;m} t^j \alpha^j}{j!}, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

It follows that $U \equiv 0$ on the set Ω_m and, by virtue of $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, that $U \equiv 0$ on the set $\overline{Q^{(1)}}$.

Thus, we have proved the existence of a unique continuously differentiable solution of Eq. (24). The existence of a unique continuous solution of Eqs. (25) and (26) under the smoothness conditions $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, t_*])$, $\mu_2 \in C([t_*, \infty))$ and the Lipschitz condition (27) with a continuous function L can be proved similarly. We state the result as the following assertion.

Theorem 2.2. *Let the conditions $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, t_*])$, $\mu_2 \in C([t_*, \infty))$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition (27) with a continuous function $L: \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. Then, continuously differentiable solutions of Eqs. (24) – (26) exist and are unique.*

Thus, under the smoothness conditions $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, t_*])$, $\mu_2 \in C([t_*, \infty))$ and the Lipschitz condition (27), we have constructed a piecewise smooth solution u of the problem (1) – (4) determined by the formulas (6) and (24) – (26).

Now we can derive compatibility conditions under which the solution u to the problem (1) – (4) is classical. Calculating the quantities appearing in the expressions (7) – (9), we obtain the following compatibility conditions

$$\mu_1(0) = \varphi(0) \quad (32)$$

$$\mu'_1(0) = \psi(0) \quad (33)$$

$$\mu''_1(0) = f(0, 0, \varphi(0), \psi(0), \varphi'(0)) + a^2 \varphi''(0). \quad (34)$$

According to Theorem 2.1 for the function u to belong to the class $C^2(\overline{Q})$, it is also necessary that the function $g^{(1,2)}$ belongs to the class $C^2((-\infty, 0])$. By construction we have $g^{(1,2)} \in C^2((-at_*, 0])$ and $g^{(1,2)} \in C^2((-\infty, -at_*))$. So, we have to require the fulfillment of the following equality

$$D^p g^{(1,2)}(-at_* - 0) = D^p g^{(1,2)}(-at_* + 0), \quad p \in \{0, 1, 2\}. \quad (35)$$

Substituting the representations (20) and (23) into (35), we obtain two conditions equivalent to (35):

$$a\mu_2(t_*) - \psi(at_*) = a\partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0) - \partial_t u^{(1)}(0, at_*) \quad (6)$$

$$\mu'_2(t_*) - \psi'(at_*) = \partial_t \partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0) - \partial_t \partial_x u^{(1)}(0, at_*) \quad (7)$$

which, due to the Cauchy conditions (2), can be simplified to

$$\mu_2(t_*) = \partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0), \quad \mu'_2(t_*) = \partial_t \partial_x u^{(2)}(t_* - 0, 0). \quad (36)$$

In order for the problem to be well posed, in addition to the existence and uniqueness of the solution, it is necessary to prove the continuous dependence of the solution on the initial data. To prove the continuous dependence of the solution on the initial data, we first consider the perturbed equation

$$(u^{(1)} + \Delta u)(t, x) = (G + \Delta G)(t, x) + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi, \quad (u^{(1)} + \Delta u)(\tau, \xi), \partial_t(u^{(1)} + \Delta u)(\tau, \xi), \partial_x(u^{(1)} + \Delta u)(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \quad (37)$$

along with Eq. (24), where

$$G(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

and

$$\Delta G(t, x) = \frac{\Delta \varphi(x - at) + \Delta \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Delta \psi(\xi) d\xi$$

Let us also consider the difference of the perturbed (37) and unperturbed (24) equations

$$\Delta u(t, x) = \Delta G(t, x) + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} [f(\tau, \xi, (u^{(1)} + \Delta u)(\tau, \xi), \partial_t(u^{(1)} + \Delta u)(\tau, \xi), \partial_x(u^{(1)} + \Delta u)(\tau, \xi)) - f(\tau, \xi, u^{(1)}(\tau, \xi), \partial_t u^{(1)}(\tau, \xi), \partial_x u^{(1)}(\tau, \xi))] d\xi, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \quad (38)$$

Let us introduce for a fixed $m \in \mathbb{N}$ a vector function

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(m)} : \left[0, \frac{m}{2a}\right] &\ni t \mapsto \mathbf{v}^{(m)}(t) \\ &= (x \mapsto (R_m[\Delta u](t, x), R_m[\partial_t \Delta u](t, x), R_m[\partial_x \Delta u](t, x))) \\ &\in PC\left(\left[0, \frac{m}{2a}\right]\right) \times PC\left(\left[0, \frac{m}{2a}\right]\right) \times PC\left(\left[0, \frac{m}{2a}\right]\right) \end{aligned}$$

where $R_m[h]$ is the extension by zero of the restriction $h|_{\Omega_m}$ of the function h .

Then, we can write the following inequalities

$$\|\mathbf{v}_1^{(m)}(t)\| \leq G_0^{(m)} + \frac{1}{2a} \int_0^t L^{(m)} \max_{0 \leq \xi \leq \tau} \|\mathbf{v}^{(m)}(\xi)\| d\tau, \quad (39)$$

$$\|\mathbf{v}_2^{(m)}(t)\| \leq G_1^{(m)} + \int_0^t L^{(m)} \max_{0 \leq \xi \leq \tau} \|\mathbf{v}^{(m)}(\xi)\| d\tau, \quad (40)$$

$$\|\mathbf{v}_2^{(m)}(t)\| \leq G_2^{(m)} + \frac{1}{a} \int_0^t L^{(m)} \max_{0 \leq \xi \leq \tau} \|\mathbf{v}^{(m)}(\xi)\| d\tau, \quad (41)$$

where

$$G_0^{(m)} = \|\Delta G\|_{C(\Omega_m)}, \quad G_1^{(m)} = \|\partial_t \Delta G\|_{C(\Omega_m)}, \quad G_2^{(m)} = \|\partial_x \Delta G\|_{C(\Omega_m)},$$

$$\|\mathbf{v}^{(m)}(t)\| = \max_{i \in \{1,2,3\}} \|\mathbf{v}_i^{(m)}(t)\|, \quad L^{(m)} = \|L\|_{C(\Pi_m)}, \quad \Pi_m = \left[0, \frac{m}{2a}\right] \times [0, m].$$

The estimates (39) – (41) imply an inequality

$$\|\mathbf{v}^{(m)}(t)\| \leq \|\Delta G\|_{C^1(\Omega_m)} + \int_0^t \alpha L^{(m)} \max_{0 \leq \xi \leq \tau} \|\mathbf{v}^{(m)}(\xi)\| d\tau,$$

Applying [8, p. 39, Lemma 1] to the previous inequality, we obtain

$$\|\mathbf{v}^{(m)}(t)\| \leq \|\Delta G\|_{C^1(\Omega_m)} \exp\left(\alpha L^{(m)} t\right)$$

So, we have the following estimate of the disturbance modulus:

$$\|\Delta u\|_{C^1(\Omega_m)} \leq \|\Delta G\|_{C^1(\Omega_m)} \exp\left(\frac{\alpha m L^{(m)}}{2a}\right)$$

The resulting inequality implies that whatever a small perturbation ΔG ,

$$\|\Delta G\|_{C^1(\Omega_m)} \leq \beta \|\Delta \varphi\|_{C^1([0,m])} + m \|\Delta \psi\|_{C([0,m])}$$

where $\beta = \max\{1, a\}$, is taken, the perturbation of the solution obeys the inequality

$$\|\Delta u\|_{C^1(\Omega_m)} \leq (\beta \|\Delta \varphi\|_{C^1([0,m])} + m \|\Delta \psi\|_{C([0,m])}) \exp\left(\frac{\alpha m L^{(m)}}{2a}\right),$$

Due to $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, we conclude that the solution of Eq. (24) depends continuously on the initial data. The continuous dependence of the solution of Eqs. (25) and (26) on the initial data, can be proved in a similar way.

3 Classical solution

Thus, the results of the previous section finally lead to the following theorem.

Theorem 3.1. *Let the conditions $f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^2([0, t_*])$, $\mu_2 \in C^1([t_*, \infty))$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition (27) with a continuous function $L : \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. The mixed problem (1)–(4) has a unique solution u in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions (32)–(34) and (36) are satisfied. This solution is determined by the formulas (6) and (24)–(26).*

4 Conclusions

In the present paper, we obtain necessary and sufficient conditions under which there exists a unique classical solution of an initial-boundary value problem in a quarter-plane for a mildly quasilinear wave equation. The dependence of the smoothness of the solution on the smoothness of the initial functions is established.

Acknowledgments

This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of implementing the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement No. 075-15-2022-284), the National Academy of Sciences of Belarus (agreement No. 2024-25-141), and Ministry of Education of the Republic of Belarus & the National Academy of Sciences of Belarus in the framework of implementing the state scientific research program “Convergence–2025” (state reg. No. 20212281).

References

1. Korzyuk, V.I., Rudzko, J.V. *Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential* // Differ. Equ. 2022. V. 58, № 2, P. 175–186.
2. Korzyuk, V.I., Stolyarchuk, I.I. *Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients* // Differ. Equ. 2017. V. 53, № 1, P. 74–85.
3. Korzyuk, V.I., Rudzko, J.V. *Curvilinear Parallelogram Identity and Mean-Value Property for a Semilinear Hyperbolic Equation of the Second Order* // Eurasian Math. J. 2024. V. 15, № 2, P. 61–74.
4. Korzyuk, V.I., Rudzko, J.V. *Classical Solution of the Second Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential* // Differ. Equ. 2023. V. 59, № 9, P. 1216–1234.
5. Jokhadze, O.M. *Mixed Problem with a Nonlinear Boundary Condition for a Semilinear Wave Equation* // Differ. Equ. 2022. V. 58, № 5, P. 593–609.
6. Kharibegashvili, S.S., Jokhadze, O.M. *Solvability of a Mixed Problem with Nonlinear Boundary Condition for a One-Dimensional Semilinear Wave Equation* // Math. Notes. 2020. V. 108, P. 123–136.
7. Korzyuk, V.I., Rudzko, J.V. *Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant* // Differ. Equ. 2023. V. 59, № 8, P. 1075–1089.
8. Roždestvenskiĭ, B.L., Janenko, N.N., *Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics*, Providence: Am. Math. Soc., 1983.

УДК 336.76

ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ В АНАЛИЗЕ КОТИРОВОК МЕЖДУНАРОДНЫХ ИНДЕКСОВ

У. А. Кришень

e-mail: ukrishen@mail.ru

В последние десятилетия наблюдается рост финансового рынка, связанный с увеличением количества сделок по различным финансовым активам. Это привело к тому, что разумные инвесторы и трейдеры, желающие остаться на “рынке”, пришли к необходимости проводить исследования ближайших тенденций и направлений в изменениях цен на финансовые активы. В связи с тем, что корзины финансовых активов могут варьироваться по своей структуре, в анализе помогают агрегированные показатели — биржевые индексы, улавливающие малейшие колебания финансового рынка. Однако построение факторных моделей для биржевых индексов потребует большого подбора факторов и нахождения статистических данных, сопоставимых по своей длине временному ряду индекса. В связи целью данной статьи является проведение исследования применения дробно-дифференциальных моделей в анализе котировок международных индексов, которые позволяют исследовать некоторую длинную память ряда.

Ключевые слова: финансовый рынок; инвестиции; дробно-дифференциальное моделирование; ARFIMA; ARCH/GARCH.

APPLICATION OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL MODELS IN THE ANALYSIS OF QUOTATIONS OF INTERNATIONAL INDICES

U. A. Krishen

e-mail: ukrishen@mail.ru

In the recent decades we have seen the growth of the financial market generated by the growth of the financial market, accompanied by an increase of the number of transactions involving various financial assets. Thus, the prudent investors and traders who wish to remain in the “market” recognized the necessity of conducting research into the nearest trends and directions in price changes of financial assets. Given that baskets of financial assets can vary in their structure, aggregated indicators—such as stock indices that capture even the slightest fluctuations in the financial market—are helpful in the analysis. This article explores the application of fractional-differential models in the analysis of international index quotations.

Keywords: financial market; investments; fractional-differential modeling; ARFIMA; ARCH/GARCH.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91G15, Secondary 62M10.

1 Введение

Экономика XXI века представляет собой сложную и многогранную систему, характеризующуюся динамичными изменениями, вызванными технологическими, социальными и иными факторами.

Изменения затронули все рынки, механизмы координации взаимоотношений между различными экономическими субъектами (домохозяйствами, предприятиями, государством): рынок товаров и услуг, рынок труда, рынок недвижимости, финансовый рынок и др.

Одними из интересных и получающих более широкое распространение направлений исследования финансового рынка является анализ финансов, финансовых активов и инвестирования. Это обусловлено растущим спросом экономистов и инвесторов (частных, институциональных, государственных), в своей совокупности составляющих международное экономическое сообщество, ищущее способы не только сохранить, но и приумножить имеющиеся денежные средства.

2 Теоретические аспекты финансового рынка

В контексте растущего интереса к финансовым активам и инвестированию, важно рассмотреть теоретические основы, которые лежат в основе функционирования финансового рынка.

Финансовый рынок тесно связан с термином «финансы». Зачастую, данное понятие отождествляется с понятием «деньги». Не стоит отождествлять понятия «денежные средства» («деньги») с понятием «финансы». Термин «*деньги*» подразумевает под собой средство, всеобщий эквивалент, материальную основу существования и функционирования финансов. «*Финансы*» более широкое понятие, чем «деньги». По сути это отношения между ранее упомянутыми категориями экономических субъектов по поводу формирования, распределения и использования денежных фондов.

Финансовый рынок — это особый сектор экономики, формируемый специализированными финансовыми институтами, где между различными участниками складываются отношения, предметом которых являются финансовые активы, финансовые инструменты, а также связанные с ними финансовые услуги. Под *финансовыми активами* зачастую подразумеваются ценные бумаги (акции, облигации, инвестиционные фонды, коносаменты, векселя и ин.) и различные валюты, а под инструментами — простые и гибридные производные финансовые инструменты (иначе деривативы), такие как опционы, фьючерсы, свопы и т.д.

Потенциальные инвесторы или те, кто уже состоялся на финансовом рынке, формируют стратегии поведения, при выборе которых учитывают, какой из инструментов будет более комфортен и эффективен для получения дополнительного дохода от вложения денежных средств. Помимо того, что перед трейдерами стоит вопрос о выборе стратегии и инструментов, они проводят тщательный инвестиционный анализ: фундаментальный и технический.

К **фундаментальному анализу** относится следующее:

- макроэкономический анализ действующей системы: анализ текущих макроэкономических показателей и их влияние на конъюнктуру финансового рынка;
- отраслевой анализ: оценка степени инвестиционной привлекательности отрасли, в которую планируется влияние капитала;
- анализ финансово-экономического состояния эмитента интересующего финансового актива (анализ степени недооценки или переоценки его стоимости рынком).

Данный анализ довольно затратен по времени и масштабен по объему охваченной информации, поэтому инвесторы зачастую прибегают к **техническому анализу**. Проводиться анализ котировок финансового актива для прогнозирования цен с помощью рассмотрения графиков движения за предыдущие периоды времени без анализа иных сторонних факторов. Теоретически, **котировка** — это значение, которое отражает стоимость определенного интересующего инвестора актива в исследуемый промежуток времени.

На практике котировки формируются в результате взаимодействия спроса и предложения, т.е. на основе цены, по которой клиент готов приобрести актив и цены, по которой поставщик финансового актива готов его продать.

Если у инвестора нет четкого представления о том, какие у него должны быть ценные бумаги в портфеле, т.е. какая должна быть дифференциация инвестиционного портфеля, он обращается к фондовым индексам.

Фондовый индекс представляет собой показатель изменения цен (котировок) на определенные группы финансовых активов. Любой фондовый индекс можно также рассмотреть, как длинный временной ряд с достаточно большой выборкой данных (дневных, месячных, годовых). Интересно то, что длинные временные ряды могут обладать свойством инерционности. Инерционность — свойство временного ряда, когда его значения изменяются, сохраняя определенную степень устойчивости процесса. Т.е. благодаря большой выборке данных можно составить модель, улавливающую долгосрочные тенденции и плавные изменения во временном ряду без исследования иных, внешних факторов.

В эконометрике существует следующее предположение: данные говорят сами за себя, нет необходимости привлекать и исследовать иные факторы, т.к. их влияние уже зафиксировано в памяти временного ряда, чтобы сделать краткосрочный прогноз об изменении временного ряда на рынке. Т.е. существует гипотеза о некоторой длинной памяти ряда.

К моделям, способным исследовать длинную память ряда, относятся видоизменённые модели Бокса–Джекинса, иначе называемые моделями класса *ARFIMA*. Данная модель позволяет исследовать те временные ряды, в которых корреляции между значениями имеют разную тенденцию (возрастание, убывание) [1].

Модель *ARFIMA* (p, d, q) может быть представлена следующим образом:

$$AR(L)(1 - B)^d(x_t) = \delta + MA(L)\varepsilon_t, \quad (1)$$

где $(1 - B)^d x_t$ — оператор дробной интеграции, $d \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ — степень дробной интеграции. Параметр d в данной модели определяет скорость затухания автокорреляции во временном ряду. Оно может быть любым вещественным числом (имеющим дробную часть), однако на практике его значения применяют в диапазоне $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

Также стоит учесть тот факт, что всякий длинный временной ряд обладает свойством условной гетероскедастичностью, что является существенным фактором в оценке прогнозных способностей будущих моделей.

Условную гетероскедастичность можно определить, как положительную связь дисперсии текущего значения от дисперсии значения или некоторых значений n -го исследуемого (-ых) лага (-ов). Под данным определением понимается механизм изменения волатильности временного ряда: если временной ряд обладает условной гетероскедастичностью, то изменение в значениях n -го лага влияет на изменение текущего значения при прямой связи. Т.е. если дисперсия лага увеличивается, то дисперсия текущего значения также увеличивается и наоборот.

Модели класса *ARCH/GARCH* позволяют учитывать условную гетероскедастичность ряда. Положительными достоинствами такого типа моделей является возможность кластеризации волатильности ряда, а также оценка временных рядов с “тяжелым хвостом” (с англ. heavy tails), т.е. выборки данных из медленно сходящегося бесконечного ряда значений. Под кластеризацией волатильности подразумевается разделение, разбивка временного ряда на некие подгруппы значений, они же кластеры данных, которые схожи по характеру волатильности (высокая волатильность в момент времени t , низкая волатильность в момент времени $(t + 1)$ и т.д.) на некотором диапазоне данных.

“Тяжелые хвосты” — понятие, описывает вероятностное распределение некоторых показателей временного ряда. Ряд может обладать некоторыми “хвостами” значений, расположенными за пределами типичных значений ряда. Иными словами, вероятность того, что СВ примет некоторое экстремальное значение (например, для некоего финансового ряда станет либо шоком, либо неожиданным спадом) остается ненулевой или даже значительной. Модель *ARCH* позволит с помощью исследования волатильности ряда проследить за такими моментами [2-3].

3 Эконометрический анализ котировок фондовых индексов

Таким образом, в данном исследовании будет рассмотрено применение дробно- дифференциальных моделей, а именно моделей класса *ARFIMA* и *ARCH/GARCH* в анализе котировок (далее — Close) международных биржевых индексов.

Для исследования были выбраны 2 индекса, представляющие различные фондовые биржи и государства: индекс *DJI* и индекс *SSE Composite* [4-5].

Индекс Dow Jones являлся первым фондовым индексом, представленным еще в 1884 году Чарльзом Доу. Сперва он рассчитывался как средний показатель цен акций одиннадцати крупнейших железнодорожных компаний США (Dow Jones Transportation). На 2024 год индекс учитывает котировки акций тридцати международных компаний, которые влияют на финансовую и экономическую ситуацию в стране нахождения и далеко за её пределами. В связи с переориентацией экономики США с промышленного сектора на сектор услуг в DJIA (Dow Jones Industrial Average) стали включать акции компаний различных секторов, начиная с финансового сектора, заканчивая электронными технологиями и розничной торговлей. Формула расчета индекса представлена ниже:

$$DJIA = \frac{\sum_{i=1}^{30} A_i}{\text{Dow Jones Divisor}} = \frac{Q}{Z} \quad (2)$$

где Q — сумма стоимости всех акций 30-ти компаний, входящих в состав индекса на момент его расчета; Z — числовое значение специального коэффициента Dow Jones (divisor).

Многими авторами критикуется метод расчёта данного показателя, ведь индекс рассчитывается именно по цене акций, а не по капитализации компаний, которая также имеет свой вес при принятии решений об инвестировании. Это свидетельствует о том, что в DJIA будут превалировать компании с самыми дорогими акциями, а не с самой большой рыночной стоимостью. Однако по своей сути индекс Dow Jones является классическим индикатором в инвестиционной сфере США.

Индекс *SSE Composite* рассчитывается на основе роста динамики всех компаний, входящих в список Шанхайской фондовой биржи. Он рассчитывается по методу взвешенной рыночной капитализации:

$$SSE = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{I} = \frac{Q}{I} \quad (3)$$

где Q — сумма рыночной капитализации всех акций, входящих в состав индекса на момент его расчета; I — сумма рыночной стоимости всех акций, берется как базовое значение индекса.

Таким образом, индекс *SSE Composite* является индикатором изменений в инвестиционной сфере Китая.

Статистические данные по указанным ранее индексам *DJI* и *SSE Composite* были получены из открытых Интернет-источников, а именно с официального сайта Yahoo Finance. Составление эконометрических моделей было проведено с помощью специальных пакетов анализа *EViews* и *Excel*.

Для индекса *DJI* (ряд включает в себя выборку из 387 наблюдений) была построена следующая модель класса *ARFIMA*:

$$\begin{aligned} \text{CLOSE} = & 64402.0265 (\text{Prob. } 0.9910) - 0.00017 \cdot E^2 (\text{Prob. } 0.0000) + \\ & + 0.4854 \cdot D (\text{Prob. } 0.0000) + 0.9998 \cdot AR(2) - 0.7123 \cdot MA(2) \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициент детерминации, равный 0.9917, что модель объясняет 99% выборки, что при 387 наблюдениях (помесячные данные февраля 1992 года до апреля 2024 года) является значительным показателем.

Условие нормального распределения при больших выборках редко достигается. В последующем было принято допущение о недостижимости нормального распределения.

Положительными моментами в данной модели является отсутствие мультиколлениарности, отсутствие автокорреляции ($DW = 1.5$). Видно, что в модель учитывает длинную память временного ряда с его сложной внутренней структурой остатков. При проведении перспективного прогноза по модели класса *ARFIMA* на 3 будущих периода, ошибка прогноза *MAPE* составила 7%, что является удовлетворительным результатом, и он показал на продолжение тенденции роста индекса *DJI* на три следующих периода.

Однако при тестировании отсутствии гетероскедастичности, а именно при проведении тестов на наличие *ARCH/GARCH* эффектов, была выявлена необходимость их введения в модель. Прогнозирование изменений ряда с использованием модели условной гетероскедастичности показало более точные результаты: ошибка прогноза не превышала 4%, также с тенденцией роста индекса.

Если сравнивать прогнозы по ранее рассмотренным моделям для индекса Dow Jones, то более точной является модель, учитывающая условную гетероскедастичность ряда, что является довольно естественным выводом для столь длительного временного ряда как Dow Jones. Однако модель с учетом длины памяти для данного ряда тоже предоставила удовлетворительные результаты.

Модели индекса *SSE Composite* представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{CLOSE} = & 448.4570 (\text{Prob. } 0.0422) + 0.8191 \cdot SSE(-1) (\text{Prob. } 0.0000) + \\ & + 0.1679 \cdot E(-2) (\text{Prob. } 0.0057) + 0.2205 \cdot D (\text{Prob. } 0.0005) + \\ & + 0.2161 \cdot AR(5) (\text{Prob. } 0.0348) + 0.1724 \cdot AR(4) + (\text{Prob. } 0.0060) \\ & + 0.1967 \cdot MA(7) (\text{Prob. } 0.0009) \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициент детерминации по модели *ARFIMA* остался на уровне 95%, показатель DW был 2.00, что свидетельствует об отсутствии автокорреляции. Однако, для настолько длинных временных рядов как индексы бирж присутствие гетероскедастичности является естественным процессом, который необходимо корректировать (далее в модели класса *GARCH*).

$$\begin{aligned} D(\text{Close}) = & -16.8733 (\text{Prob. } 0.2367) - 0.8870 \cdot E(-1) (\text{Prob. } 0.0000) \\ & + 0.0913 \cdot AR(4) (\text{Prob. } 0.0900) + 0.9530 \cdot MA(1) (\text{Prob. } 0.0000) \\ \text{GARCH} = & 2642.6826 (\text{Prob. } 0.0033) + 0.4003 \cdot RESID(-1)^2 (\text{Prob. } 0.0000) \\ & + 0.5615 \cdot GARCH(-1) (\text{Prob. } 0.0000) \end{aligned} \quad (6)$$

ARCH- и *GARCH*-эффекты оказывают значительное влияние на поведение временного ряда. Необходимость их учета заключается в исправлении условной гетероскедастичности и в последующем увеличении точности прогнозирования.

Если сравнивать полученные прогнозы по рассмотренным моделям по индексу SSE Composite, то можно сделать следующие выводы:

- 1) Ошибка прогноза по модели *ARFIMA* больше, чем по модели *ARCH/GARCH* (5.96% к 5.14%).
- 2) Прогноз по обеим моделям по индексу *SSE Composite* показывает на продолжение тенденции роста индекса с незначительными колебаниями.

4 Заключение

Полученные по моделям выводы свидетельствуют о том, что модели класса *ARFIMA* обладают существенными недостатками: не учитывают условную гетероскедастичность длинных временных рядов таких как котировки индексов различных бирж. При моделировании процессов с учетом длины памяти временного ряда (модели класса *ARFIMA*) существует большое количество вариантов моделей, которые можно использовать для последующего прогноза. Недостатком модели *ARFIMA* является отсутствие учета процесса условной гетероскедастичности, что свойственно столь длинным временным рядам. Поэтому есть необходимость к использованию иного класса моделей *GARCH*.

В условиях современных пакетов прогнозирования использования смешанной модели *ARFIMA-GARCH* не предоставляется возможным, необходимо обладать дополнительными навыками программирования, чтобы достигнуть необходимых результатов.

В связи с этим, вопрос выбора модели для прогнозирования длинных временных рядов без учета иных, сторонних факторов, остается на выбор аналитика и инвестора. Однако, дифференциальное моделирование — еще один способ для оценки тенденций на рынке финансовых активов с доказанной математической базой.

Литература

1. Granger C. W. J., Joyeux Roselyne, An introduction to long-memory time series models and fractional differencing // J. Time Series Analysis. 1980, V. 1, № 1, 15–29. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1980.tb00297.x>
2. Engle R.F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation // Econometrica, 1982, V. 50, No. 4, 987–1007. <https://doi.org/10.2307/1912773>
3. Bauwens L., Laurent S., Jeroen V. K. Rombouts J.V.K. Multivariate GARCH models: a survey // J. Appl. Econometrics, 2006, V. 21 (1), 79–109. <https://doi.org/10.1002/jae.842>
4. Dow Jones Industrial Average (DJI) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.investing.com/indices/us-30-historical-data?ysclid=lp49zeubcs934599309>. – Дата доступа: 23.07.2024.
5. SSE Composite Index (000001.SS) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://finance.yahoo.com/quote/000001.SS/> – Дата доступа: 23.07.2024.

УДК 332.82+519.863

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ДОЛЕЙ ВВОДА В ЭКСПЛУАТАЦИЮ ОБЩЕЙ ПЛОЩАДИ ЖИЛЫХ ДОМОВ ПО ОБЛАСТЯМ И г. МИНСКУ

А. А. Литвинович¹, Э. М. Аксень²
e-mails: ¹litvinovich@bsu.by, ²eaksen@mail.ru

В статье рассмотрена задача максимизации межвременного интегрального социально-экономического показателя. Приводится пример результатов вычисления на основе построенной оптимизационной задачи.

Ключевые слова: жилищная политика; интегральный показатель; оптимизация.

CALCULATION OF OPTIMAL PROPORTIONS OF COMMISSIONED HOUSING AREA BY REGIONS AND MINSK CITY

A. A. Litvinovich¹, E. M. Aksen²
e-mail: ¹litvinovich@bsu.by, ²eaksen@mail.ru

This paper considers the problem of maximizing an intertemporal integral socio-economic indicator. Results of calculations based on the constructed optimization problem is presented.

Keywords: housing policy; integral indicator; optimization.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B70, Secondary 90C30.

Динамика рынка жилой недвижимости имеет важное значение для уровня социально-экономического благополучия страны. Уровень обеспеченности населения жильем, его доступность для населения напрямую оказывают воздействие на качество жизни, демографические показатели, количество безработных и другие макроэкономические показатели. Оптимизация социально-экономических показателей жилищной политики Беларуси требует максимизации межвременного интегрального показателя, методика определения которого представлена в [1].

Пусть n — число регионов в некоторой социально-экономической системе. В рассматриваемом нами случае, когда в качестве социально-экономической системы выступает Республика Беларусь, регионами являются области Республики Беларусь и город Минск, поэтому $n = 7$. Через m обозначим число используемых в модели показателей результативности жилищной политики (например, общая площадь жилых домов, введенных в эксплуатацию, объем субсидий и т.п.). Через $x_{ij}(t)$ обозначим значение j -го показателя жилищной политики в i -м регионе для t -го периода времени ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$).

Пусть s — число социально-экономических показателей (число родившихся за некоторый период времени, обеспеченность граждан общей площадью жилья и т.п.). Значение k -го социально-экономического показателя жилищной политики в i -м регионе для t -го периода времени ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$) обозначим $y_{ik}(t)$. В соответствии с предлагаемой нами методикой имеет место зависимость с запаздыванием показателей $y_{ik}(t)$ от показателей $x_{ij}(t)$.

Для того, чтобы учесть запаздывание влияния объясняющих факторов $x_{ij}(t)$ на результирующие показатели $y_{ik}(t)$, определим ненаблюдаемые показатели $\tilde{x}_{ijk}(t)$ по следующей рекуррентной формуле:

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = \tilde{x}_{ijk}(t-1) \cdot \left(\frac{x_{ij}(t)}{\tilde{x}_{ijk}(t-1)} \right)^{\gamma_{ijk}}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s}, \quad (1)$$

где γ_{ijk} — параметры, которые мы будем оценивать с помощью фактических данных.

Прологарифмировав формулу (1), получим:

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)] + \gamma_{ijk} \cdot (\ln[x_{ij}(t)] - \ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)]), \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s}. \quad (2)$$

Заметим, что $\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)]$ — взвешенное среднее значений $\ln[x_{ij}(t)]$ и $\ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)]$, поскольку из равенства (2) следует, что

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \gamma_{ijk} \ln[x_{ij}(t)] + (1 - \gamma_{ijk}) \ln[\tilde{x}_{ijk}(t-1)], \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s}.$$

Формулы (1) и (2) дают возможность найти траектории $\tilde{x}_{ijk}(t)$ и $\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)]$ с помощью заданного значения $\tilde{x}_{ijk}(t_0)$ в начальный момент времени t_0 , а именно можно показать, что

$$\tilde{x}_{ijk}(t) = [\tilde{x}_{ijk}(t_0)]^{(1-\gamma_{ijk})^{t-t_0}} \prod_{\tau=t_0+1}^t [x_{ij}(\tau)]^{\gamma_{ijk}(1-\gamma_{ijk})^{t-\tau}}, \quad t \geq t_0 \quad (3)$$

Далее при оценке параметров полагаем $\tilde{x}_{ijk}(t_0) = x_{ij}(t_0 + 1)$.

Через $\hat{y}_{ik}(t)$ обозначим прогнозное значение k -го социально-экономического показателя результативности жилищной политики в i -м регионе для t -го периода времени $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$. Будем использовать следующую формулу для нахождения прогнозных значений:

$$\hat{y}_{ik}(t) = a_{ik} \prod_{j=1}^m \tilde{x}_{ijk}^{b_{ijk}}(t), \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, s}, \quad (4)$$

где a_{ik} и b_{ijk} — параметры, которые мы будем оценивать с помощью фактических данных.

Прологаривмировав формулы (3), (4), получим соответственно:

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \gamma_{ijk} \cdot \sum_{\tau=t_0+1}^t (1 - \gamma_{ijk})^{t-\tau} \ln[x_{ij}(\tau)] + (1 - \gamma_{ijk})^{t-t_0} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t_0)], \quad (5)$$

$$t \geq t_0, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, s};$$

$$\ln[\hat{y}_{ik}(t)] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^m b_{ijk} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t)], \quad i = \overline{1, n}, k = \overline{1, s}. \quad (6)$$

Введем межвременной (динамический) интегральный показатель для социально-экономических показателей за период с T_1 -го по T_2 -ой год следующим образом:

$$Y(T_1, T_2) = \prod_{t=T_1}^{T_2} \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^s y_{ik}^{\alpha_{ik}(t)}(t), \quad (7)$$

где $\alpha_{ik}(t)$ — весовой коэффициент для k -го социально-экономического показателя для i -го региона в t -ом периоде, причем

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) = 1.$$

Заметим, что для разных социально-экономических показателей $y_{ik}(t)$ (при разных значениях индекса k) могут использоваться разные единицы измерения. В таких случаях значения $y_{ik}(t)$ должны быть приведены к одним и тем же единицам измерения (например, стать безразмерными). Достичь этого можно с помощью деления указанных показателей на соответствующие единицы измерения, либо на значения соответствующих показателей в некотором базовом году (например, в начальном T_1 -ом году, т.е. $y_{ik}(t)$ для использования в формуле (7) нужно будет предварительно разделить на $y_{ik}(T_1)$, ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$, $t = \overline{T_1, T_2}$).

Предположим, что в t -ом году в Беларуси суммарное взвешенное значение j -ого показателя результативности жилищной политики не должно превышать планового значения $B_j(t)$. Например, общий объём строительства жилья в Беларуси может быть ограничен планом в X тысяч квадратных метров общей площади. Тогда при планировании показателей результативности жилищной политики по регионам нужно учитывать следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, t = \overline{T_1, T_2}, \quad (8)$$

где $c_{ij}(t)$ — известные коэффициенты, $[T_1, T_2]$ — период планирования.

Следовательно, в задаче максимизации межвременного интегрального показателя (7) для планового периода с T_1 -го по T_2 -ой год должны учитываться условия (8), а также соотношения (3) и (4) (либо эквивалентные им (5), (6)).

Прологарифмировав формулу (7), а также используя соотношения (5), (6), будем иметь оптимизационную задачу, равносильную задаче максимизации межвременного интегрального показателя (7):

$$\ln Y(T_1, T_2) = \sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \ln y_{ik}(t) \rightarrow \max; \quad (9)$$

$$\ln[y_{ik}(t)] = \ln a_{ik} + \sum_{j=1}^m b_{ijk} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t)], \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t = \overline{T_1, T_2}; \quad (10)$$

$$\ln[\tilde{x}_{ijk}(t)] = \gamma_{ijk} \cdot \sum_{\tau=t_0+1}^t (1 - \gamma_{ijk})^{t-\tau} \ln[x_{ij}(\tau)] + (1 - \gamma_{ijk})^{t-t_0} \ln[\tilde{x}_{ijk}(t_0)], \quad (11)$$

$$t \geq t_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, s}, \quad t = \overline{T_1, T_2};$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2}; \quad (12)$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2}. \quad (13)$$

Здесь для удобства восприятия формул не используем диакритический знак "крышечка" в соотношениях (9), (10) (хотя в данном случае под y_{ik} имеются ввиду прогнозные значения этих показателей). Подставив формулу (10) в (9), а после этого (11) в полученное равенство, имеем:

$$\begin{aligned} \ln Y(T_1, T_2) = & \sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) \ln a_{ik} + \sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^m \alpha_{ik}(t) b_{ijk} (1 - \gamma_{ijk})^{t-t_0} \ln[\tilde{x}_{ijk}(T_1 - 1)] + \\ & + \sum_{\tau=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \ln[x_{ij}(\tau)] \sum_{t=\tau}^{T_2} \sum_{k=1}^s \alpha_{ik}(t) b_{ijk} \gamma_{ijk} (1 - \gamma_{ijk})^{t-\tau}. \end{aligned}$$

Следовательно, оптимизационная задача (9)-(13) эквивалентна следующей задаче:

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln[x_{ij}(t)] \rightarrow \max;$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2};$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1, T_2},$$

где

$$\beta_{ij}(t) := \sum_{k=1}^s b_{ijk} \gamma_{ijk} \sum_{\tau=t}^{T_2} \alpha_{ik}(\tau) (1 - \gamma_{ijk})^{\tau-t}. \quad (14)$$

Раметим, что полученная оптимизационная задача эквивалентна следующим $T_2 - T_1 + 1$ статическим задачам:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln[x_{ij}(t)] \rightarrow \max; \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) \leq B_j(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad (16)$$

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} \quad (17)$$

для каждого в отдельности значения $t = \overline{T_1, T_2}$.

Для решения оптимизационных задач (15)–(17) можно использовать метод множителей Лагранжа [2]. Функция Лагранжа в нашем случае будет иметь вид

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(t) \ln[x_{ij}(t)] - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \left[\sum_{i=1}^n c_{ij}(t) x_{ij}(t) - B_j(t) \right],$$

а полученные решения:

$$x_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) B_j(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1 + 1, T_2}, \quad (18)$$

где

$$\omega_{ij}(t) := \frac{\beta_{ij}(t)}{c_{ij}(t) \sum_{i=1}^n \beta_{ij}(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{T_1 + 1, T_2}. \quad (19)$$

Формулы (18), (19) дают единственное оптимальное решение задачи максимизации межвременного интегрального показателя (7) для планового периода с T_1 -го по T_2 -ой год.

В соответствии с формулой (18) $\omega_{ij}(t)$ – это доли суммарного значения j -го показателя по регионам в периоде t , и при этом они (в силу формулы (19)) не зависят от суммарного значения $B_j(t)$.

В случае использования в модели только одного показателя результативности жилищной политики и только одного социально-экономического показателя ($m = 1, s = 1$) формулы (14), (19), (18) примут более простой вид:

$$\beta_i(t) = b_i \gamma_i \sum_{\tau=t}^{T_1} \alpha_i(\tau) (1 - \gamma_i)^{\tau-t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad (20)$$

$$w_i(t) := \frac{\beta_i(t)}{c_i(t) \sum_{i=1}^n \beta_i(t)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}, \quad (21)$$

$$x_i(t) = w_i(t) B(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t = \overline{T_1, T_2}.$$

Подставив найденные значения β_i , γ_i , $\alpha_i(\tau)$ (см. [1]) в формулу (20), получим значения коэффициентов $\beta_i(\tau)$, подставление которых в (21) позволяет рассчитать оптимальные доли ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску (табл. 1).

Таблица 1: Оптимальные доли $w_i(t)$ ввода в эксплуатацию общей площади жилых домов по областям и г. Минску, %

Номер года	Брестская обл.	Витебская обл.	Гомельская обл.	Гродненская обл.	г. Минск	Минская обл.	Могилевская обл.
1	12,20	12,53	10,71	17,21	16,75	14,15	16,45
2	12,57	11,76	10,38	17,34	17,18	15,12	15,65
3	13,00	10,86	9,92	17,38	17,62	16,57	14,66
4	13,42	9,80	9,31	17,24	18,00	18,77	13,45
5	13,77	8,58	8,51	16,82	18,22	22,11	11,98

Таким образом, рассмотрена задача максимизации межвременного социально-экономического показателя с учетом ограничений на показатели результативности жилищной политики (в частности, объема ввода в эксплуатацию жилых домов) и получено аналитическое решение данной задачи, в соответствии с которым показатели результативности жилищной политики должны быть распределены по регионам таким образом, чтобы это приводило к максимизации указанного интегрального показателя.

Литература

1. Литвинович, А. А., Еременко М. М., Аксень Э. М. *Методика моделирования оптимального распределения показателей результативности жилищной политики с учетом запаздывания*. Белорусский экономический журнал. №2. С. 81–97. 2024.
2. Галеев, Э. М. *Оптимизация: теория, примеры, задачи*. Москва: Едиториал УРСС. 2002.

УДК 330.131.7+330.4

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ ОРГАНИЗАЦИИ В РАЗРЕЗЕ РИСК-МЕНЕДЖМЕНТА

Т. И. Маслюкова
e-mail: masljukova@bsu.by

В статье рассмотрены как связаны понятия экономической безопасности и риск-менеджмента.

Ключевые слова: риск-менеджмент; экономическая безопасность; угроза; риск.

ECONOMIC SECURITY OF ORGANIZATION IN THE FRAME OF RISK-MANAGEMENT

T. I. Maslyukova
e-mail: masljukova@bsu.by

The article discusses how the concepts of economic security and risk management are related.

Keywords: risk management; economic security; threat; risk.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B05; Secondary 91B74.

В последнее время понятие экономической безопасности используется повсеместно, и надо отметить, факт наличия в организации системы экономической безопасности — необходимый фактор эффективного существования организации. Деятельность любой организации происходит в ситуации неопределенности, следовательно организация постоянно подвержена рискам и степень воздействия факторов неопределенности на организацию постоянно возрастает. Чем успешнее компания, чем активнее она на рынке своей отрасли, чем выше прибыль организации, тем выше и степень воздействия рисков и угроз для данного бизнеса. Конкуренты в сфере деятельности, ненадежные партнеры, утечка информации, низкий уровень квалификации сотрудников, незаконные действия со стороны контрагентов — малая часть системы рисков и угроз, которая сопутствует деятельности компании. Чтобы иметь возможность остаться на плаву и действовать эффективно, компания должна иметь систему экономической безопасности и постоянно её совершенствовать. Деятельность системы экономической безопасности должна быть достаточно полно и прозрачно обеспечена нормативно-правовой базой. Только тогда можно говорить о том, что данная система эффективна и имеет право на существование.

В Республике Беларусь вопрос экономической безопасности впервые был обозначен в 1995 г. после принятия первой редакции Концепции национальной безопасности Республики Беларусь. Данная концепция описывала степень участия страны в процессах глобализации и ее включенности в мировую экономическую систему. С этого момента Республика Беларусь принимает курс на развитие социально ориентированной рыночной экономики. После этого была принята еще одна редакция данной Концепции, в 2014 году. В действующей же Концепции (последняя редакция 25 апреля 2024 года [2]) описаны вопросы национальной безопасности в политической, экономической, научно-технологической, социальной, демографической, биологической, информационной, военной, экологической сферах. Данная концепция достаточно полно отражает стремления и направления дальнейшего развития в вопросе национальной безопасности страны. Также в Республике Беларусь приняты и действуют ряд законодательных актов [2–7], которые способствуют поддержанию национальной безопасности на стабильном уровне. Нормативно-правовая база также способствует поддержанию уровня экономической безопасности применительно и к отдельной организации. Например, в законе [5] прописаны вопросы предоставления информации, составляющей коммерческую тайну, а также сведения, не составляющие коммерческую тайну. В настоящее время существует несколько определений понятия экономической безопасности. В данной статье будем использовать следующее определение экономической безопасности предприятия: “Экономическая безопасность предприятия — это состояние наиболее эффективного использования корпоративных

ресурсов для предотвращения угроз и обеспечения стабильного функционирования предприятия в настоящее время и в будущем” [1].

Экономическая безопасность организации является внутренней системой, ориентированной на эффективную защиту активов компании. Перед системой экономической безопасности стоят задачи обеспечения надежного функционирования бизнес-процессов, устранение и/или понижение возможных финансовых потерь, минимизация влияния внешних и внутренних угроз в финансовой, ресурсной и кадровой сферах деятельности организации.

Если мы обратимся к понятию риск-менеджмента, то согласно [8], риск-менеджмент — это подсистема управления, направленная на разработку и реализацию экономически обоснованных для данной организации рекомендаций и мероприятий по предотвращению риска или уменьшению негативного его воздействия. Как видно из определений, деятельность системы риск-менеджмента и системы экономической безопасности, имеют перед собой одну и ту же задачу, но система экономической безопасности направлена на работу с угрозами, а система риск-менеджмента направлена на работу с рисками. Рассмотрим данные категории, а именно категории риска и угрозы, более подробно. Угроза экономической безопасности — это возможная опасность для организации. Угрозы можно разделить на два больших класса: внешние и внутренние. Каждая из этих групп в свою очередь может быть классифицирована на подклассы. К примеру, внешние угрозы можно разделить на экономические, политические, социальные и т.д. Угроза — это основополагающее понятие в системе экономической безопасности, и почти всегда угроза несёт за собой опасность. А тогда можно уточнить, что основная задача системы экономической безопасности — оградить организацию от угроз. На практике, чаще встречаются такие руководители бизнеса, которые уделяют серьезное внимание обеспечению внешней стороне безопасности бизнеса, мало занимаясь внутренней средой. Плюс, не каждый руководитель уделяет серьёзное внимание изучению методов защиты от угроз и устранения опасностей для организации.

Риск, в свою очередь, — неопределенность, связанная с возможностью возникновения в ходе принятия и реализации управленческого решения (проекта, плана, задачи) неблагоприятных ситуаций и последствий. Далее, неопределенность — неполнота или неточность информации об условиях реализации проекта, в том числе связанных с ним задач и результатов. Результатом проявления неопределенности в общем случае может быть следующий эффект: положительный (прибыль, доход или другая выгода); отрицательный (ущерб, убытки, потери и т.п.); нулевой (безубыточный, бесприбыльный результат) [9].

Очевидно, что понятие риск в сравнении с понятием угроза — более широкое. Важно отметить, что система экономической безопасности является риск-ориентируемой. Система риск-менеджмента, (состоящая из следующих этапов: выявление и идентификация рисков, анализ и оценка рисков, выбор методов управления риском, применение выбранных методов и принятие решений в условиях риска, разработка и реализация мер снижения рисков, контроль, анализ и оценка действий по снижению рисков), служит для обеспечения задач экономической безопасности. Особенно актуальны приемы и методы риск-менеджмента на стадии принятия и реализации управленческих решений. Именно управленческие решения являются ключевыми факторами в деятельности любой организации. Системный же характер риск-менеджмента предполагает рассмотрение рисков организации в виде целостной системы, где все риски взаимосвязаны и взаимообусловлены. Влияние на один отдельный фактор организации, посредством управленческого решения, оказывает в итоге влияние на весь бизнес в целом.

Кроме того, было бы крайне неразумно рассматривать риски только как негативные явления для организации. Регулирующей функцией риска заложена возможность развития организации, выхода организации на новую ступень развития, когда организация, работая в условиях риска, находит возможности для внедрения новых технологий, инноваций. Получение положительных эффектов в условиях риска возможно только если риск разумный, хорошо проработан, и организация рационально использует всю имеющуюся методику управления рисками.

Подводя итог, отметим следующие основные результаты: риск-менеджмент бизнесу необходим. Организация вынуждена использовать методику риск-менеджмента для выявления потенциальных рисков, а также для того, чтобы найти равновесие между возможными преимуществами от потенциальных рисков и избежать ошибочных решений, которые будут стоить очень дорого. К услугам организаций богатый аппарат методик оценки рисков и способов управления рисками. Не возникает сомнений, что для обеспечения эффективной деятельности бизнеса руководители должны заниматься обеспечением безопасности организации или экономической безопасности, при этом аппарат риск-менеджмента хороший инструмент в решении задачи обеспечения экономической безопасности.

Литература

1. Габуния Н.Г., Корелин К.В. Экономическая безопасность предприятия и управление рисками // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. 2015. № 4 (94). С. 79-81.
2. Об утверждении Концепции национальной безопасности Республики Беларусь [Электронный ресурс] // Решение Всебелорусского народного собрания 25.04.2024 № 5 – Национальный правовой Интернет-портал Республики Беларусь // Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2024.
3. Об органе государственного управления в сфере цифрового развития и вопросах информатизации [Электронный ресурс] : Указ Президента Респ. Беларусь, 7 апр. 2022 г., № 136 : с изм. и доп. от 12.04.2023 г. // ЭТАЛОН. Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2024.
4. О кибербезопасности [Электронный ресурс] : Указ Президента Респ. Беларусь, 14 февр. 2023 г., № 40 // ЭТАЛОН. Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2024.
5. О Концепции информационной безопасности Республики Беларусь [Электронный ресурс] : постановление Совета Безопасности Респ. Беларусь, 18 марта 2019 г., № 1 // ЭТАЛОН. Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2024.
6. Об утверждении Концепции энергетической безопасности Республики Беларусь [Электронный ресурс] : постановление Совета Министров Респ. Беларусь, 23 дек. 2015 г., № 1084 // ЭТАЛОН. Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2024.
7. О показателях уровня вероятного ущерба национальным интересам Республики Беларусь [Электронный ресурс] : приказ Операт.- аналит. центра при Президенте Республики Беларусь, 20 февр. 2020 г., № 65 // ЭТАЛОН. Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2024.
8. Киселев, А. А. Риск-менеджмент : учебник для направлений бакалавриата "Менеджмент "Экономика"/ А.А. Киселев. – Москва : Кнорус, 2021. – 167 с.
9. Анализ рисков / Электронный учебно-методический комплекс // Т.И. Маслюкова. Минск: БГУ, 2018. 227с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/211291>

УДК 539.42

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ГРАДИЕНТНОЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В. А. Нифагин¹, О. В. Дубровина²
e-mails: ¹nifagin@bsu.by, ²doubrovinaov@bsu.by

Для оценки локальных механических свойств в окрестности вершины трещины общего вида в рамках градиентной теории пластичности на стадии квазистатического роста линейной трещины при плоской деформации сформулирована краевая задача в неголономной постановке с нелинейным упрочнением в производных тензоров напряжений и деформаций. Получены полные решения асимптотическим методом возмущений. Математическая формулировка основана на редукции краевой задачи к задаче о собственных значениях для системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Исследовано перераспределение полей напряжений и деформаций в пластической области при квазистатическом росте трещины для сверхтонкой и промежуточной структуры. Найдена форма пластических зон. Даны оценки сингулярностей полей характеристик на каждом этапе метода. Получены условия корректности математической постановки краевых задач.

Ключевые слова: распространение докритической трещины; напряженно-деформированное состояние; метод асимптотических разложений; энергетический интегральный инвариант; корректность краевой задачи.

METHOD OF PERTURBATIONS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF GRADIENT FRACTURE MECHANICS

V. A. Nifagin¹, O. V. Doubrovina²
e-mail: ¹nifagin@bsu.by, ²doubrovinaov@bsu.by

To estimate local mechanical properties in the neighbourhood of the crack tip of general form in the framework of the gradient theory of plasticity at the stage of quasi-static growth of a linear crack under plane deformation, a boundary value problem in nonholonomic formulation with nonlinear hardening in the derivatives of stress and strain tensors is formulated. Complete solutions are obtained by the asymptotic perturbation method. The mathematical formulation is based on the reduction of the boundary value problem to the problem of eigenvalues for a system of ordinary nonlinear differential equations. The redistribution of stress and strain fields in the plastic region at quasi-static crack growth is investigated for superfine and intermediate structure. The shape of plastic zones is found. Estimates of singularities of characteristic fields at each stage of the method are given. Conditions of correctness of mathematical formulation of boundary value problems are obtained.

Keywords: pre-critical crack propagation; stress-strain state; asymptotic expansion method; energy integral invariant; boundary value correctness.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 74R10, Secondary 34E10.

1 Введение

Важным направлением современной механики разрушения является изучение асимптотических разложений упругопластических полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины, которое активно развивается благодаря работам, которые фокусируются на аналитических, численных и гибридных подходах, связанных с описанием поведения материалов в нелинейной среде. Среди важнейших представлены:

1. Асимптотические разложения для оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) в упругопластических средах. Модель Хатчинсона-Райса-Розенгрэна (HRR). В работах [1–3] были заложены основы асимптотического анализа в окрестности вершины трещины в упругопластических

материалах (нелинейная упругость). Основной вывод: поля напряжений и перемещений вблизи вершины трещины имеют степенные зависимости от расстояния до вершины трещины. В дальнейшем классическая модель HRR получила развитие для материалов с усложненной зависимостью напряжений от деформаций, а также за счет учета многослойных структур (например, композитов) и анизотропных материалов, что потребовало новых подходов к выводу асимптотических формул.

2. Энергетические критерии разрушения и асимптотические оценки. J -интеграл Черепанова–Райса [4, 5]. Введение J -интеграла как меры изменения энергии в области с трещиной. Доказательство инвариантности энергетического интеграла для нелинейно упругопластических материалов и его тесной связи с асимптотическими разложениями НДС.

3. Градиентные модели пластичности (неголомомные определяющие соотношения). Современные исследования показывают, что традиционные модели HRR могут быть расширены за счет введения градиентной пластичности. Это позволяет более точно описывать поведение напряжений вблизи вершины трещины, где локализация пластических деформаций наиболее выражена [6, 7].

4. Численные методы анализа окрестности вершины трещины. Конечные элементы с особенностями. Методы конечных элементов (МКЭ) для задач механики разрушения часто используют специальные функции формы (конечные элементы с особенностями), которые описывают особенности НДС вблизи вершины трещины. Например, элементы типа “singularity elements”, учитывающие зависимость $r^{-\alpha}$ [10–12].

5. Гибридные методы, использующие совмещение аналитических асимптотических решений с численными методами. Так аналитические решения используются для задания граничных условий, а численные методы уточняют поля напряжений и перемещений вблизи трещины [6–8].

6. Многоосные нагрузки. Актуальность получили исследования полей напряжений и перемещений для материалов, подвергающихся сложным нагрузкам (например, комбинации растяжения и сдвига). А также трещины в анизотропных и гетерогенных материалах. Сюда относятся задачи об аналитических разложениях для материалов с анизотропными свойствами. Например, для композитов, усиленных волокнами и материалов с градиентными механическими характеристиками [13].

7. Влияние микроструктуры на НДС. Отдельная область исследований занимается рассмотрением микроструктурных моделей (например, учетом пор и дефектов) для уточнения асимптотических разложений [14].

Таким образом, асимптотические разложения вблизи вершины трещины дают глубокое понимание локального поведения материалов, что критично для прогнозирования роста трещин. Энергетические подходы, такие как применение J -интеграла, остаются центральным инструментом, а современные численные методы продолжают уточнять эти модели для сложных материалов и условий.

2 Метод возмущений в градиентной теории пластичности

Анализ напряженно-деформированного состояния упругопластического материала является существенно более сложной в математическом плане задачей, чем аналогичные задачи линейной и нелинейной упругости. К числу основных осложняющих факторов относятся нелинейность диаграммы деформирования материала в зоне активного нагружения, возникновение зон упругой разгрузки, границы разделов которых неизвестны и требуют нахождения, многоэтапность развития упругопластических деформаций и, наконец, инкрементальный характер определяющих соотношений теории пластичности. Последний фактор является наиболее существенным, поскольку исключает при сложных траекториях нагружения возможность формулировки краевой задачи непосредственно для конечных значений внешних усилий и перемещений. Поэтому многие известные решения краевых задач для упрочняющихся тел были получены численно в рамках итерационного метода, предполагающего прослеживание развития пластических зон в теле на основе последовательного наращивания параметра нагружения, посредством достаточно малого его изменения или прямых численных схем.

Для учета эффектов истории нагружения, нелинейного упрочнения, Баушингера рассмотрим краевую задачу математической теории пластичности в градиентной постановке [6]. Полагаем, что сплошная упругопластическая среда, занимающая объем $D \in E_2$ с границей Γ удовлетворяет уравнениям равновесия в напряжениях внутри плоского тела и условиям на ее границе

$$\sigma_{ij,j} + P_i = 0, \quad \sigma_{ij}n_j = T_i, \quad i, j = 1, 2, \quad P_i = P_i(x, \lambda), \quad T_i = T_i(x, \lambda) \in \Gamma, \quad (1)$$

здесь P_i, T_i — заданные компоненты массовых и поверхностных сил, $\bar{n} = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ , λ — параметр нагружения. Суммирование производится по повторяющимся индексам. Внешние нагрузки задаются удовлетворяющими условиям равновесия тела в целом $\int P_i dS = \int T_i d\Gamma$, где $dS = dx_1 dx_2$ — мера объема, $d\Gamma$ — мера граничной линии Γ , соответственно.

Определяющие соотношения теории течения с упрочнением

$$\begin{aligned} K\varepsilon = \sigma, \quad 2Ge_{ij} = s_{ij} + p_{ij}, \quad p_{ij} = \int_0^t s_{ij} dF(Q), \quad Q = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}, \\ \varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ε, σ — средние деформация и напряжение, e_{ij}, s_{ij} — девиаторы деформаций и напряжений, Q — квадрат интенсивности касательных напряжений, K, G — материальные постоянные, F — заданная функция напряжения.

Оставаясь в рамках математической теории пластичности с малыми деформациями, тензор деформаций полагаем линейным

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_{\varphi,\varphi}}{r} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(u_{\varphi,r} + \frac{u_{r,\varphi}}{r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (3)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений точек деформируемого тела.

В [8] предложено решение статической упругопластической задачи с угловой точкой. Поскольку связь между напряжениями и деформациями является неголономной, то решение фундаментальной задачи пластичности в общем случае должно строиться на основе вспомогательных задач в приращениях. Если процесс внешнего нагружения является в достаточной мере гладким, а переход от упругой работы материала к пластической — плавным, то в силу вступает приближенный аналитический метод решения, основанный на представлении напряжений и деформаций в виде рядов по параметру нагружения. Была представлена реализация этого метода применительно к теории изотропного упрочнения для несжимаемого материала. Тогда внешние нагрузки изменяются с ростом параметра нагружения λ :

$$T_i = \sum_{n=1} T_i^{(n)} \lambda^n, \quad P_i = \sum_{n=1} P_i^{(n)} \lambda^n. \quad (4)$$

В качестве параметра нагружения может быть взято характерное внешнее усилие, или отношение к модулю сдвига в соответствии с представлением. Следовательно, и решение задачи для перемещений ищется в виде:

$$u_i(x) = \sum_{n=1} u_i^{(n)} \lambda^n, \quad \sigma_{ij} = \sum_{n=1} \sigma_{ij}^{(n)}(x) \lambda^n. \quad (5)$$

Предполагаем также, что функция F в (2) разлагается в сходящейся области изменения Q степенной ряд $F = \sum_{m=1} c_m Q^m$, где для Q имеет место разложение $Q = \sum_{n=2} Q^{(n)} \lambda^n$,

$$Q^{(n)} = \sum_{\alpha+\beta=n} s_{ij}^\alpha s_{ij}^\beta. \quad (6)$$

Так что

$$\begin{aligned} Q^{(m)} = \sum_{n=2m} Q^{(mn)} \lambda^n, \quad Q^{(mn)} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} Q^{(n_1)} \dots Q^{(n_m)} \lambda^n, \\ F = F_0 + \sum_{n=2} \psi^{(n)} \lambda^n, \quad \psi^{(n)} = \sum_{m=1} c_m Q^{(mn)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6), (7) следуют выражения для коэффициентов разложения (2)

$$p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha+\beta=n} \beta \psi^{(\beta)} s_{ij}^{(\alpha)}, \quad n \geq 3. \quad (8)$$

Затем подставляя (4), (5) в (1) получим следующие уравнения и граничные условия на каждом этапе метода

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} + P_i^{(n)} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(n)} n_j = T_i^{(n)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (9)$$

Подставляя (4), (5) в (2) и (3) с учетом (8), находим определяющие соотношения на каждом этапе.

$$\sigma_{ij,j}^{(n)} = 2G\varepsilon_{ij}^{(n)} + (K - 2G)\varepsilon^{(n)}\delta_{ij} - p_{ij}^{(n)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}(u_{j,i}^{(n)} + u_{i,j}^{(n)}); \quad \varepsilon^{(n)} = \frac{1}{3}u_{k,k}^{(n)}. \quad (10)$$

Таким образом, из (9) и (10) вытекает граничная задача для $n \geq 3$ ($p_{ij}^{(n)} = 0$, $n = 1, 2$):

$$\begin{aligned} -A_{ij}u_j^{(n)} &= P_i^{(n)} - p_{ij,j}^{(n)}; \quad A_{ij} = G\delta_{ij}\Delta + \frac{1}{3}(K + G)(\cdot)_{,ij}, \\ B_{ij}u_j^{(n)} &= T_j^{(n)} + p_{ij}^{(n)}n_j; \quad B_{ij} = G\left(\delta_{ij}n_k(\cdot)_{,k} + n_j(\cdot)_{,i}\right) + \frac{1}{3}(K - 2G)n_i(\cdot)_{,j}. \end{aligned} \quad (11)$$

Решения представимые в виде рядов (5) сходятся, по крайней мере асимптотически, для малых значений λ . Это означает, что коэффициенты разложений (5) растут не быстрее, чем это требуется для сходимости рядов решений в методе разложения по параметру нагружения. В работе [6] исследовались решения на уровне сверхтонкой структуры, когда отыскивался главный член асимптотического разложения напряжений и деформаций для трещины общего вида, причем этот член был нелинейным. В работе [7] рассматривалось асимптотическое решение задачи о квазистационарном росте трещины для важных частных случаев в упругопластическом материале в рамках теории течения с квадратичным упрочнением. Такой подход позволил оценить локальные характеристики макроскопического разрушения, такие как порядок сингулярностей для малой окрестности вершины ($r \rightarrow 0$), включая поведение решений на разных этапах в областях сверхтонкой и промежуточной структуры окрестности вершины. Получение математически строгих решений, учитывающих комплекс осложняющих эффектов упругопластического деформирования было ориентировано на рассмотрение краевых задач механики разрушения для фиксированных и распространяющихся трещин, которые составляют базу исследований практически важных плоских задач.

3 Краевая задача о полной асимптотике полей напряжений и деформаций в окрестности вершины распространяющейся трещины общего вида

Рассмотрим задачу о распространяющейся трещине общего вида при условиях плоской деформации [6]. Математическая постановка сводится к задаче на собственные значения дифференциального оператора 4-го порядка и обратной задаче интегральной геометрии для энергетического инварианта. Линейная трещина продвигается в стационарном режиме, так что поля напряжений и деформаций не зависят явным образом от параметра нагружения. Ищем решение граничной задачи для упругопластического материала с конечной трещиной под действием растягивающего на бесконечности постоянного напряжения P и неравномерного распределения напряжений в окрестности трещины.

Построим асимптотику напряжений для случая плоской деформации на основе метода возмущений, описанного в разделе 2.

Декартову систему координат ξ_i ($i = 1, 2$) отнесем к концу трещины, нормируя переменные

$$x_1 = \frac{(\xi_1 - l)G^2}{K^2}, \quad x_2 = \frac{\xi_2 G^2}{K^2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1},$$

где $k = P\sqrt{\pi l}$, здесь P — нагрузка, приложенная на бесконечности, $2l$ — длина трещины.

Начало подвижной полярной системы координат (O, r, φ) поместим в вершину трещины. Стреливается вершина трещины вместе с сопутствующей системой координат (O, r_1, φ_1) . При этом ориентация площадки, на которой рассматривается изменение напряжений, остается фиксированной и координаты вектора нормали к этой площадке не изменяются при перемещении начала координат вместе с вершиной трещины. Однако, отметим, что координаты вектора нормали к этой площадке меняются при перемещении полюса O в точку O_1 , т.е. являются функцией длины трещины. Этот необходимо учитывать при выборе представлений разложений напряжений и перемещений.

Рассмотрим некоторую функцию $\zeta(l, r, \varphi)$. Пусть производная по длине представляется формулой $\dot{\zeta}(r(l), \varphi(l)) = -\zeta_{,r} \cos \varphi + \zeta_{,\varphi} \frac{\sin \varphi}{r}$.

Под производной напряжений по длине в полярной системе координат понимается величина $\dot{\sigma}_{ij}(l, r, \varphi) = \lim_{\delta l \rightarrow 0} \frac{\sigma_{ij}(l + \delta l, r_1, \varphi_1) - \sigma_{ij}(l, r, \varphi)}{\delta l}$, $i, j = r, \varphi$.

Функцию $\sigma_{ij}(l + \delta l, r_1, \varphi_1)$ понимаем в виде линейной асимптотики δl : $\sigma_{ij}(l + \delta l, r_1, \varphi_1) = \sigma_{ij}(l, r, \varphi) + \dot{\sigma}_{ij}(l, r, \varphi) \cdot \delta l + O(\delta l^2)$.

В отличие от статического случая, решение задачи о докритическом росте ищется в виде рядов по параметру приращения длины для производных напряжений по длине. Также, область пластического деформирования может быть разделена на зоны активного нагружения и разгрузки, которые требуют сращения решений на линии раздела.

Рассматривается несжимаемый материал при квадратичном законе упрочнения под действием равномерно распределенной нагрузки на бесконечности для трещины общего вида. Для плоского деформированного состояния в полярной системе координат используются стандартные соотношения, связывающие среднее давление и компоненты тензоров и девиаторов напряжений и деформаций:

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij}, \quad e_{rr} + e_{zz} = 0, \quad s_{rr} + s_{\varphi\varphi} = 0, \quad \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), \quad s_{rr} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\ s_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \quad s_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}.$$

Уравнение совместности деформаций в производных деформаций по длине имеет вид:

$$2(r\dot{e}_{r\varphi,\varphi})_{,r} = \dot{e}_{rr,\varphi\varphi} - r\dot{e}_{rr,r} + r(\dot{e}_{\varphi\varphi})_{,rr}. \quad (12)$$

тогда переходя в определяющих соотношениях неголономной теории пластичности, учитывающих наличие зоны активного нагружения и зоны разгрузки, от приращений к производным по длине трещины, получим:

$$\dot{e}_{rr} = \dot{s}_{rr} + \mu\dot{F}(T)s_{rr}, \quad \dot{e}_{r\varphi} = \dot{s}_{r\varphi} + \mu\dot{F}(T)s_{r\varphi}, \quad \dot{e}_{\varphi\varphi} = \dot{s}_{\varphi\varphi} + \mu\dot{F}(T)s_{\varphi\varphi} \quad (13)$$

при $\mu = \vartheta \left(\frac{G}{M} - 1 \right)$, $\vartheta = \begin{cases} 1, & \delta T \geq 0, \\ 0, & \delta T < 0. \end{cases}$ где M — модуль упрочнения, $F(T) = \frac{A_3}{2}(s_{rr}^2 + s_{\varphi\varphi}^2 + 2s_{r\varphi}^2)$ — квадратичная функция интенсивности касательных напряжений, $A_3 = 2A_2$, где A_2 — постоянная материала, характеризующая нелинейность диаграммы деформирования, определяемая, например, из опыта на простое растяжение.

Краевая задача формулируется из условий свободных от усилий поверхностей трещины и условий симметрии. Тогда в производных по длине трещины имеем:

$$\dot{\sigma}_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\pi} = 0, \quad \dot{\sigma}_{r\varphi}|_{\varphi=\pi} = 0, \quad \dot{\sigma}_{r\varphi}|_{\varphi=-\pi} = 0, \quad \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}|_{\varphi=-\pi} = 0, \quad (14)$$

где σ_{ij} — безразмерные компоненты тензора напряжений, отнесенные к сдвиговому модулю G .

Введем функцию напряжений $\Phi(r, \varphi)$ в виде полного разложения по параметру нагружения Λ в окрестности особой точки $\Phi(r, \varphi) = \sum_{k \leq 0} \psi_k(\varphi)r^{\lambda_k}$, причем r и φ являются функциями длины трещины, а Λ содержится в них неявно.

Опуская для простоты представления функции упрочнения, напряжений и девиаторов деформаций в области активного нагружения, приведем для произвольного приближения из уравнения совместности деформаций вид рекуррентной последовательности краевых задач о собственных значениях.

$$\sum_{k \geq 0} (2(-(\lambda_k - 2)(1 - \lambda_k)(\psi_k'' \cos(\varphi) - \psi_k' \sin(\varphi)) + (1 - \lambda_k)(\psi_k''' \sin(\varphi) + \psi_k'' \cos(\varphi))) + \\ + 2(\lambda_k - 3)(-(\lambda_k - 2)(1 - \lambda_k)(\psi_k'' \cos(\varphi) - \psi_k' \sin(\varphi)) + (1 - \lambda_k)(\psi_k''' \sin(\varphi) + \psi_k'' \cos(\varphi))) - \\ - \frac{1}{2}((\psi_k^{(4)})_k + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k'' - (\lambda_k - 2)((\psi_k^{(4)})_k + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k'')) \cos(\varphi) - (\psi_k''' \lambda_k(2 - \lambda_k) \times \\ \times \psi_k' - (\lambda_k - 2)((\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi) + (\psi_k^{(5)})_k + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k''' - \psi_k'' + \\ + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi) + (\psi_k^{(4)})_k + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k'' - \psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi)) + \\ + \frac{1}{2}(\lambda_k - 3)(-(\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) + (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)) - \\ - (\lambda_k - 3)((\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) - (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)) - \\ - \frac{1}{2}(\lambda_k - 3)(\lambda_k - 4)((\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) - (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)))r^{\lambda_k - 3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} 2(((-(\lambda_k + \lambda_l - 4)(a'_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi))) \times \\
& \times (1 - \lambda_m) \psi'_m + (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(1 - \lambda_m) \psi''_m + 2(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7) \times \\
& \times (((4 - \lambda_k - \lambda_l)(a'_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi)))(1 - \lambda_m) \psi'_m + \\
& + (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(1 - \lambda_m) \psi''_m - 1/2((-(\lambda_k + \lambda_l - 4)(a''_{kl} \cos(\varphi) - \\
& - 2a'_{kl} \sin(\varphi) - a_{kl} \cos(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + 2a'_{kl} \cos(\varphi) - a'_{kl} \sin(\varphi)))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m) \psi_m) + \\
& + (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)(a'_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi)))(\psi'''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m) \psi'_m) + \\
& + (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)(a'_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a''_{kl} \sin(\varphi) + a'_{kl} \cos(\varphi)))(\psi'''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m) \psi'_m) + \\
& + (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(\psi^{(4)}_m + \lambda_m(2 - \lambda_m) \psi''_m)) + \\
& + \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)(-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m) \psi_m) \\
& - (\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) - a'_{kl} \sin(\varphi))(\psi''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m) \psi_m) \\
& - \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 8) \times ((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) - a'_{kl} \sin(\varphi)) \times \\
& \times (\psi''_m + \lambda_m(2 - \lambda_m) \psi_m)) r^{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

с граничными условиями

$$\psi_n|_{\varphi=\pi} = 0, \quad \psi'_n|_{\varphi=\pi} = 0, \quad \psi_n|_{\varphi=-\pi} = 0, \quad \psi'_n|_{\varphi=-\pi} = 0, \quad \psi''_n|_{\varphi=\pi} = 0. \tag{16}$$

Применяемый вариант метода возмущений предполагает, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ ($\lambda_{k+1} > \lambda_k > 0$) подлежит определению наряду с функциями $\psi_k(\varphi)$. Для начала ведется поиск значения параметра λ_0 , соответствующего нетривиальному решению, и функции ψ_0 на промежутке $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Когда нелинейный член асимптотики строится на основе линейного, то для разрешимости указанных задач должны выполняться дополнительные условия, возникающие из-за того, что функции $a_{klm}(\varphi)$ зависят от $\psi_n(\varphi)$ с индексами $\min\{k, l, m\} \leq n \leq \max\{k, l, m\}$. В общем случае сверхтонкой структуры данный подход не применим, так как на начальном этапе решается нелинейная задача.

4 Энергетические инварианты в краевых задачах механики разрушения

В [15] введен контурный интеграл, вычисляемый на заданном распределении σ_{ij} , u_i , допускающий энергетическое толкование, как компоненты вектора потока энергии в вершину трещины инвариантный относительно выбора контура

$$J = \int_{\Gamma} \left(\left(W_0(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2} \rho \dot{\gamma}^2 u_{i,x_1} u_{i,x_1} \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1} \right) ds. \tag{17}$$

Здесь контур Γ охватывает вершину трещины в тонкой пластинке (для определенности будем рассматривать плоскую деформацию) и выходит своими концами на берега трещины, свободные от напряжений, u_{i,x_1} — производные компонент вектора перемещений, ρ — плотность материала, W_0 — полная работа напряжения на соответствующих деформациях (потенциал, характеризующий свойства упругопластического материала), $\dot{\gamma}$ — скорость распространения вершины трещины.

Сущность энергетического критерия локального разрушения состоит в следующем. Пусть имеется упругопластическое тело с линейной трещиной. Для того, чтобы трещина стала распространяться, увеличивая свою поверхность, требуется израсходовать энергию, равную по величине той, которую надо затратить, чтобы осуществить целостность материала перед кромкой разреза. Эту энергию можно назвать энергией разрушения. Одновременно с образованием поверхности, свободной от нагрузок, деформация в некотором объеме тела уменьшается. Это приводит к соответствующему выделению из тела потенциальной энергии деформации. При этом выяснилось, что затраты энергии при создании новых поверхностей при развитии трещины связаны, главным образом, с работой пластической деформации объемов материала, расположенных перед вершиной трещины. Этот интеграл берется по криволинейному контуру без самопересечений, окружающему вершину трещины. Концы контура должны лежать на противоположных берегах трещины, но не обязательно в одной и той же точке плоскости. Интеграл вычисляется через заданное поле напряжений и перемещений при отсутствии массовых сил и термодинамических членов.

Необходимо заметить, что примеров аналитического вычисления интеграла (17) практически не существует, поскольку для этого требуется решение задачи для тела с трещиной в замкнутой форме. При численном подходе, его расчет производится после решения задачи на основе метода конечных элементов.

Были рассмотрены поля напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины различных типов в момент страгивания. Предполагая, что напряженное состояние упругопластической среды, предшествующее началу движения трещины, достигается в условиях нагружения, отличающегося от лучевого. В силу этого определяющие соотношения выбирались в рамках неголономной теории течения [16]. Процесс нагружения при страгивании трещины является нелинейным и перераспределение напряжений и деформаций (их скоростей) отыскивались также в рамках соотношений теорий пластичности в приращениях. Были построены области активного нагружения и разгрузки. При этом, как указывалось ранее, решение задач о жестких концентраторах напряжений типа трещин в неполной (асимптотической) постановке содержит степень произвола. В линейной механике разрушения такая неопределенность относится к связи между коэффициентом интенсивности напряжений с геометрией тела и краевыми условиями [17]. Большая степень неопределенности появляется для упругопластических задач, когда главный член разложения вблизи сингулярной точки — вершины неподвижной трещины — содержит наряду с неопределенным множителем заранее неизвестный показатель сингулярности, который можно отнести к сверхтонкой структуре. Для ситуации распространяющейся упругопластической трещины число неопределенных параметров может увеличиваться до трех. Помимо этого, полученные результаты позволяют с помощью энергетического критерия локального разрушения найти зависимости между критическими параметрами разрушения — допустимой нагрузкой и соответствующей максимальной длиной трещины.

Указанное свойство J -интеграла используется для определения вышеуказанных величин через параметры нагружения и геометрию задачи (рис. 1) [4, 6, 18]. Считается выполнимым, условие развития трещины при наличии сопротивления материала разрушению и незначительном влиянии термодинамических членов, а также $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \sim r^{-\lambda_0}$.

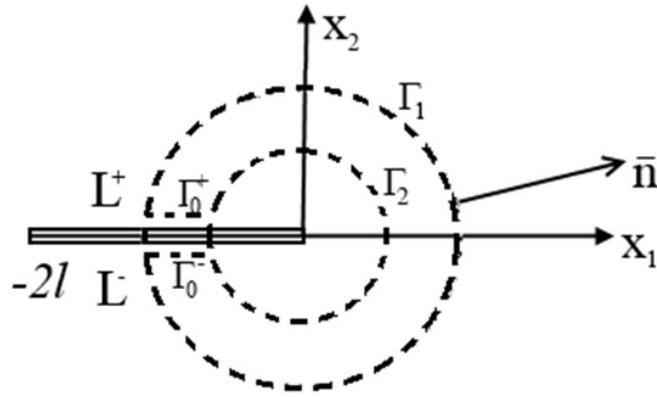


Рис. 1: Система координат при вершине трещины.

Приведем в качестве примера для случая плоской деформации тензорные произведения вида:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^p \varepsilon_{rr}^p &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (-(\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) + (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)) r^{\lambda_k - 3} + \\
 &+ \mu \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a'_{kl} \sin(\varphi)) (\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) r^{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{s \geq 0} (\psi_s \lambda_s + \psi_s'') (-(\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) + \\
 &\quad + (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)) r^{\lambda_s + \lambda_k - 5} \\
 &+ \mu \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{s \geq 0} (\psi_s \lambda_s + \psi_s'') (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + \\
 &\quad + a'_{kl} \sin(\varphi)) (\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) r^{\lambda_s + \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 9},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi}^p \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p &= \sum_{s \geq 0} \lambda_s (\lambda_s - 1) \psi_s r^{\lambda_s - 2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} ((\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) - \\
&\quad - (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)) r^{\lambda_k - 3} + \\
&+ \frac{\mu}{4} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} ((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl}' \sin(\varphi)) (\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) r^{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7} = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{s \geq 0} \lambda_s (\lambda_s - 1) \psi_s ((\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) - \\
&\quad - (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)) r^{\lambda_s + \lambda_k - 5} + \\
&+ \frac{\mu}{4} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{s \geq 0} \lambda_s (\lambda_s - 1) \psi_s ((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) - \\
&\quad - a_{kl}' \sin(\varphi)) (\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) r^{\lambda_s + \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 9}, \\
\sigma_{r\varphi}^p \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^p &= \sum_{s \geq 0} (1 - \lambda_s) \psi_s' r^{\lambda_s - 2} \cdot \sum_{k \geq 0} (-(\lambda_k - 2)(1 - \lambda_k) \psi_k' \cos(\varphi) + (1 - \lambda_k) \psi_k'' \sin(\varphi)) r^{\lambda_k - 3} + \\
&\quad \frac{\mu}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a_{kl}' \sin(\varphi)) (1 - \lambda_m) \psi_m' r^{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7} = \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{s \geq 0} (1 - \lambda_s) \psi_s' (-(\lambda_k - 2)(1 - \lambda_k) \psi_k' \cos(\varphi) + (1 - \lambda_k) \psi_k'' \sin(\varphi)) r^{\lambda_s + \lambda_k - 5} + \\
&\quad \frac{\mu}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{s \geq 0} (1 - \lambda_s) \psi_s' (-(\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a_{kl}' \sin(\varphi)) (1 - \lambda_m) \psi_m' r^{\lambda_s + \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 9}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Благодаря свойству инвариантности J -интеграла, именно в нелинейных задачах он широко применяется в практических расчетах элементов конструкций с трещинами на прочность, включая материалы с нелинейными характеристиками. Предположим, что в соответствии с нелинейным законом деформирования напряжение представляет собой степенную функцию от деформации $\sigma \sim r^\alpha$ с показателем степени $\alpha \leq 1$. Тогда, выбирая в качестве контура интегрирования Γ — окружность радиуса r получим оценку $J \sim r^{f(k, \lambda_k)}$, т.е. уравнение $f(k, \lambda_k) = 0$, из решения которого находится порядок сингулярности с помощью численного решения обратной задачи интегральной геометрии. На последующих этапах этот параметр отыскивается с помощью рекуррентного уравнения, получаемого из самого метода возмущения.

Исследования, посвященные задачам об асимптотике полей напряжений и деформаций в упругопластических нелинейных средах рассматривались в множестве работ [17–21]. В ряде публикаций с определяющими соотношениями нелинейной упругости задача решается посредством определения функции напряжений. С учетом симметрии применяется интервал $\varphi \in [0, \pi]$. На левом конце задаются краевые условия симметрии

$$\varphi = 0; \quad \sigma_{r\varphi} = 0; \quad \sigma_{rr, \varphi} = 0; \quad \sigma_{\varphi\varphi, \varphi} = 0. \tag{19}$$

Из условий (19) только два независимы. При этом указывается, что функция напряжений определена системой уравнений и граничными условиями с точностью мультипликативного множителя. Поэтому в качестве граничного условия задается произвольное значение при $\varphi = 0$. Тогда для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, к решению которого редуцируется задача имеем пять граничных условий. Можно предположить, что в таком подходе нет противоречия, так как λ_k — собственное значение. В работе [19] задача не сводится к задаче о собственных значениях, а число граничных условий уменьшается с мотивацией, что граничные условия при $\varphi = \pi$ взаимосвязаны, так что при удовлетворении одного из них удовлетворяется и второе. Аналогичная задача решается в [20] для трещины общего вида. Если задать четыре начальных условия при $\varphi = \pi$, то получится задача Коши для нахождения собственных значений. Из этих условий два — это условия симметрии, а третье — произвольное ненулевое условие, вытекающее из однородности задачи. Далее варьируя четвертым условием удовлетворяем условиям при $\varphi = \pi$. Еще один подход реализован в [21]. Из соотношения конечности J -интеграла выводится начальное собственное значение и строятся решения для симметричных случаев трещины. Рассматривается промежуток $\varphi \in [0, \pi]$ и условия симметрии при $\varphi = 0$. Из условий при $\varphi = \pi$ удовлетворяется только одно, тогда необходимо решать задачу на промежутке $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

В тоже время, полученные численные результаты достаточно хорошо совпадают с решениями МКЭ и другими прямыми методами. Так это можно объяснить тем, что собственное значение — показатель сингулярности оценивалось с помощью требования конечности энергетического J -интеграла. Следует понимать, что начальная асимптотика должна быть предельным представлением решений краевых задач при $r \rightarrow 0$. В общем случае выполнение этого условия для упругопластического материала наталкивается на существенные трудности, так как единственный путь

решения упругопластических краевых задач в общем случае — это построение итерационного процесса, в котором нулевым приближением является решение линейно упругой задачи. Но значения α для нулевого этапа и для последующих приближений будут различны. Получается, что характер асимптотики должен меняться от итерации к итерации. Неясно, как осуществить численную реализацию такого итерационного процесса и какова будет точность полученного решения. Данный вариант метода возмущений снимает эту проблему. Резюмируя, можно отметить, что, не рассматривая данную задачу как задачу о собственных значениях возникает ситуация, когда для отыскания нетривиальных решений краевой задачи число граничных условий — пять превышает решаемого дифференциального уравнения — четыре. В некоторых работах одно из граничных условий не рассматривается или говорится, что одно из граничных условий выполняется при выполнении второго. Следует отметить, что данное условие может использоваться как эффективный аппаратный прием, но результаты, полученные на его основе, вообще говоря, требуют проверки. Более общий физико-механический принцип, применяемый здесь, совпадает с условием, что физический смысл имеют решения, которые удовлетворяют неравенству $0 < \frac{d\Pi}{dl} < M$, где M — некоторая верхняя граница, $\frac{d\Pi}{dl}$ — производная потенциальной энергии по длине трещины, что позволяет свести число граничных значений задачи до четырех.

Предлагаемый вариант метода возмущений совместно с интегральным энергетическим инвариантом позволяет формулировать математически корректные постановки краевых задач на всех этапах и получить достоверные численные результаты.

Литература

1. Rice, J. W. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968.
2. McMeeking, R. M., Parks, D. M. Crack Tip Opening Displacement and Plastic Zone Shapes for Power-Law Hardening Materials. *International Journal of Fracture*. 1979.
3. Bazant, Z. P., Cedolin, L. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories. *World Scientific* 2010.
4. Cherepanov, G. P. *Mechanics of Brittle Fracture*. 1979.
5. Матвиенко, Ю. Г. *Модели и критерии механики разрушения*. М.: Физматлит, 2006. 328 с. URL: https://www.studmed.ru/matvienko-yug-modeli-i-kriterii-mehaniki-razrusheniya_9b25979bcbf.html.
6. Нифагин, В. А. *Асимптотические методы в задачах упругопластической теории трещин*. LAP LAMBERT Academic Publishing, OmniScriptum GmbH&Co. 2017. 125 с.
7. Nifagin, V., Hundzina, M. Quasistatic stationary growth of elasto-plastical single crack. *International Journal of Engineering, Business and Enterprise Applications*. 2014. Issue 10. P. 6–12.
8. Нифагин, В. А. Асимптотика напряжений в окрестности угловой точки для задач теории течения с упрочнением. *Вестник БНТУ*. 2008. № 5. С. 90–93.
9. Макклиток, Ф. Пластические аспекты разрушения. *Разрушение*. Т.3. М.: Мир, 1976. С. 67–262.
10. Белоцерковский, О. М. *Численные методы в механике сплошных сред*. М., Наука, 1984.
11. Оден, Дж. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред*. М.: Мир, 1976.
12. Beer, G. Finite element, boundary element and coupled analysis of unbounded problems in elastostatics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1983. **19**. pp.567–580.
13. Lia, W., Liang, H., Chen, J. et al. Effect of SiC particles on fatigue crack growth behavior of SiC particulate-reinforced Al–Si alloy composites produced by spray forming/ *Procedia Materials Science*. 2014. Vol. 3. P. 1694–1699. DOI: 10.1016/j.mspro.2014.06.273.
14. Ma, J, Lu, H, Wang, B, Hornung, R, Wissink, A, Komanduri, R. Multiscale simulation using general-ized interpolation material point (GIMP) method and molecular dynamics (MD). *CMES*, 2006. **14** p. 101–111.
15. Shih, C. F. Relationship between J-integral and crack tip opening displacement for stationary and expanding cracks. *J. Mech. Phys. Solids*, 1981. **29**, P. 305–326,
16. Ключников, В. Д. *Физико-математические основы прочности и пластичности*. М.: Изд-во МГУ, 1994. 189 с.
17. Морозов, Н. Ф. *Математические вопросы теории трещин*. М.: Наука, 1984. 256 с.
18. Rice, I. R., Rosengren, G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material *J. Mech. Phys. Solids*. 1968. V. 16. N 1. P. 1–12.
19. Белякова, Т. А., Ломакин, Е. В. Трещина нормального разрыва в упругой среде с изменяющимися свойствами в условиях плоской деформации. *Изв. РАН. МТТ*. 1999. № 3. С. 97–105.

20. Tvergaard, V., Hutchinson, J.W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids *J. Mech. Phys. Solids*. 1992. V. 40. № 6. P. 1377-1397.
21. Астафьев, В. И., Крутов, А. Н. Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения. *Изв. РАН. МТТ*. 2001. № 5. С. 125–133.
22. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач* М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

УДК 517.588

О НОВЫХ ТИПАХ ОБОБЩЕННЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ МЕЛЛИНА-БАРНСА

С. В. Рогозин¹, М. В. Дубатовская²e-mails: ¹rogosinsv@gmail.com, ²marina.dubatovskaya@gmail.com

В настоящей работе обсуждаются определения и свойства новых типов специальных функций, обобщающих функции гипергеометрического типа. Общим для этого семейства специальных функций является возможность их представления интегралом Меллина-Барнса.

Ключевые слова: гипергеометрические функции; ункция Миттаг-Леффлера; функция Ле Руа; интеграл Меллина-Барнса.

ON NEW TYPES OF GENERALIZED SPECIAL FUNCTION, REPRESENTED VIA THE MELLIN-BARNES INTEGRAL

S. V. Rogosin¹, M. V. Dubatovskaya²e-mails: ¹rogosinsv@gmail.com, ²marina.dubatovskaya@gmail.com

Definitions and properties of special functions generalizing hypergeometric type functions are discussed. A common feature of these functions is their possibility to be represented via the Mellin-Barnes integral.

Keywords: hypergeometric function; Mittag-Leffler function; Le Roy function; Mellin-Barnes integral.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 33E12, Secondary 33B15, 33E20.

1 Введение

В настоящей работе обсуждаются определения и некоторые свойства специальных функций, обобщающих функции гипергеометрического типа. Общим для этого нового семейства специальных функций является возможность их представления интегралом Меллина-Барнса.

Одно из возможных определений функций гипергеометрического типа - их задание в виде степенных рядов, коэффициенты которых представляют собой отношения Гамма-функций Эйлера. Таким способом задаются, например, функция Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1)$$

и ее много-параметрические обобщения $E_{(\alpha_j, \beta_j)_n}(z)$, гипергеометрическая функция Гаусса

$$F(a, b, c; z) = {}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!} z^k$$

и обобщенная гипергеометрическая функция ${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_q \end{matrix}; z \right)$, функция Райта

$$\phi(\alpha, \beta; z) = {}_0\Psi_1 \left[\begin{matrix} \dots\dots\dots \\ (\beta, \alpha) \end{matrix} \middle| z \right] = {}_0W_1 \left[\begin{matrix} \dots\dots\dots \\ (\beta, \alpha) \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}$$

и обобщенная функция Райта ${}_pW_q \left[\begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,q} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right]$, а также многие другие более общие специальные функции (см., например, [1, App. F]).

Указанные выше функции допускают также представления в виде интегралов Меллина-Барнса. Так, для функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ при $\alpha > 0, \beta \geq 0$ такое представление имеет вид

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{-\infty}} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} (-z)^{-s} ds, \quad |\arg z| < \pi, \quad (2)$$

где контур интегрирования $\mathcal{L}_{-\infty}$ это кривая, которая начинается в точке $-\infty - i\varphi$ и оканчивается в точке $\infty + i\varphi$ с достаточно малым $\varphi > 0$, пересекая вещественную ось в точке $c, 0 < c < 1$. Однозначная ветвь функции $(-z)^{-s}$ определяется в плоскости с разрезом вдоль отрицательной полу-оси и

$$(-z)^{-s} = \exp\{-s[\log |z| + i \arg(-z)]\},$$

где $\arg(-z)$ - произвольная фиксированная ветвь функции $\text{Arg}(-z)$.

В начале XX века наряду с функцией Миттаг-Леффлера (1) Эдмундом Ле Руа при исследовании вопроса о поведении аналитического продолжения степенных рядов была введена следующая функция (позднее названная функцией Ле Руа)

$$R_\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[(k+1)!]^\gamma}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В последние годы в связи с исследованием ряда вопросов (в частности, при анализе распределения Конвея-Максвелла-Пуассона) была введена более общая функция типа Ле Руа (см., например, [1, Sec. 5.3], [2] и приведенный там обзор работ других авторов)

$$F_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[\Gamma(\alpha k + \beta)]^\gamma}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Формально говоря, функция типа Ле Руа (3) не относится к функциям гипергеометрического типа поскольку при нецелом значении параметра γ коэффициенты ряда (3) содержат не отношения Гамма-функций, а их нецелые степени. Тем не менее, функция типа Ле Руа допускает представление интегралом Меллина-Барнса следующего вида

$$F_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}{[\Gamma(\beta + \alpha s)]^\gamma} (-z)^s ds + \frac{1}{[\Gamma(\beta)]^\gamma}, \quad |\arg z| < \pi, \quad (4)$$

при специально выбранном контуре $\mathcal{L}$ (см. [3]). Подынтегральная функция в (4) содержит не только отношение/произведение Гамма-функций, но и их степени.

Заметим, что для доказательства сходимости рядов и интегралов здесь и ниже используется формула Стирлинга (см., например, [1, (A26)])

$$\Gamma(\alpha z + \beta) \approx \sqrt{2\pi} e^{-\alpha z} (\alpha z)^{\alpha z + \beta - 1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad |\arg z| < \pi, \quad (5)$$

или ее модификация (см., например, [1, (A27)])

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} \approx z^{a-b} \left[1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2z} + \dots\right], \quad (6)$$

где $z \rightarrow \infty$ вдоль любой кривой соединяющей $z = 0$ и $z = \infty$ и не проходящий через точки $z = -a, -a-1, -a-2, \dots$ и $z = -b, -b-1, -b-2, \dots$

2 Обобщенные специальные функции степенного типа

В данном разделе рассматриваются обобщенные специальные функции, в коэффициенты представлений которых в виде степенных рядов входят наряду с Гамма-функцией также степени Гамма-функций. Здесь мы ограничимся двумя типами таких обобщенных специальных функций, зависящими от относительно небольшого количества параметров (на самом деле от шести параметров). Эти два типа имеют некоторое различие, поэтому они изучаются отдельно.

Рассмотрим следующее обобщение функции Ле Руа

$$F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma)_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)]^{\gamma_2}}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Параметры в этом представлении $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, j = 1, 2)$ - вообще говоря, некоторые комплексные числа. Естественно предположить, что $\alpha_j \neq 0, j = 1, 2$ (в противном случае соответствующий множитель - постоянная величина), а также $\gamma_j \neq 0, j = 1, 2$, (в противном случае исчезает соответствующий множитель). Следует также определить каким образом вычисляются значения $[\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{-\gamma_j}, j = 1, 2$. Прежде всего, при некоторых значениях $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$ соответствующая Гамма-функция может принимать комплексные значения и, следовательно, степени таких функций многозначны. Для определенности зафиксируем главную ветвь $\arg [\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{-\gamma_j}$ в каждом таком случае. Кроме того, $\alpha_j k + \beta_j$ может принимать целые неположительные значения (в частности так происходит при $\alpha_j < 0, \beta_j \leq 0$). Если $\operatorname{Re} \gamma_j > 0$, то множитель $[\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{-\gamma_j}$ (и соответствующий коэффициент в ряде) обращается в нуль. Если же $\operatorname{Re} \gamma_j \leq 0$, то соответствующий коэффициент в ряде бесконечен и ряд в (7) не имеет смысла.

Таким образом, при фиксированных ветвях многозначных функций коэффициенты ряда (7) корректно определены, если при $\operatorname{Re} \gamma_j \leq 0$ параметры $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ принимают значения вне следующего исключительного множества

$$\mathcal{P}_0 \equiv \{(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} : \exists k, \alpha_j k + \beta_j = 0, -1, -2, \dots, j = 1, 2\}.$$

Поведение функции (7) различается в зависимости от знаков $\operatorname{Re} \gamma_j$.

2.1 Обобщение функции Ле Руа, $\operatorname{Re} \gamma_j > 0, j = 1, 2$.

Рассмотрим обобщение функции Ле Руа (7) в том случае, когда вещественные части показателей степени положительны, т.е. $\operatorname{Re} \gamma_j > 0, j = 1, 2$. Свойства данной функции изучаются в работах [3, 4]. Приведем эти свойства с тем, чтобы в дальнейшем выделить специфические черты новых обобщений специальных функций.

Наиболее интересным представляется случай, когда (вообще говоря комплексные) значения параметров $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, j = 1, 2$, таковы, что ряд в (5) сходится для всех комплексных $z \in \mathbb{C}$, т.е. функция $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma)_2}(z)$ является целой функцией от z .

Лемма 2.1 [3, Lemma 1] Пусть $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \gamma_j > 0, j = 1, 2$, и выполнено условие

$$\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) + \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2) > 0. \quad (8)$$

Тогда функция $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma)_2}(z)$ является целой функцией переменной z .

Целые функции $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ характеризуются порядком ρ

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \log k}{\log \frac{1}{|c_k|}}, \quad (9)$$

и типом σ

$$(\sigma \rho)^{\frac{1}{\rho}} = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \left(k^{\frac{1}{\rho}} |c_k|^{\frac{1}{k}} \right). \quad (10)$$

Теорема 2.1 [3, Thm. 1] Пусть параметры $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \gamma_j > 0, j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (8). Тогда порядок ρ и тип σ целой функции $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma)_2}(z)$ задаются следующими формулами:

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) + \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2)}, \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) + \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2)}{\exp \left\{ \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1 \cdot \log \alpha_1) + \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2 \cdot \log \alpha_2)}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) + \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2)} \right\}}. \quad (12)$$

Из общей теории целых функций [5] вытекает следующая асимптотическая оценка целой функции $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma)_2}(z)$, в которой ρ и σ определены формулами (11) и (12), соответственно: для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $r_\varepsilon > 0$, зависящее только от ε , такое что

$$\max_{|z|=r} \left| F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma)_2}(z) \right| \leq e^{(\sigma + \varepsilon)r^\rho}, \quad \forall r > r_\varepsilon.$$

В [3] получено также интегральное представление функции $F_{(\alpha,\beta)_2}^{(\gamma)_2}(z)$. Приведем некоторые детали такого представления. Пусть $\operatorname{Re} \gamma_j > 0$, $j = 1, 2$, и выполнено следующее дополнительное ограничение на параметры

$$\alpha_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \operatorname{Im} \beta_j \neq 0, j = 1, 2. \quad (13)$$

Замечание 2.1 (ветви многозначных функций) *Функции $\Gamma(\alpha_j s + \beta_j)$, $j = 1, 2$, являются мероморфными функциями переменной s с простыми полюсами $s = -\frac{\beta_j + n}{\alpha_j}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, из представления [7, (5.8.2)]*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

вытекает, что функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей в комплексной плоскости.

Следовательно, точки $s = -\frac{\beta_j + n}{\alpha_j}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ - единственно возможные точки многозначной функции $[\Gamma(\alpha_j s + \beta_j)]^{-\gamma_j}$. Зафиксируем главную ветвь каждой многозначной функции $[\Gamma(\alpha_j s + \beta_j)]^{-\gamma_j}$, $j = 1, 2$, в комплексной плоскости, разрезанной вдоль луча $-\operatorname{Im} \frac{\beta_j}{\alpha_j}$ от точки $-\frac{\beta_j}{\alpha_j}$ до $-\frac{\beta_j}{\alpha_j} + \operatorname{sign}(\alpha_j) \cdot \infty$. Условие (13) гарантирует существование чисел $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$ таких, что указанные разрезы не пересекают полуполосу $\operatorname{Res} > 0, \varphi_1 < \operatorname{Im} s < \varphi_2$. Определим также значения многозначной функции $(-z)^s$, определенной на комплексной плоскости s для каждого фиксированного z , разрезанной вдоль отрицательной полуоси, следующими равенствами

$$(-z)^s = \exp\{s[\log |z| + i \arg(-z)]\},$$

где $\arg(-z)$ - любая фиксированная ветвь многозначной функции $\operatorname{Arg}(-z)$.

По аналогии с [3, Thm. 2] устанавливается следующая

Теорема 2.2 Пусть $\operatorname{Re} \gamma_j > 0$, $j = 1, 2$, параметры α_j, β_j , $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (13), а ветви многозначных функций $[\Gamma(\alpha_j s + \beta_j)]^{-\gamma_j}$, $j = 1, 2$, $(-z)^s$ описаны в Замечании 2.1.

Тогда для функции $F_{(\alpha,\beta)_2}^{(\gamma)_2}(z)$ справедливо следующее интегральное представление

$$F_{(\alpha,\beta)_2}^{(\gamma)_2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{+\infty}} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]^{\gamma_2}} (-z)^s ds + \frac{1}{[\Gamma(\beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\beta_2)]^{\gamma_2}}, \quad (14)$$

где $\mathcal{L}_{+\infty}$ - петля в горизонтальной полуполосе правой полуплоскости $\operatorname{Res} > 0, \varphi_1 < \operatorname{Im} s < \varphi_2$, начинающаяся в точке $+\infty + i\varphi_1$ и заканчивающаяся в точке $+\infty + i\varphi_2$, $-\infty < \varphi_1 < 0 < \varphi_2 < +\infty$, пересекающая вещественную ось в точке $c, 0 < c < 1$.

Proof. Выбранный контур $\mathcal{L}_{+\infty}$ разделяет полюсы $s = 1, 2, \dots$ функции $\Gamma(-s)$ и полюсы $s = -1, -2, \dots$ функции $\Gamma(1+s)$ вместе с полюсом $s = 0$ функции $\Gamma(-s)$. Следовательно, подынтегральная функция в (14) локально интегрируема (см., например, [6]).

Доказательство глобальной сходимости интеграла в (14) аналогично приведенному в [2] и основано на применении формулы Стирлинга (5). Далее покажем, что значения интеграла (14) и ряда (7) совпадают. Применим теорему о вычетах. Заметим, что слева по обходу контура $\mathcal{L}_{+\infty}$ расположены только простые полюсы в точках $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{+\infty}} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]^{\gamma_2}} (-z)^s ds = \\ & = - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s=k} \left[\frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]^{\gamma_2}} (-z)^s \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\operatorname{Res}_{s=k} \Gamma(-s) = -\frac{(-1)^k}{k!}, \quad \Gamma(k+1) = k!, \quad (-z)^k = (-1)^k z^k.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{+\infty}} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]^{\gamma_2}} (-z)^s ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]^{\gamma_2}} = \\ & = F_{(\alpha,\beta)_m}^{(\gamma)_m}(z) - \frac{1}{[\Gamma(\beta_1)]^{\gamma_1} [\Gamma(\beta_2)]^{\gamma_2}}. \end{aligned}$$

Представление (14) доказано. $\square$

2.2 Обобщение функции Ле Руа в случае, когда показатели степени имеют вещественные части различных знаков.

Рассмотрим случай, когда показатели степени в (7) имеют вещественные части различных знаков, т.е.

$$F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma_1, -\gamma_2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)]^{\gamma_2}}{[\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)]^{\gamma_1}} z^k, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Также как и подразделе 2.1 формула Стирлинга (5) позволяет описать глобальное поведение функции $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma_1, -\gamma_2)}(z)$.

Лемма 2.2 Пусть параметры в ряде (15) таковы, что $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества

$$\mathcal{P}_1 \equiv \{(\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} : \exists k, \alpha_2 k + \beta_2 = 0, -1, -2, \dots\},$$

$\operatorname{Re} \gamma_j > 0$ $j = 1, 2$, и выполняются условия

$$\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) - \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2) > 0. \quad (16)$$

Тогда функция $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma_1, -\gamma_2)}(z)$ является целой функцией переменной z .

Теорема 2.3 Пусть параметры в ряде (15) таковы, что $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$, $\operatorname{Re} \gamma_j > 0$ $j = 1, 2$, и выполняются условия (16). Тогда порядок ρ и тип σ целой функции $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma_1, -\gamma_2)}(z)$ задаются следующими формулами:

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) - \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2)}, \quad (17)$$

$$\sigma = \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) - \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2)}{\exp \left\{ \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1 \cdot \log \alpha_1) - \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2 \cdot \log \alpha_2)}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma_1) - \operatorname{Re}(\alpha_2 \cdot \gamma_2)} \right\}}. \quad (18)$$

Функция $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma_1, -\gamma_2)}(z)$ имеет интегральное представление, аналогичное представлению (14).

Теорема 2.4 Пусть параметры в ряде (15) таковы, что $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$, $\operatorname{Re} \gamma_j > 0$ $j = 1, 2$, выполняются условия (13) и (16), а ветви многозначных функций $[\Gamma(\alpha_j s + \beta_j)]^{-\gamma_j}$, $j = 1, 2$, $(-z)^s$ описаны в Замечании 2.1.

Тогда для функции $F_{(\alpha, \beta)_2}^{(\gamma_1, -\gamma_2)}(z)$ справедливо следующее интегральное представление

$$F_{(\alpha, \beta)_2}^{\gamma_1, -\gamma_2}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{+\infty}} \frac{[\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]^{\gamma_2} \Gamma(-s) \Gamma(1+s)}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{\gamma_1}} (-z)^s ds + \frac{[\Gamma(\beta_2)]^{\gamma_2}}{[\Gamma(\beta_1)]^{\gamma_1}}, \quad (19)$$

где $\mathcal{L}_{+\infty}$ - петля в горизонтальной полуполосе правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, $\varphi_1 < \operatorname{Im} s < \varphi_2$, начинающаяся в точке $+\infty + i\varphi_1$ и заканчивающаяся в точке $+\infty + i\varphi_2$, $-\infty < \varphi_1 < 0 < \varphi_2 < +\infty$, пересекающая вещественную ось в точке c , $0 < c < 1$.

3 Обобщенные специальные функции логарифмического типа

Рассмотрим следующее обобщение функции Ле Руа (3)

$$L_{(\alpha, \beta)_2}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log [\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)] z^k}{[\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)]^{\gamma}}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (20)$$

Здесь, также как и в разделе 2, будем предполагать, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$.

Формулы Стирлинга (5) и (6) позволяют описать глобальное поведение функции $L_{(\alpha, \beta)_2}^{\gamma}(z)$.

Лемма 3.1 Пусть параметры в ряде (20) таковы, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$ и выполняются условия

$$\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma) > 0. \quad (21)$$

Тогда функция $L_{(\alpha, \beta)_2}^\gamma(z)$ является целой функцией переменной z .

Proof. Действительно, радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ определяется формулой

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}.$$

В условиях леммы применим варианты формулы Стирлинга (5) и (6)

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\log \Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)|}{|\log \Gamma(\alpha_2(k+1) + \beta_2)|} \frac{|[\Gamma(\alpha_1(k+1) + \beta_1)]^\gamma|}{|[\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)]^\gamma|} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k (1 + O(\frac{1}{k}))}{(k+1) \log(k+1) (1 + O(\frac{1}{k}))} \left| [(\alpha_1 k)^{\alpha_1}]^\gamma \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| (\alpha_1)^{\alpha_1 \cdot \gamma} k^{i \operatorname{Im}(\alpha_1 \cdot \gamma)} k^{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)} \right| = +\infty. \end{aligned}$$

□

Лемма 3.2 Пусть параметры в ряде (20) таковы, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$ и выполняются условия (21). Тогда порядок ρ и тип σ целой функции $L_{(\alpha, \beta)_2}^\gamma(z)$ задаются следующими формулами:

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)}, \quad (22)$$

$$\sigma = \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)}{\exp \left\{ \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \log \alpha_1 \cdot \gamma)}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)} \right\}}. \quad (23)$$

Proof. Действительно,

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\gamma \Gamma(\alpha_1 k + \beta_1) - \log \log \Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)}.$$

Тогда из асимптотической формулы (5) вытекает соотношение (22).

Из (10), (22) и формулы Стирлинга (5) также вытекает формула (23), которая аналогична формуле (12). Заметим, что при $\gamma > 0$ формула (23) упрощается

$$\sigma = \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)}{\exp \left\{ \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \log \alpha_1)}{\operatorname{Re}(\alpha_1)} \right\}},$$

а при $\alpha_1, \gamma > 0$ формулы (22), (23) приобретают вид

$$\rho = \frac{1}{\alpha_1 \cdot \gamma}, \sigma = \gamma.$$

□

Замечание 3.1 (ветви многозначных функций) Функции $\Gamma(\alpha_j s + \beta_j)$, $j = 1, 2$, являются мероморфными функциями переменной s с простыми полюсами $s = -\frac{\beta_j + n}{\alpha_j}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, из представления [7, (5.8.2)]

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{-\frac{z}{k}}$$

вытекает, что функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей в комплексной плоскости.

Следовательно, точки $s = -\frac{\beta_1 + n}{\alpha_1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ - единственно возможные точки ветвления (степенного типа) многозначной функции $[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{-\gamma}$, а точки $s = -\frac{\beta_2 + n}{\alpha_2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ - единственно возможные точки ветвления (логарифмического типа) многозначной функции $\log[\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]$. Зафиксируем главную ветвь каждой многозначной функции $[\Gamma(\alpha_j s + \beta_j)]^{-\gamma_j}$ в комплексной плоскости, разрезанной вдоль луча $-\operatorname{Im} \frac{\beta_j}{\alpha_j}$ от точки $-\frac{\beta_j}{\alpha_j}$ до $-\frac{\beta_j}{\alpha_j} + \operatorname{sign}(\alpha_j) \cdot \infty$. Условие (13) гарантирует существование чисел $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$ таких, что указанные разрезы не пересекают полуполосу $\operatorname{Res} > 0$, $\varphi_1 < \operatorname{Im} s < \varphi_2$. Определим также значения многозначной функции

$(-z)^s$, определенной на комплексной плоскости s для каждого фиксированного z , разрезанной вдоль отрицательной полуоси, следующими равенствами

$$(-z)^s = \exp\{s[\log |z| + i \arg(-z)]\},$$

где $\arg(-z)$ - любая фиксированная ветвь многозначной функции $\text{Arg}(-z)$.

По аналогии с Теоремой 2.2 устанавливается следующая

Теорема 3.1 Пусть параметры в ряде (20) таковы, что $\text{Re } \gamma > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$ и выполняются условия (21), а ветви многозначных функций $[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{-\gamma}$, $\log[\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]$, $(-z)^s$ описаны в Замечании 3.1.

Тогда для функции $L_{(\alpha, \beta)_2}^\gamma(z)$ справедливо следующее интегральное представление

$$L_{(\alpha, \beta)_2}^\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{+\infty}} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s) \log[\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^\gamma} (-z)^s ds + \frac{\log[\Gamma(\beta_2)]}{[\Gamma(\beta_1)]^\gamma}, \quad (24)$$

где $\mathcal{L}_{+\infty}$ - петля в горизонтальной полуполосе правой полуплоскости $\text{Res} > 0$, $\varphi_1 < \text{Im } s < \varphi_2$, начинающаяся в точке $+\infty + i\varphi_1$ и заканчивающаяся в точке $+\infty + i\varphi_2$, $-\infty < \varphi_1 < 0 < \varphi_2 < +\infty$, пересекающая вещественную ось в точке c , $0 < c < 1$.

4 Обобщенные специальные функции с производными

При вычислении производных обобщенных функций типа Миттаг-Деффлера и типа Ле Руа относительно их параметров возникают новые специальные функции, имеющие следующий вид

$$E_{\alpha_1, \beta_1}^{(\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(\alpha_2 k + \beta_2)}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)} z^k, \quad (25)$$

$$F_{\alpha_1, \beta_1}^{\gamma, (\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(\alpha_2 k + \beta_2)}{[\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)]^\gamma} z^k, \quad (26)$$

где $\psi(z)$ - логарифмическая производная функции $\Gamma(z)$, т.е. $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ (или дигамма-функция [7, (5.9)]).

Из представления

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

вытекает, что функция $\psi(z)$ является мероморфной в комплексной плоскости с бесконечным множеством простых полюсов в точках $z = 0, -1, -2, \dots$ и бесконечным множеством простых нулей $z_0 \in (1, 4; 1, 5)$, $z_k \in (-k-1; -k)$, $k = 1, 2, \dots$

Известно (см., например, [9]), что при $x > 0$ функция $\psi(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\ln \left(x + \frac{1}{2}\right) < \psi(x+1) < \ln(x + e^{-\gamma}), \quad (27)$$

где $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$ - постоянная Эйлера-Маскерони. Для любых фиксированных $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 \geq 0$ справедливо $\alpha_1 k + \beta_1 > 0$. Поэтому из (27) вытекает следующая асимптотическая формула

$$\psi(\alpha_1 k + \beta_1) \sim \ln(k(1 + o(1))), \quad k \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Аналогичная асимптотическая формула [7, (5.11.2)]

$$\psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k z^{2k}}, \quad z \rightarrow \infty,$$

где B_{2k} - числа Бернулли [7, §24.2], имеет место и при любых z , $|\arg z| < \pi - \varepsilon$ и любых достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Следовательно, при $\operatorname{Re} \gamma > 0$ поведение рядов (25), (26) полностью определяется свойствами гамма-функций в знаменателях коэффициентов рядов. Иными словами выполняются следующие утверждения.

Лемма 4.1 Пусть параметры в рядах (25), (26) таковы, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$.

Если выполняется условие

$$\operatorname{Re}(\alpha_1) > 0, \quad (29)$$

то функция $E_{\alpha_1, \beta_1}^{(\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z)$ является целой функцией переменной z .

Если выполняется условие

$$\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma) > 0, \quad (30)$$

то функция $F_{\alpha_1, \beta_1}^{\gamma, (\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z)$ является целой функцией переменной z .

Лемма 4.2 Пусть параметры в рядах (25), (26) таковы, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$.

При выполнении условия (29) порядок ρ и тип σ целой функции $E_{\alpha_1, \beta_1}^{(\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z)$ задаются следующими формулами:

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_1)}, \quad (32)$$

$$\sigma = \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1)}{\exp \left\{ \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \log \alpha_1)}{\operatorname{Re}(\alpha_1)} \right\}}. \quad (33)$$

При выполнении условия (30) порядок ρ и тип σ целой функции $F_{\alpha_1, \beta_1}^{\gamma, (\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z)$ задаются следующими формулами:

$$\rho = \frac{1}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)}, \quad (34)$$

$$\sigma = \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)}{\exp \left\{ \frac{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \log \alpha_1 \cdot \gamma)}{\operatorname{Re}(\alpha_1 \cdot \gamma)} \right\}}. \quad (35)$$

Замечание 4.1 (ветви многозначных функций) Функции $\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)$ являются мероморфной функцией переменной s с простыми полюсами $s = -\frac{\beta_1 + n}{\alpha_1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и не имеет нулей в комплексной плоскости, а функция $\psi(z)$ является мероморфной в комплексной плоскости с бесконечным множеством простых полюсов в точках $z = 0, -1, -2, \dots$ и бесконечным множеством простых нулей $z_0 \in (1, 4; 1, 5)$, $z_k \in (-k - 1, -k)$, $k = 1, 2, \dots$

Следовательно, точки $s = -\frac{\beta_1 + n}{\alpha_1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ - единственно возможные точки ветвления (степенного типа) многозначной функции $[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{-\gamma}$. Зафиксируем главную ветвь многозначной функции $[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{-\gamma}$ в комплексной плоскости, разрезанной вдоль луча $-\operatorname{Im} \frac{\beta_j}{\alpha_j}$ от точки $-\frac{\beta_j}{\alpha_j}$ до $-\frac{\beta_j}{\alpha_j} + \operatorname{sign}(\alpha_j) \cdot \infty$. Условие (13) гарантирует существование чисел $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$ таких, что указанные разрезы не пересекают полуполосу $\operatorname{Re} s > 0$, $\varphi_1 < \operatorname{Im} s < \varphi_2$. Определим также значения многозначной функции $(-z)^s$, определенной на комплексной плоскости s для каждого фиксированного z , разрезанной вдоль отрицательной полуоси, следующими равенствами

$$(-z)^s = \exp\{s[\log |z| + i \arg(-z)]\},$$

где $\arg(-z)$ - любая фиксированная ветвь многозначной функции $\operatorname{Arg}(-z)$.

По аналогии с Теоремой 2.2 устанавливается следующая

Теорема 4.1 Пусть параметры в рядах (25), (26) таковы, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, а (α_2, β_2) принимают значения вне исключительного множества $\mathcal{P}_1$.

Если выполнены условия (29), то функция $E_{\alpha_1, \beta_1}^{(\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z)$ имеет следующее интегральное представление

$$E_{\alpha_1, \beta_1}^{(\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L} + \infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)\psi(\alpha_2 s + \beta_2)}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]} (-z)^s ds + \frac{\psi(\beta_2)}{[\Gamma(\beta_1)]}. \quad (36)$$

Если выполнены условия (29), а ветви многозначной функции $[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^{-\gamma}$, $\log[\Gamma(\alpha_2 s + \beta_2)]$, $(-z)^s$ описаны в Замечании 4.1, то функция $F_{\alpha_1, \beta_1}^{\gamma, (\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z)$ имеет следующее интегральное представление

$$F_{\alpha_1, \beta_1}^{\gamma, (\psi; \alpha_2, \beta_2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L} + \infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s)\psi(\alpha_2 s + \beta_2)}{[\Gamma(\alpha_1 s + \beta_1)]^\gamma} (-z)^s ds + \frac{\psi(\beta_2)}{[\Gamma(\beta_1)]^\gamma}. \quad (37)$$

В представлениях (36), (37) $\mathcal{L}_{+\infty}$ - петля в горизонтальной полуполосе правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, $\varphi_1 < \operatorname{Im} s < \varphi_2$, начинающаяся в точке $+\infty + i\varphi_1$ и заканчивающаяся в точке $+\infty + i\varphi_2$, $-\infty < \varphi_1 < 0 < \varphi_2 < +\infty$, пересекающая вещественную ось в точке c , $0 < c < 1$.

5 Заключение

В данной статье введены новые специальные функции, обобщающие известные функции Миттаг–Леффлера и Ле Руа. Установлены некоторые аналитические свойства этих новых функций. Общим для них является возможность представления в виде аналогов интегралов Меллина–Барнса. В дальнейшем предполагается продолжение исследования свойств новых специальных функций. Поскольку функции Миттаг–Леффлера и Ле Руа имеют достаточно широкий спектр приложений, то есть надежда, что будут найдены подобные приложения и для новых специальных функций.

Благодарности.

Работа выполнена при частичной поддержке проекта 1.7.01.4 программы “Конвергенция–2025”.

Литература

1. Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., Rogosin, S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, 2nd ed. Berlin: Springer, 2020. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61550-8>
2. Garrappa, R., Rogosin, S., Mainardi, F. *On a generalized three-parameter Wright function of Le Roy type* // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2017. V. 20, № 5. С. 1196–1215. <https://doi.org/10.1515/fca-2017-0063>.
3. Rogosin, S., Dubatovskaya, M. *Multi-parametric Le Roy function* // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2023. V. 26, № 1. С. 54–69. <https://doi.org/10.1007/s13540-022-00119-y>
4. Rogosin, S., Dubatovskaya, M. *Multi-parametric Le Roy function revisited* // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2024. V. 27, № 1. С. 64–81. <https://doi.org/10.1007/s13540-023-00221-9>
5. Levin, B. Ya. *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Rhode Island, Providence: AMS, 1980 (2nd printing) [первое издание - Москва: Наука, 1956.]
6. Paris, R. B., Kaminski, D. *Asymptotic and Mellin-Barnes Integrals*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546662>
7. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Edited by Frank W.J. Olver (editor-in-chief), D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark. Gaithersburg, Maryland, National Institute of Standards and Technology, and New York, Cambridge University Press, 951 + xv pages and a CD, (2010)
8. Rogosin, S., V., Giraldo, F., Mainardi, F. *On differentiation with respect to parameters of the functions of the Mittag-Leffler type* // *Integral Transforms and Special Functions*, published on-line 19 Nov 2024. <https://doi.org/10.1080/10652469.2024.2428850>
9. Alzer, H. *On some inequalities for the Gamma and Psi functions* // *Mathematics of Computation*. 1997. V. 66 (217), 373–389. doi:10.1090/S0025-5718-97-00807-7

УДК 517.968.7

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, СВЯЗАННОЕ СО СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕЙ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

А. П. Шилин

e-mail: a.p.shilin@gmail.com

Рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения являются постоянными. Особенность уравнения в том, что наряду с гиперсингулярными интегралами оно содержит регулярные интегралы с комплексно-сопряженной искомой функцией. Сначала уравнение сводится к смешанной краевой задаче Римана–Гильберта для аналитических функций. После решения задачи Римана–Гильберта решаются линейные дифференциальные уравнения с дополнительными условиями. Указываются в явном виде условия разрешимости исходного уравнения. При их выполнении решение дается в замкнутой форме. Приводится пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; гиперсингулярный интеграл; задача Римана–Гильберта.

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION RELATED TO THE MIXED RIEMANN–HILBERT PROBLEM

A. P. Shilin

e-mail: a.p.shilin@gmail.com

We consider a linear integro-differential equation on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation are constant. The peculiarity of the equation is that, along with hypersingular integrals, it contains regular integrals with the complex conjugate of the unknown function. The equation is first reduced to a mixed Riemann–Hilbert boundary value problem for analytic functions. After solving the Riemann–Hilbert problem, it is solved linear differential equations with additional conditions. Solvability conditions for the of the original equation are defined in an explicit form. When they are satisfied, the solution is given in a closed form. An example is given.

Keywords: integro-differential equation; hypersingular integral; Riemann–Hilbert problem.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 45J05, Secondary 30E25.

1 Введение

Пусть L — простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Обозначим D_+ и D_- соответственно внутренность и внешность этой кривой. Зададим комплексные числа a_k , b_k , $k = \overline{0, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \pm b_n \neq 0$. Зададим также H -непрерывную (т.е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $h(t)$, $t \in L$. Искомой будет в дальнейшем n раз H -непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t)$, $t \in L$.

Для предельных значений на кривой L интеграла типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm},$$

и его производных справедливы полученные в [1] обобщенные формулы Сохоцкого

$$\Phi_{\pm}^{(k)}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad k = \overline{0, n}, \quad t \in L, \quad (1)$$

частным случаем которых при $k = 0$ являются классические формулы Сохоцкого. Гиперсингулярные интегралы в формулах (1) понимаются в смысле конечной части по Адамару, что согласно [1] приводит для их вычисления к формулам

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} = \frac{\pi i \varphi^{(k)}(t)}{k!} + \int_L \frac{\varphi(\tau) - \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(t)}{j!} (\tau - t)^j}{(\tau - t)^{k+1}} d\tau,$$

в правых частях которых интегралы сходятся в обычном смысле. При $k = 0$ получится то же, что и для интеграла в смысле главного значения по Коши.

В [2] с использованием формул (1) решено в замкнутой форме уравнение

$$\sum_{k=0}^n \left(a_k \varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right) = h(t), \quad t \in L. \quad (2)$$

В настоящей работе укажем решение уравнения вида (2) в случае, когда в левую часть добавляются также регулярные интегралы с искомой функцией. В интегральных уравнениях с сингулярными интегралами подобные добавки (такие уравнения называются полными) совсем в немногих случаях позволяют получить точное аналитическое решение. Случаи решения уравнений с гиперсингулярными и регулярными интегралами ("полные гиперсингулярные уравнения"), видимо, вообще ранее не указывались. Отметим еще, что есть несколько работ (напр., [3–5]), в которых уравнение вида (2) решено для частных случаев переменных коэффициентов a_k , b_k .

2 Исходное уравнение и его связь с краевой задачей

Пусть теперь кривая L расположена целиком либо выше, либо ниже действительной оси. Пусть также справедливы равенства

$$\operatorname{Im} a_k = \operatorname{Im} b_k, \quad k = \overline{0, n}. \quad (3)$$

Будем решать уравнение

$$\sum_{k=0}^n \left(a_k \varphi^{(k)}(t) + \frac{b_k k!}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau} - t)^{k+1}} \right) \right) = h(t), \quad t \in L. \quad (4)$$

где σ — дуговая абсцисса кривой L (натуральный параметр).

Обозначим $\overline{D_+}$ и $\overline{L}$ область и кривую, симметричные относительно действительной оси соответственно области D_+ и кривой L , а $D_c = D_- \setminus (\overline{L} \cup \overline{D_+})$ — область, обладающую симметрией относительно действительной оси. Введем функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{\overline{\tau} - z} = \begin{cases} \Psi_+(z), & z \in D_+, \\ \Psi_c(z), & z \in D_c. \end{cases}$$

Функция $\Psi_+(z)$ будет аналитической в области D_+ , а функция $\Psi_c(z)$ будет аналитической в области D_c и обладать там свойством симметрии $\Psi_c(z) = \overline{\Psi_c(\overline{z})}$. Для предельных значений $\Psi_+(t)$, $\Psi_c(t)$ этих функций и их производных можно записать формулы

$$\Psi_+^{(k)}(t) = \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau} - t)^{k+1}}, \quad (5)$$

$$\Psi_c^{(k)}(t) = -\frac{1}{2} \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau} - t)^{k+1}}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (6)$$

которые получаются после использования обобщенных формул Сохоцкого (1) для интеграла с $\varphi(\tau)$ и дифференцирования под знаком интеграла регулярного интеграла с $\overline{\varphi(\tau)}$. Вычитая и складывая формулы (5) и (6), получим

$$\varphi^{(k)}(t) = \Psi_+^{(k)}(t) - \Psi_c^{(k)}(t), \quad (7)$$

$$\frac{k!}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau} - t)^{k+1}} \right) = \Psi_+^{(k)}(t) + \Psi_c^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, n},$$

что позволяет придать уравнению (4) вид краевой задачи для аналитических функций

$$\sum_{k=0}^n \left(a_k \left(\Psi_+^{(k)}(t) - \Psi_c^{(k)}(t) \right) + b_k \left(\Psi_+^{(k)}(t) + \Psi_c^{(k)}(t) \right) \right) = h(t), \quad t \in L,$$

или

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) \Psi_+^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) \Psi_c^{(k)}(t) = h(t), \quad t \in L. \quad (8)$$

Первая сумма в левой части равенства (8) является предельным значением на кривой L функции $Y_+(z) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) \Psi_+^{(k)}(z)$, аналитической в D_+ . Вторая сумма является предельным значением аналитической в D_c функции $Y_c(z) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) \Psi_c^{(k)}(z)$, $Y_c(\infty) = 0$. Учитывая тот факт, что дифференцирование сохраняет свойство симметрии функций, и принимая во внимание равенства (3), заключаем, что функция $Y_c(z)$ обладает свойством симметрии $Y_c(z) = \overline{Y_c(\bar{z})}$ относительно действительной оси. Краевая задача (8), которую теперь можно записать в виде

$$Y_+(t) - Y_c(t) = h(t), \quad t \in L,$$

относится к типу смешанных краевых задач Римана–Гильберта. Из результатов [6], где такая задача возникла и была решена в более общем виде, вытекает ее безусловная разрешимость, а также формулы единственного решения

$$Y_+(z) = H_+(z), \quad Y_c(z) = H_c(z),$$

в которых

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h(\tau) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{h(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{\bar{\tau} - z} = \begin{cases} H_+(z), & z \in D_+, \\ H_c(z), & z \in D_c. \end{cases}$$

Если обозначить

$$H_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_-,$$

то можно будет в дальнейшем использовать формулу

$$H_c(z) = H_-(z) + \overline{H_-(\bar{z})}, \quad z \in D_c. \quad (9)$$

Теперь следует решать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) \Psi_+^{(k)}(z) = H_+(z), \quad z \in D_+, \quad (10)$$

$$\sum_{k=0}^n (a_k - b_k) \Psi_c^{(k)}(z) = H_c(z), \quad z \in D_c, \quad \Psi_c(\infty) = 0, \quad (11)$$

и в случае нахождения их решений воспользоваться формулой (7) при $k = 0$:

$$\varphi(t) = \Psi_+(t) - \Psi_-(t), \quad t \in L. \quad (12)$$

3 Решение дифференциальных уравнений

Решение уравнения (10), полученное методом вариации произвольных постоянных, имеет вид

$$\Psi_+(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z) \left(C_j + \int_{z_0}^z \frac{W_j(\zeta) d\zeta}{W(\zeta)} \right) \quad (13)$$

и относится к классическим математическим результатам (напр., [7], с. 94). В формуле (13) $C_j \in \mathbb{C}$, функции $f_j(z)$, явный вид которых известен и здесь не приводится, образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, $z_0 \in D_+$, интегрирование ведется по любой кривой в области D_+ , $W(\zeta)$ — вронскиан функций $f_j(\zeta)$, $W_j(\zeta)$ — определители, получаемые

из $W(\zeta)$ заменой элементов j -го столбца на $0, 0, \dots, 0, \frac{H_+(\zeta)}{a_n + b_n}, j = \overline{1, n}$. Отметим, что в частности, когда корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ соответствующего характеристического многочлена являются однократными, формулу (13) можно упростить (см. [8]):

$$\Psi_+(z) = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j z} \left(C_j + \frac{(-1)^{n+1}}{(a_n + b_n) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (\lambda_m - \lambda_j)} \int_{z_0}^z e^{-\lambda_j \zeta} H_+(\zeta) d\zeta \right).$$

(При $n = 1$ произведение $\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (\lambda_m - \lambda_j)$ следует заменить на 1.)

Решение уравнения (11) требует более подробных рассуждений. Пусть γ_k — действительные корни характеристического многочлена этого уравнения, имеющие соответствующие кратности $m_k, k = \overline{1, m}$, а $\alpha_k \pm i\beta_k$ ($\beta_k > 0$) — пары комплексно-сопряженных корней характеристического многочлена, имеющие соответствующие кратности $s_k, k = \overline{1, l}, \sum_{k=1}^m m_k + 2 \sum_{k=1}^l s_k = n$. Тогда фундаментальную систему решений однородного уравнения (11) образуют функции

$$z^p e^{\gamma_k z}, p = \overline{0, m_k - 1}, k = \overline{1, m}; z^q e^{\alpha_k z} \cos \beta_k z, z^q e^{\alpha_k z} \sin \beta_k z, q = \overline{0, s_k - 1}, k = \overline{1, l}. \quad (14)$$

Все эти функции обладают свойством симметрии в $\mathbb{C}$ относительно действительной оси и имеют существенно особую точку на бесконечности. Для дальнейшего как-либо занумеруем все эти функции и будем обозначать $g_j(z), j = \overline{1, n}$. Из-за линейной независимости этих функций всякая линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^n R_j g_j(z)$$

будет также иметь на бесконечности существенно особую точку при ненулевом наборе значений действительных постоянных R_j . Следовательно, однородное уравнение (11) имеет лишь нулевое решение, а ненулевым может оказаться разве что частное решение неоднородного уравнения. Это частное решение записывается по формуле

$$\Psi_c(z) = \sum_{j=1}^n g_j(z) \left(R_j + \int_0^z \frac{U_j(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)} \right), \quad (15)$$

аналогичной формуле (13), где действительные постоянные R_j подлежат нахождению. В формуле (15) $U(\zeta)$ — вронскиан функций $g_j(\zeta)$, а $U_j(\zeta)$ — определители, получаемые из $U(\zeta)$ заменой элементов j -го столбца на $0, 0, \dots, 0, \frac{H_c(\zeta)}{a_n - b_n}, j = \overline{1, n}$. Интегрирование в формуле (15) происходит по любой кривой, принадлежащей области D_c . В отличие от интегралов в (13), где интегрирование ведется по кривым в конечной односвязной области и приводит к однозначным функциям, здесь кривые интегрирования принадлежат бесконечной двусвязной области, поэтому следует наложить ограничения, приводящие к однозначности функции $\Psi_c(z)$. Такими ограничениями будут требования выполнения условий

$$\int_L \frac{U_j(t) dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (16)$$

$$\int_{\overline{L}} \frac{U_j(t) dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (17)$$

С учетом (9) равенствам (16) придадим вид

$$\int_L \frac{(H_-(t) + \overline{H_-(\bar{t})}) M_j(t) dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (18)$$

где $M_j(t)$ — миноры определителей $U_j(t)$, полученные из них вычеркиванием j -го столбца и n -ой строки. (При $n = 1$ следует брать $M_1(t) = 1$.) Поскольку элементы определителей $M_j(z)$ и

$U(z)$ состоят из симметричных функций вида (14), то функции $\frac{M_j(z)}{U(z)}$ будут аналитическими в $\mathbb{C}$ и удовлетворять там условию симметрии. Равенства

$$\int_L \frac{\overline{H_-(\bar{t})} M_j(t) dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

справедливы согласно интегральной теореме Коши, поскольку подынтегральные функции аналитически продолжимы в области D_+ . Для выполнения равенств (18) теперь требуется, чтобы

$$\int_L \frac{H_-(t) M_j(t) dt}{U(t)} = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

что, очевидно, равносильно равенствам

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{H_-(z) M_j(z)}{U(z)} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Аналогично будет получаться, что равенства (17) сводятся к равенствам

$$\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{\overline{H_-(\bar{z})} \overline{M_j(\bar{z})}}{\overline{U(\bar{z})}} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Так как вычеты на бесконечности функций $\frac{H_-(z) M_j(z)}{U(z)}$ и $\frac{\overline{H_-(\bar{z})} \overline{M_j(\bar{z})}}{\overline{U(\bar{z})}}$ являются комплексно-сопряженными числами, то равенства (19) и (20) окажутся равносильными. Итак, для однозначности функций (15) необходимо и достаточно выполнения условий (19), что мы будем в дальнейшем предполагать. Отметим еще, что первообразные в формуле (15) в виде $\int_0^z$ от симметричных функций сами являются симметричными функциями.

Осталось добиться у функции (15) аналитичности на бесконечности с условием $\Psi_c(\infty) = 0$. Для этого разложим функцию (15) в ряд Лорана в окрестности бесконечности и приравняем к нулю соответствующие коэффициенты. В результате придем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для нахождения постоянных R_j

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{kj} R_j = \beta_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

где

$$\alpha_{kj} = \int_{|t|=\rho} \frac{g_j(t) dt}{t^k}, \quad \beta_k = - \sum_{j=1}^n \int_{|t|=\rho} \frac{g_j(t) dt}{t^k} \int_0^t \frac{U_j(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)},$$

ρ — достаточно большое положительное число.

Не будем останавливаться на несложном обосновании того, что ранг бесконечной матрицы системы (21) равен n : ее минор хотя бы из первых n строк уже будет отличен от нуля. Следовательно, система имеет не более одного решения.

4 Формулировка результата. Пример

Теперь может быть сформулирован результат исследования.

Теорема. Для разрешимости уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (19) и была совместна система (21). Если эти условия выполняются, то искомая функция вычисляется по формуле

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n \left(f_j(t) \left(C_j + \int_{z_0}^t \frac{W_j(\zeta) d\zeta}{W(\zeta)} \right) - g_j(t) \left(R_j + \int_0^t \frac{U_j(\zeta) d\zeta}{U(\zeta)} \right) \right),$$

где C_j — произвольные комплексные постоянные, а действительные постоянные R_j являются решением системы (21).

Приведем пример уравнения (4) в случае $n = 1$, $i \in D_+$:

$$(4 - i)\varphi(t) + \left(\frac{3}{2} + i \right) \varphi'(t) + \frac{2 - i}{\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{\bar{\tau} - t} \right) +$$

$$+\frac{1+2i}{2\pi i} \left(\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} - \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau}-t)^2} \right) = \frac{2it+2-i}{2(t-i)^2}, \quad t \in L.$$

Без вычисления квадратур несложно найти представление

$$\frac{2it+2-i}{2(t-i)^2} = \frac{2it-2-i}{2(t+i)^2} - \frac{2(t^2-t+1)}{(t^2+1)^2},$$

и тогда, очевидно,

$$H_+(t) = \frac{2it-2-i}{2(t+i)^2}, \quad H_c(t) = \frac{2(t^2-t+1)}{(t^2+1)^2}.$$

Уравнение (10) принимает вид

$$(2+2i)\Psi'_+(z) + (6-2i)\Psi_+(z) = \frac{2iz-2-i}{2(z+i)^2},$$

или

$$\Psi'_+(z) + (1-2i)\Psi_+(z) = \frac{2iz-2-i}{4(1+i)(z+i)^2},$$

откуда

$$\Psi_+(z) = e^{(2i-1)z} \left(\int_{z_0}^z \frac{(2i\zeta-2-i)e^{(1-2i)\zeta} d\zeta}{4(1+i)(\zeta+i)^2} + C \right), \quad C \in \mathbb{C}.$$

Уравнение (11) примет вид

$$\Psi'_c(z) + 2\Psi_c(z) = \frac{2(z^2-z+1)}{(z^2+1)^2}$$

и имеет решение

$$\Psi_c(z) = e^{-2z} \left(\int_0^z \frac{2(\zeta^2-\zeta+1)e^{2\zeta} d\zeta}{(\zeta^2+1)^2} + R \right), \quad R \in \mathbb{R}.$$

Последний интеграл удастся вычислить:

$$\int_0^z \frac{2(\zeta^2-\zeta+1)e^{2\zeta} d\zeta}{(\zeta^2+1)^2} = \frac{e^{2z}}{z^2+1} - 1,$$

поэтому

$$\Psi_c(z) = \frac{1}{z^2+1} + (R-1)e^{-2z}.$$

Полагая $R=1$, получаем решение $\Psi_c(z) = \frac{1}{z^2+1}$ с условием $\Psi_c(\infty) = 0$. Из-за возможной единственности такого решения записывать и анализировать систему вида (21) здесь не требуется. Окончательно получим в примере

$$\varphi(t) = e^{(2i-1)t} \left(\int_{z_0}^t \frac{(2i\zeta-2-i)e^{(1-2i)\zeta} d\zeta}{4(1+i)(\zeta+i)^2} + C \right) - \frac{1}{t^2+1}.$$

5 Заключительные замечания

Отметим любопытный факт. Если в линейном уравнении наряду с искомой функцией содержится ее комплексно-сопряженное значение, то произвольные постоянные, входящие в решение, являются обычно действительными, поскольку в этом случае линейная независимость решений однородного уравнения понимается над полем действительных чисел. Произвольные постоянные, входящие в решение уравнения (4), остаются комплексными, поскольку в формуле (12) они содержатся лишь в $\Psi_+(t)$. При $t \in L$ будет $\bar{t} \in D_-$ и по свойству интегралов Коши получится

$$\int_L \frac{\overline{\Psi_+(\tau)} \overline{(\tau'(\sigma))^2} d\tau}{(\overline{\tau}-t)^{k+1}} = \overline{\int_L \frac{\Psi_+(\tau)d\tau}{(\tau-\bar{t})^{k+1}}} = 0.$$

В результате окажется, что слагаемые с $\overline{\varphi(\tau)}$, содержащиеся в уравнении, не влияют на слагаемые с произвольными комплексными постоянными, содержащимися в формуле (12) для решения. Отметим еще, что наличие H -непрерывных производных до порядка n включительно у функций $\Psi_+(t)$ и $\Psi_c(t)$ (а тогда и у искомой функции $\varphi(t)$) обосновывается несложно и вполне аналогично [4].

Литература

1. Зверович, Э. И. *Обобщение формул Соболевского* // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 24–28.
2. Зверович, Э. И. *Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами* // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. 2010. Т. 54, № 6. С. 5–8.
3. Зверович, Э. И., Шилин, А. П. *Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида* // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2018. Т. 54, № 4. С. 404–407. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>
4. Шилин, А. П. *Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах* // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58, № 4. С. 358–369. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369>
5. Shilin, A. P. *Hypersingular Integro-Differential Equation Containing Polynomials and Their Derivatives in Coefficients* // Mathematics. 2023. MDPI. V. 11(24). P.1–19. <https://doi.org/10.3390/math11244940>
6. Шилин, А. П. *Сингулярное интегральное уравнение с сопряжением в регулярной части* // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1998. № 3. С. 52–54.
7. Камке, Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, 6-е издание. СПб.: Лань, 2003.
8. Шилин, А. П. *Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах* // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 48–56. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56>

УДК 517.925.7

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ
ЛОГАРИФМИЗАЦИИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Л. А. Хвощинская

e-mail: ludmila.ark@gmail.com

В работе «метод логарифмизации произведения двух матриц» для решения проблемы Римана–Гильберта распространен на случай произведения произвольного числа матриц второго порядка. С помощью этого метода построено дифференциальное уравнение класса Фукса с $n+1$ особыми точками, в котором найдены все элементы матриц-вычетов уравнения. Приведены примеры задач, для решения которых применяются полученные результаты.

Ключевые слова: проблема Римана–Гильберта; группа монодромии; каноническая матрица краевой задачи Римана; метод логарифмизации; дифференциальное уравнение класса Фукса; матрицы-вычеты.

SOLUTION OF THE RIEMANN PROBLEM FOR TWO FUNCTIONS BY THE
METHOD OF LOGARIFMIZATION THE PRODUCT OF MATRICES

L. A. Khvoshchinskaya

e-mail: ludmila.ark@gmail.com

In the paper “the method of logarithmization of the product of two matrices” for solving the Riemann–Hilbert problem is extended to the case of the product of an arbitrary number of second-order matrices. Using this method, a differential equation of the Fuchs type with $n+1$ singular points is constructed, in which all elements of the residue matrices of the equation are found. Examples of problems are given for the solution of which the obtained results are applied.

Keywords: Riemann–Hilbert problem; monodromy group; canonical matrix of the Riemann boundary value problem; logarithmization method; differential equation of the Fuchs type; residue matrices.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 34M50, Secondary 30E25.

1 Введение

В 1857 году Б. Риман поставил следующую задачу [1]. Необходимо найти систему функций $Y(z) = (y_1(z), \dots, y_m(z))$, обладающую 3-мя свойствами:

1. Функции аналитичны всюду в $\hat{\mathbb{C}}$, за исключением конечного числа точек $a_1, a_2, \dots, a_n$;
2. При обходе вокруг каждой особой точки a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функция $Y(z)$ испытывает линейное преобразование с помощью постоянной невырожденной матрицы V_k , т.е. $Y \rightarrow V_k Y$, $V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_n = E$;
3. В каждой особой точке a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) функции $y_1(z), y_2(z), \dots, y_m(z)$ могут обращаться в бесконечность конечного порядка.

Матрицы $V_1, V_2, \dots, V_n$ образуют группу монодромии.

Б. Риман также указал, что функции $y_1, \dots, y_m$ будут решениями дифференциального уравнения m -го порядка с рациональными коэффициентами (дифференциального уравнения класса Фукса). В матричной форме уравнение класса Фукса с n особыми точками имеет вид

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^n \frac{U_k}{z - a_k}, \quad (1)$$

матрицы U_k , $k = 1, 2, \dots, n$, называются дифференциальными подстановками или матрицами-вычетами, причем $U_k \sim \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, матрицы $W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$ называются показательными подстановками.

Проблема построения дифференциального уравнения Фукса с заданной группой монодромии в 1900 году была включена Гильбертом в список 23-х математических задач XX века. В дальнейшем эту задачу стали называть «проблемой Римана-Гильберта».

Решением проблемы Римана-Гильберта занимались многие выдающиеся математики: Племель, Гильберт, Карлерман, Лаппо-Данилевский, Гахов, Мухелишвили, Векуа, Еругин, Болибрух и др. [2]. Такие задачи встречаются в приложениях: гидромеханике, электростатике, теории упругости, теории конформных отображений. Были предложены различные методы решения проблемы Римана-Гильберта. Несмотря на то, что с момента постановки проблемы Римана-Гильберта прошло более 160 лет, до конца она не решена. В 2015 году для системы двух функций был предложен «метод логарифмизации произведения матриц» второго порядка, который оказался эффективным при решении задач с тремя, четырьмя и пятью особыми точками и матрицами произвольного вида [3,4,5], а также при решении одной прикладной задачи с шестью особыми точками [6]. Покажем, как применить этот метод к решению проблемы Римана-Гильберта для двух функций с любым числом особых точек.

2 Проблема Римана-Гильберта и краевая задача Римана. Каноническая матрица задачи

Проблему Римана-Гильберта можно сформулировать в виде краевой задачи Римана теории аналитических функций. Проведем через особые точки $a_1, a_2, \dots, a_n$ простой замкнутый контур. Тогда при обходе точки a_k неизвестные функции преобразуются следующим образом:

$$Y^+ \rightarrow V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_k \cdot Y^+ = Y^-.$$

Приходим к краевому условию

$$Y^+(t) = A_k \cdot Y^-(t), \quad t \in (a_k, a_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n, \quad a_{n+1} = a_1, \quad A_k = (V_1 \cdots V_k)^{-1}, \quad A_n = E.$$

Для того, чтобы решить однородную краевую задачу Римана, необходимо найти каноническую матрицу $X(z)$ этой задачи. Столбцы матрицы $X(z)$ удовлетворяют краевым условиям и матрица $X(z)$ обладает следующими свойствами [7]:

1. $\det X(z) \neq 0$ для $\forall z \neq a_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$);
2. Столбцы матрицы $X(z)$ принадлежат выбранному классу функций;
3. Порядок определителя $X(z)$ на бесконечности равен сумме порядков его столбцов.

Покажем, как строится решение краевой задачи в случае 3-х особых точек a_1, a_2, a_3 . Без ограничения общности будем считать, что $a_3 = \infty$. Найдем решение однородной краевой задачи Римана с краевыми условиями

$$\begin{cases} Y^+(t) = A_1 \cdot Y^-(t), & t \in (a_1, a_2), \\ Y^+(t) = A_2 \cdot Y^-(t), & t \in (a_2, \infty), \end{cases} \quad (2)$$

где A_1, A_2 — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка. Решение задачи (2) ищем в классе функций, интегрируемых при $z \rightarrow a_1$ и $z \rightarrow a_2$ и почти ограниченных (ограниченных или допускающих логарифмическую особенность) при $z \rightarrow \infty$. В выбранном классе однородная краевая задача (1) оказалась всегда разрешимой.

Обозначив характеристические числа матриц $V_k = A_{k-1} A_k^{-1}$, $k = 1, 2, 3$, $A_0 = A_3 = E$, через α_k, β_k , находим числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k, \quad -1 < \operatorname{Re} \rho_k \leq 0, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k, \quad -1 < \operatorname{Re} \sigma_k \leq 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 (\rho_k + \sigma_k), \quad \Delta - \text{целое}, \quad -5 \leq \Delta \leq 0.$$

Поведение решения на бесконечности определяют числа

$$\rho = \rho_3 + \left[\frac{1 - \Delta}{2} \right] \quad \text{и} \quad \sigma = \sigma_3 + \left[\frac{2 - \Delta}{2} \right], \quad \operatorname{Re} \rho \leq \operatorname{Re} \sigma.$$

При таком выборе ветвей логарифмов выполняется соотношение Фукса

$$\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho + \sigma = 1.$$

Из работ Римана следует, что решение задачи (2) в окрестности каждой особой точки можно искать в виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} (z - a_k)^{\rho_k} & u_k(z) \\ (z - a_k)^{\sigma_k} & v_k(z) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_3 \begin{pmatrix} z^{-\rho} & u_3(z) \\ z^{-\sigma} & v_3(z) \end{pmatrix},$$

где D_k — матрицы, приводящие матрицы монодромии V_k , $k = 1, 2, 3$, к нормальной жордановой форме, функции $u_k(z)$ голоморфны в окрестности точек a_k , а функции $v_k(z)$ либо голоморфны при $\rho_k \neq \sigma_k$, либо имеют вид [8]

$$v_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z - a_k) u_k(z) + w_k(z) \quad \text{при} \quad \rho_k = \sigma_k, \quad k = 1, 2,$$

$$v_3(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln z \cdot u_3(z) + w_3(z) \quad \text{при} \quad \rho_3 = \sigma_3.$$

причем $w_k(z)$ голоморфны в окрестностях точек a_k , $u_k(a_k) \neq 0$, $w_k(a_k) \neq 0$, $k = 1, 2, 3$.

При построении канонической матрицы $X(z)$ задачи (2), сначала рассмотрим матрицу

$$X_0(z) = \begin{pmatrix} y_1 & (z - a_1)(z - a_2)y'_1 \\ y_2 & (z - a_1)(z - a_2)y'_2 \end{pmatrix},$$

состоящая из двух линейно независимых решений краевой задачи (2), т.е.

$$X_0^+(t) = A_k \cdot X_0^-(t), \quad t \in (a_k, a_{k+1}), \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

Выражая из (3) матрицы $A_k = X_0^+(t) \cdot [X_0^-(t)]^{-1}$ и дифференцируя обе части краевого условия, приходим к краевому условию

$$\left[X_0^{-1} \frac{dX_0}{dt} \right]^+ = \left[X_0^{-1} \frac{dX_0}{dt} \right]^-.$$

Обозначая $p(z) = (z - a_1)(z - a_2)$, рассматриваем матрицу

$$X_0^{-1}(z) \cdot \frac{dX_0(z)}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & p(z) \frac{y'_2 y''_1 - y'_1 y''_2}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} \\ \frac{1}{p(z)} & \frac{p'(z)}{p(z)} + \frac{y_1 y'_2 - y_2 y'_1}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} \end{pmatrix}.$$

Далее находим главные части разложения элементов матрицы (4) в окрестностях особых точек a_1 , a_2 , $a_3 = \infty$ и применяем теорему об аналитическом продолжении и обобщенную теорему Лиувилля[8]. В результате получаем, что матрица $X_0(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dX_0}{dz} = X_0 \left[\frac{U_1^0}{z - a_1} + \frac{U_2^0}{z - a_2} + \begin{pmatrix} 0 & -\rho\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (5)$$

где

$$U_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & (a_2 - a_1)\rho_1\sigma_1 \\ (a_1 - a_2)^{-1} & \rho_1 + \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad U_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & (a_1 - a_2)\rho_2\sigma_2 \\ (a_2 - a_1)^{-1} & \rho_2 + \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Система (5) не является регулярной, а матрица $X_0(z)$ не является канонической, так как она не удовлетворяет ее третьему условию: порядок определителя $X_0(z)$ на бесконечности равен $\rho + \sigma - 1$, а порядки столбцов матрицы соответственно ρ и $\rho - 1$.

Канонической матрицей задачи (2) является матрица

$$X(z) = X_0(z) \begin{pmatrix} 1 & \rho z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & \rho \cdot z \cdot y_1 + (z - a_1)(z - a_2)y'_1 \\ y_2 & \rho \cdot z \cdot y_2 + (z - a_1)(z - a_2)y'_2 \end{pmatrix},$$

порядки столбцов которой соответственно равны ρ и $\sigma - 1$.

Матрица $X(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению класса Фукса

$$\frac{dX}{dz} = X \left[\frac{U_1}{z - a_1} + \frac{U_2}{z - a_2} \right] \quad (6)$$

с матрицами-вычетами

$$U_1 = \frac{1}{a_2 - a_1} \begin{pmatrix} \rho a_1 & (\rho_1(a_1 - a_2) + \rho a_1) \cdot (\sigma_1(a_1 - a_2) + \rho a_1) \\ -1 & (\rho_1 + \sigma_1)(a_2 - a_1) - \rho a_1 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \frac{1}{a_1 - a_2} \begin{pmatrix} \rho a_2 & (\rho_2(a_2 - a_1) + \rho a_2) \cdot (\sigma_2(a_2 - a_1) + \rho a_2) \\ -1 & (\rho_2 + \sigma_2)(a_1 - a_2) - \rho a_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (6) сводится к дифференциальному уравнению Римана с особыми точками a_1, a_2, ∞ , решения которого выражаются через гипергеометрические функции [9]:

$$y'' + \left(\frac{1 - \rho_1 - \sigma_1}{z - a_1} + \frac{1 - \rho_2 - \sigma_2}{z - a_2} \right) y' -$$

$$- \frac{1}{(z - a_1)(z - a_2)} \left(\rho\sigma + \frac{(a_1 - a_2)\rho_1\sigma_1}{z - a_1} + \frac{(a_2 - a_1)\rho_2\sigma_2}{z - a_2} \right) y = 0.$$

3 Преобразование матриц-вычетов уравнения Фукса и «метод логарифмизации произведения двух 2x2 матриц»

Заметим, что в уравнении (6) сумма матриц

$$U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} -\rho & \mu \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix},$$

где $\mu = -a_1[(\rho + \rho_1)(\rho + \sigma_1) - \rho_2\sigma_2] - a_2[(\rho + \rho_2)(\rho + \sigma_2) - \rho_1\sigma_1]$, является треугольной.

С помощью матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & \mu/(\sigma - \rho - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, где γ, δ — произвольные постоянные, матрица $U_1 + U_2$ при $\sigma - \rho \neq 1$ приводится к диагональному виду $S = C^{-1}(U_1 + U_2)C = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}$.

Таким образом, диагональную матрицу $S = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}$ можно представить в виде суммы двух матриц: $S = C^{-1}U_1C + C^{-1}U_2C$ или

$$S = S_1 + S_2, \quad (7)$$

где

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1\sigma_1 - (\rho + \rho_2)(\rho + \sigma_2)}{1 + \rho - \sigma} & \frac{(\rho + \rho_1)(\sigma + \sigma_1 - 1) - \rho_2\sigma_2}{1 + \rho - \sigma} \cdot c \\ \frac{\rho_2\sigma_2 - (\rho + \sigma_1)(\sigma + \rho_1 - 1)}{c(1 + \rho - \sigma)} & \frac{(\sigma + \rho_2 - 1)(\sigma + \sigma_2 - 1) - \rho_1\sigma_1}{1 + \rho - \sigma} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_2\sigma_2 - (\rho + \rho_1)(\rho + \sigma_1)}{1 + \rho - \sigma} & \frac{(\rho + \rho_2)(\sigma + \sigma_2 - 1) - \rho_1\sigma_1}{1 + \rho - \sigma} \cdot c \\ \frac{\rho_1\sigma_1 - (\rho + \sigma_2)(\sigma + \rho_2 - 1)}{c(1 + \rho - \sigma)} & \frac{(\sigma + \rho_1 - 1)(\sigma + \sigma_1 - 1) - \rho_2\sigma_2}{1 + \rho - \sigma} \end{pmatrix},$$

$c = \frac{\gamma}{\delta}$ — произвольная постоянная, при этом $S_1 \sim W_1, S_2 \sim W_2$.

С точностью до преобразования подобия произвольной диагональной матрицей такое представление единственно.

Умножая обе части уравнения (6) на матрицу C справа, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dz}(XC) = (XC) \left[\frac{C^{-1}U_1C}{z - a_1} + \frac{C^{-1}U_2C}{z - a_2} \right] \quad \text{или}$$

$$\frac{dY}{dz} = Y \left[\frac{S_1}{z - a_1} + \frac{S_2}{z - a_2} \right], \quad (9)$$

где $Y = XC$, $S_k = C^{-1}U_kC$, $k = 1, 2$.

В работе [10] отдельно были рассмотрены случаи, среди матриц монодромии есть матрицы с треугольной жордановой формой. В частности было показано, что при $\rho_3 \neq \sigma_3$ формулы (8) для матриц-вычетов уравнения (9) не зависят от вида жордановых форм матриц V_1, V_2 .

Если $\rho_3 = \sigma_3$, матрицы V_1, V_2, V_3 не перестановочны и число Δ нечетное, то матрицы-вычеты уравнения (9) можно найти по формулам (8), где полагаем $\rho = \sigma$.

Если $\rho_3 = \sigma_3$, Δ — четное и $\rho_k \neq \sigma_k$ при $k = 1$ или $k = 2$, то заменяем в (8) ρ_k на $\rho_k + 1$, если $0 \leq \operatorname{Re}(\sigma_k - \rho_k) < 1$ или σ_k на $\sigma_k + 1$, если $0 \leq \operatorname{Re}(\rho_k - \sigma_k) < 1$.

В из формул (8) следует, что в уравнении (9) элементы главных диагоналей, а также произведения элементов побочных диагоналей матриц-вычетов S_1 и S_2 не зависят от точек a_1, a_2 и являются инвариантами. Учитывая этот факт, удалось получить формулы (8) другим способом, не связанным с решением краевой задачи Римана. В работе [4] было доказано следующее утверждение, которое лежит в основе «метода логарифмизации произведения 2x2 матриц».

Утверждение 1. Пусть V_1, V_2 — постоянные невырожденные 2x2 матрицы, $V_3 = V_1 V_2$, α_k, β_k — характеристические числа матриц V_k , $\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k$ — характеристические числа матриц $W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, $k = 1, 2, 3$. Зафиксируем какие-либо ветви логарифмов из условий $|\operatorname{Re}(\rho_k - \sigma_k)| < 1$, $k = 1, 2$, а ветви логарифмов для ρ_3, σ_3 выбираются из условия $\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = \rho_3 + \sigma_3$, причем $\rho_3 \neq \sigma_3$. Тогда матрицу $S_3 = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ можно представить в виде суммы двух матриц $S_3 = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1 \sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{c(\sigma_3 - \rho_3)}} & \frac{(\rho_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - \rho_2 \sigma_2}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{c(\sigma_3 - \rho_3)}} \cdot c \\ \frac{\rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \rho_1)}{c(\sigma_3 - \rho_3)} & \frac{(\sigma_3 - \rho_2)(\sigma_3 - \sigma_2) - \rho_1 \sigma_1}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{c(\sigma_3 - \rho_3)}} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho_2 \sigma_2 + (\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \sigma_1)}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{c(\sigma_3 - \rho_3)}} & \frac{\rho_2 \sigma_2 - (\rho_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{c(\sigma_3 - \rho_3)}} \cdot c \\ \frac{(\rho_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \rho_1) - \rho_2 \sigma_2}{c(\sigma_3 - \rho_3)} & \frac{(\sigma_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - \rho_2 \sigma_2}{\frac{\sigma_3 - \rho_3}{c(\sigma_3 - \rho_3)}} \end{pmatrix},$$

причем $S_k \sim W_k$, $k = 1, 2$, а c — произвольная постоянная.

Формулы (8) для матриц S_1 и S_2 получаются из формул (10) путем замены в последних ρ_3 на $-\rho$ и σ_3 на $1 - \sigma$.

4 Построение дифференциального уравнения Фукса проблемы Римана-Гильберта с четырьмя особыми точками «методом логарифмизации»

Рассмотрим задачу Римана-Гильберта с четырьмя особыми точками $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$ с группой 2x2 невырожденных матриц монодромии V_1, V_2, V_3, V_4 , $V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 = E$.

Обозначим α_k, β_k — характеристические числа матриц V_k , $\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k$ — характеристические числа матриц $W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, $k = 1, \dots, 4$, где ветви логарифмов удовлетворяют условиям $|\operatorname{Re}(\rho_k - \sigma_k)| < 1$, $\Delta = \sum_{k=1}^4 (\rho_k + \sigma_k)$, $\rho = \rho_4 + [\frac{1-\Delta}{2}]$, $\sigma = \sigma_4 + [\frac{2-\Delta}{2}]$, $\operatorname{Re} \rho \leq \operatorname{Re} \sigma$, $\sum_{k=1}^3 (\rho_k + \sigma_k) + \rho + \sigma = 1$ — тождество Фукса.

В 1996 году в работе [11] был указан вид канонической матрицы $X(z)$ краевой задачи Римана и матриц-вычетов соответствующего уравнения Фукса с четырьмя особыми точками

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^3 \frac{U_k}{z - a_k}.$$

Оказалось, что сумма матриц-вычетов, как и в случае трех особых точек, имеет треугольный вид $U_1 + U_2 + U_3 = \begin{pmatrix} -\rho & \mu \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}$, а значит может быть приведена к диагональному виду $\begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}$. Поэтому далее строим дифференциальное уравнения Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^3 \frac{S_k}{z - a_k}, \quad (11)$$

в котором матрицы-вычеты $S_k \sim \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, $k = 1, 2, 3$, и $S_1 + S_2 + S_3 = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}$.

Представляем матрицу $S = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}$ в виде суммы трех матриц

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} s_k & c_k \\ d_k & s'_k \end{pmatrix},$$

где $S_k \sim W_k$, $s'_k = \rho_k + \sigma_k - s_k$, $c_k d_k = s_k s'_k - \rho_k \sigma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k)$, $k = 1, 2, 3$,

$$\sum_{k=1}^3 s_k = -\rho, \quad \sum_{k=1}^3 s'_k = 1 - \sigma, \quad \sum_{k=1}^3 c_k = 0, \quad \sum_{k=1}^3 d_k = 0.$$

Запишем произведение матриц $V_1 \cdot V_2 \cdot V_3$ в виде произведений двух матриц следующим образом:

$$V_4^{-1} = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = V_1 \cdot (V_2 \cdot V_3) = V_1 \cdot V_{23}, \quad (12)$$

$$V_4^{-1} = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = (V_1 \cdot V_2) \cdot V_3 = V_{12} \cdot V_3. \quad (13)$$

Применим к (12) и (13) формулы (7) и (8) представления логарифма двух матриц. Обозначим α_{12} , β_{12} и α_{23} , β_{23} — характеристические числа матриц V_{12} и V_{23} ,

$$\rho_{12} = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_{12}, \sigma_{12} = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_{12}, \rho_{23} = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_{23}, \sigma_{23} = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_{23},$$

ветви которых выбираются из условий

$$\rho_{12} + \sigma_{12} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2, \quad |Re(\rho_{12} - \sigma_{12})| < 1, \quad \rho_{23} + \sigma_{23} = \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3, \quad |Re(\rho_{23} - \sigma_{23})| < 1.$$

Получаем 2 представления для матрицы S :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_{23} = \begin{pmatrix} s_1 & c_1 \\ d_1 & s'_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho - s_1 & -c_1 \\ -d_1 & 1 - \sigma - s'_1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = S_{12} + S_3 = \begin{pmatrix} -\rho - s_3 & -c_3 \\ -d_3 & 1 - \sigma - s'_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_3 & c_3 \\ d_3 & s'_3 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$s_1 = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho_1 \sigma_1 - (\rho + \rho_{23})(\rho + \sigma_{23})] = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho(\sigma + \rho_1 + \sigma_1 - 1) + \rho_1 \sigma_1 - \rho_{23} \sigma_{23}],$$

$$s_3 = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho_3 \sigma_3 - (\rho + \rho_{12})(\rho + \sigma_{12})] = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho(\sigma + \rho_3 + \sigma_3 - 1) + \rho_3 \sigma_3 - \rho_{12} \sigma_{12}].$$

$$S_{12} \sim \frac{1}{2\pi i} \ln(V_1 \cdot V_2), \quad S_{23} \sim \frac{1}{2\pi i} \ln(V_2 \cdot V_3).$$

Из (14) и (15) следует, что $S_1 + S_2 = S_{12}$ и $S_2 + S_3 = S_{23} \Rightarrow S_2 = S_{12} - S_1 = S_{23} - S_3$, или

$$\begin{pmatrix} s_2 & c_2 \\ d_2 & s'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho - s_3 - s_1 & -c_3 - c_1 \\ -d_3 - d_1 & 1 - \sigma - s'_3 - s'_1 \end{pmatrix},$$

откуда находим

$$s_2 = -\rho - s_1 - s_3 = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho(\rho_2 - \sigma_2) - \rho_1 \sigma_1 - \rho_3 \sigma_3 + \rho_{12} \sigma_{12} + \rho_{23} \sigma_{23}], \quad (16)$$

$$s_2 s'_2 - (c_1 + c_3)(d_1 + d_3) = \rho_2 \sigma_2. \quad (17)$$

Для преобразования формулы (16), используем тождество для определителя суммы трех матриц 2-го порядка [3]:

$$D(S_1 + S_2 + S_3) = D(S_1 + S_2) + D(S_1 + S_3) + D(S_2 + S_3) - D(S_1) - D(S_2) - D(S_3), \text{ или}$$

$$\rho(\sigma - 1) = \rho_{12} \sigma_{12} + \rho_{13} \sigma_{13} + \rho_{23} \sigma_{23} - \rho_1 \sigma_1 - \rho_2 \sigma_2 - \rho_3 \sigma_3.$$

Обозначив

$$\omega_3 := \rho_{12}\sigma_{12}, \quad \omega_1 := \rho_{23}\sigma_{23}, \quad \omega_2 := \rho_{13}\sigma_{13} = \rho(\sigma - 1) + \sum_{k=1}^3 \rho_k \sigma_k - \omega_1 - \omega_3, \quad (18)$$

перепишем (16) в виде

$$s_2 = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho_2 \sigma_2 - (\rho + \rho_{13})(\rho + \sigma_{13})] = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho(\sigma + \rho_2 + \sigma_2 - 1) + \rho_2 \sigma_2 - \omega_2].$$

Преобразуем формулу (17), связывающую постоянные c_1, c_3, d_1, d_3 . Обозначив инварианты

$$\gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k) = c_k d_k,$$

перепишем (17) в виде $\gamma_2 - \gamma_1 - c_3 d_1 - c_1 d_3 - \gamma_3 = 0 \Rightarrow$

$$\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3 - \frac{\gamma_3}{d_3} d_1 - \frac{\gamma_1}{d_1} d_3 = 0 \quad (d_1 \neq 0, d_3 \neq 0).$$

Обозначая $\tau = \frac{d_1}{d_3}$ ($d_3 \neq 0$), приходим к квадратному уравнению относительно

$$\gamma_3 \tau^2 + (\gamma_1 + \gamma_3 - \gamma_2) \tau + \gamma_1 = 0, \quad (19)$$

откуда находим параметр τ , а затем элементы c_k, d_k матриц $S_k, k = 1, 2, 3$:

$$d_1 = c, \quad d_3 = \tau c, \quad d_2 = -(d_1 + d_3) = -(1 + \tau)c, \quad c_1 = \frac{\gamma_1}{c}, \quad c_2 = -\frac{\gamma_2}{(1 + \tau)c}, \quad c_3 = \frac{\gamma_3}{c},$$

где c – произвольная постоянная, $c \neq 0$.

Таким образом, получено представление матрицы S в виде суммы трех матриц, подобных матрицам $W_k = \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, которые являются матрицами-вычетами уравнения (11).

Теорема 1. Решение проблемы Римана-Гильберта для двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$ с 4-мя особыми точками $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$ удовлетворяет дифференциальному уравнению класса Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y \left[\frac{\begin{pmatrix} s_1 & \frac{\gamma_1}{c} \\ c & \rho_1 + \sigma_1 - s_1 \end{pmatrix}}{z - a_1} + \frac{\begin{pmatrix} s_2 & \frac{-\gamma_2}{(1+\tau)c} \\ -(1+\tau)c & \rho_2 + \sigma_2 - s_2 \end{pmatrix}}{z - a_2} + \frac{\begin{pmatrix} s_3 & \frac{\gamma_3}{\tau c} \\ \tau c & \rho_3 + \sigma_3 - s_3 \end{pmatrix}}{z - a_3} \right], \quad (20)$$

где $s_k = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [\rho(\sigma + \rho_k + \sigma_k - 1) + \rho_k \sigma_k - \omega_k]$, $\gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k)$, ω_k находятся по формулам (18), τ – из уравнений (19), c – произвольная постоянная.

5 Построение обыкновенного дифференциального уравнения Фукса второго порядка проблемы Римана-Гильберта с четырьмя особыми точками

Построим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее матричному уравнению (20), записывая его в виде

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^3 \frac{S_k}{z - a_k} \quad \text{или} \quad \frac{dY}{dz} = Y S(z), \quad (21)$$

где $Y(z) = (y_{ij})$, $S(z) = (s_{ij})$ – матрица 2-го порядка с элементами

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sum_{k=1}^3 \frac{s_k}{z - a_k}, \quad s_{12} = \sum_{k=1}^3 \frac{c_k}{z - a_k}, \quad s_{22} = \sum_{k=1}^3 \frac{s'_k}{z - a_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k - \sigma_k - s_k}{z - a_k}, \\ s_{21} &= \sum_{k=1}^3 \frac{d_k}{z - a_k} = \\ &= \frac{(d_1 + d_2 + d_3)z^2 - (d_1(a_2 + a_3) + d_2(a_1 + a_3) + d_3(a_1 + a_2))z + d_1 a_2 a_3 + d_2 a_1 a_3 + d_3 a_1 a_2}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{c(a_1 - a_2 + \tau(a_3 - a_2))z + a_3(a_2 - a_1) + \tau a_1(a_2 - a_3)}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)} = \frac{c(a_1 - a_2 + \tau(a_3 - a_2))(z - b)}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)},$$

где введено обозначение

$$b = \frac{a_3(a_1 - a_2) + \tau a_1(a_3 - a_2)}{a_1 - a_2 + \tau(a_3 - a_2)}. \quad (22)$$

Элементы матриц $Y(z)$ и $S(z)$ связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y'_{21} & y'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix},$$

$$y'' - \left(s_{11} + s_{22} + \frac{s'_{21}}{s_{21}} \right) y' + \left(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} - s'_{11} + \frac{s'_{21}}{s_{21}} s_{11} \right) y = 0, \quad (23)$$

$$\frac{s'_{21}}{s_{21}} = (\ln s_{21})' = \left(\ln(z - b) - \sum_{k=1}^3 \ln(z - a_k) \right)' = \frac{1}{z - b} - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{z - a_k}.$$

В результате преобразований уравнения (23) было построено следующее дифференциального уравнения класса Фукса 2-го порядка с пятью особыми точками $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$ и b [4]:

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^3 \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \frac{1}{z - b} \right) y' + \frac{1}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)} \times$$

$$\times \left[\rho\sigma z - \rho b + \sum_{k=1}^3 (\rho_k \sigma_k - \omega_k) a_k + \frac{q}{z - b} + \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k \sigma_k}{z - a_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^3 (a_k - a_j) \right] y = 0, \quad (24)$$

где $q = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} \sum_{k=1}^3 (\rho(\sigma + \rho_k + \sigma_k - 1) + \rho_k \sigma_k - \omega_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^3 (b - a_j)$.

Точка $z = b$ в уравнении (24) является регулярной и называется “ложной особой точкой” [12].

Уравнение (24) можно упростить с помощью замены $y = \prod_{k=1}^3 (z - a_k)^{\rho_k} w$. Тогда функция w будет удовлетворять уравнению вида (24), где следует заменить

$$\begin{aligned} \rho_k &\rightarrow 0, & \sigma_k &\rightarrow \sigma_k - \rho_k, & \rho &\rightarrow \rho + \sum_{k=1}^3 \rho_k = \rho^*, & \sigma &\rightarrow \sigma + \sum_{k=1}^3 \rho_k = \sigma^*, \\ \omega_1 &\rightarrow \omega_1 - (\rho_2 + \rho_3)(\sigma_2 + \sigma_3) = \omega_1^*, & \omega_2 &\rightarrow \omega_2 - (\rho_1 + \rho_3)(\sigma_1 + \sigma_3) = \omega_2^*, \\ \omega_3 &\rightarrow \omega_3 - (\rho_1 + \rho_2)(\sigma_1 + \sigma_2) = \omega_3^*, \\ q &\rightarrow \frac{1}{1 + \rho - \sigma} \sum_{k=1}^3 [(\rho + \rho_k)(\sigma - \sigma_k - 1) - \omega_k] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^3 (b - a_j) = q^*. \end{aligned}$$

Это уравнение будет иметь вид

$$w'' + \left(\sum_{k=1}^3 \frac{1 + \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \frac{1}{z - b} \right) w' +$$

$$+ \frac{1}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)} \left(\rho^* \sigma^* z - b \rho^* - \sum_{k=1}^3 \tau_k^* a_k + \frac{q^*}{z - b} \right) w = 0, \quad (25)$$

«Логарифмические случаи» для четырех особых точек рассматриваются аналогично случаю трех особых точек [10].

В некоторых случаях решение уравнения (25) могут быть выражены через функции Хейна, которые являются решениями уравнения с четырьмя особыми точками вида [9]

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z - 1} + \frac{\varepsilon}{z - a} \right) \frac{dw}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z - 1)(z - a)} w = 0,$$

$\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \varepsilon$. Это возможно в тех случаях, когда точка b в уравнении (25) совпадает с какой-либо из особых точек a_k , $k = 1, 2, 3$. Например, если в уравнении (20) $s_1 = \rho_1$ или $s_1 = \sigma_1$, то $\gamma_1 = 0$, $\tau = 0$ и $b = a_3$.

6 Построение дифференциального уравнения Фукса проблемы Римана–Гильберта с произвольным числом особых точек «методом логарифмизации»

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта с $n + 1$ особыми точками $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ и группой монодромии, состоящей из невырожденных 2×2 невырожденных матриц V_k , $k = 1, \dots, n + 1$, $V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_{n+1} = E$.

Случай пяти особых точек ($n = 4$) был рассмотрен в работе [5]. С помощью «метода логарифмизации двух матриц» были построены дифференциальное уравнение Фукса для двух функций с пятью особыми точками, дифференциальное уравнение Фукса второго порядка с семью особыми точками, каноническая матрица соответствующей краевой задаче Римана, найдены ее индексы и частные индексы. Покажем, как применить метод логарифмизации при построении дифференциального уравнения Фукса для решения проблемы Римана–Гильберта с произвольным числом особых точек. Так же, как и в случаях для 4-х и 5-ти особых точек, кроме характеристических чисел матриц монодромии нам нужны будут характеристические числа произведений этих матриц.

Обозначим характеристические числа матриц $V_k - \alpha_k, \beta_k$, $k = 1, \dots, n + 1$, матриц $V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_k - \alpha_{1k}, \beta_{1k}$, $V_k \cdot V_{k+1} \cdot \dots \cdot V_n - \alpha_{kn}, \beta_{kn}$, $V_j \cdot V_{j+1} \cdot \dots \cdot V_k - \alpha_{jk}, \beta_{jk}$ соответственно и найдем числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k, \quad |\operatorname{Re}(\rho_k - \sigma_k)| < 1,$$

$$\rho_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_{jk}, \quad \sigma_{jk} = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_{jk}, \quad |\operatorname{Re}(\rho_{jk} - \sigma_{jk})| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 2, \dots, n + 1, \quad j < k,$$

$$\rho_{jk} + \sigma_{jk} = \sum_{m=j}^k (\rho_m + \sigma_m), \quad d_{jk} = \rho_{jk} \sigma_{jk}, \quad \Delta = \sum_{k=1}^{n+1} (\rho_k + \sigma_k),$$

$$\rho = \rho_{n+1} + \left[\frac{1-\Delta}{2} \right], \quad \sigma = \sigma_{n+1} + \left[\frac{2-\Delta}{2} \right], \quad \operatorname{Re} \rho \leq \operatorname{Re} \sigma, \quad \sum_{k=1}^{n+1} (\rho_k + \sigma_k) + \rho + \sigma = 1 - \text{тождество Фукса}.$$

Как и случае четырех особых точек представляем матрицу $S = \begin{pmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & 1 - \sigma \end{pmatrix}$ в виде суммы n матриц $S = \sum_{k=1}^n S_k$, где $S_k \sim \frac{1}{2\pi i} \ln V_k$, $k = 1, \dots, n$. Для этого записываем матрицу V_{n+1}^{-1} в виде $(n - 1)$ произведений двух матриц

$$V_{n+1}^{-1} = (V_1 \cdot V_2 \cdot \dots \cdot V_k) \cdot (V_{k+1} \cdot \dots \cdot V_n), \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

к каждому из которых применяем формулу логарифмизации произведения двух матриц. В результате получаем систему $(n - 1)$ представлений матрицы S :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n S_k = S_1 + S_{2n} = S_{12} + S_{3n} = \dots = S_{1k} + S_{k+1,n} = \dots = \\ &= S_{1,n-1} + S_n = \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} s_k & \gamma_k/c_k \\ c_k & s'_k \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

в которых элементы матриц $S_{1k} = \begin{pmatrix} s_{1k} & \gamma_{1k}/c_{1k} \\ c_{1k} & s'_{1k} \end{pmatrix}$ находятся по формулам

$$s_{1k} = \frac{d_{1k} + \rho(\sigma + \rho_{1k} + \sigma_{1k} - 1) - d_{k+1,n}}{1 + \rho - \sigma}, \quad s'_{1k} = \rho_{1k} + \sigma_{1k} - s_{1k}, \quad \gamma_{1k} = -(s_{1k} - \rho_{1k})(s_{1k} - \sigma_{1k}),$$

где $k = 1, \dots, n$, и содержат n различных произвольных постоянных c_{1k} . При этом $S_{1k} \sim \frac{1}{2\pi i} \ln(V_1 \cdot \dots \cdot V_k)$ и $S_{kn} \sim \frac{1}{2\pi i} \ln(V_k \cdot \dots \cdot V_n)$.

Из системы (26) последовательно определяем матрицы

$$\begin{aligned} S_k &= \begin{pmatrix} s_k & \gamma_k/c_k \\ c_k & s'_k \end{pmatrix} = S_{1k} - S_{1k-1} = S_{kn} - S_{k+1,n} = \begin{pmatrix} s_{1k} & \gamma_{1k}/c_{1k} \\ c_{1k} & s'_{1k} \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} s_{1k-1} & \gamma_{1k-1}/c_{1k-1} \\ c_{1k-1} & s'_{1k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1k} - s_{1k-1} & \gamma_{1k}/c_k - \gamma_{1k-1}/c_{1k-1} \\ c_{1k} - c_{1k-1} & s'_{1k} - s'_{1k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) находим элементы главных диагоналей матриц S_k :

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{1 - \rho + \sigma} [d_{1k} - d_{1,k-1} + \rho(\rho_k + \sigma_k) + d_{kn} - d_{k+1,n}], \\ s'_k &= \frac{1}{1 - \rho + \sigma} [d_{1,k-1} - d_{1k} + (1 - \sigma)(\rho_k + \sigma_k) + d_{k+1,n} - d_{kn}], \\ \gamma_k &= -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k), k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Поскольку произведения элементов побочных диагоналей также являются инвариантами, то можно составить $(n - 2)$ уравнения, устанавливающими связь между постоянными c_{1k} и c_{1k+1} :

$$\left(\frac{\gamma_{1k}}{c_{1k}} - \frac{\gamma_{1k-1}}{c_{1k-1}} \right) (c_{1k} - c_{1k-1}) = \gamma_k \Rightarrow \gamma_{1k} + \gamma_{1k-1} - \frac{c_{1k-1}}{c_{1k}} \gamma_{1k} - \frac{c_{1k}}{c_{1k-1}} \gamma_{1k-1} = \gamma_k.$$

Обозначив $\tau_k := \frac{c_{1k+1}}{c_{1k}}$, получим систему квадратных уравнений

$$\tau_k^2 \gamma_{1k} - \tau_k (\gamma_{1k+1} + \gamma_{1k} - \gamma_{k+1}) + \gamma_{1k+1} = 0, k = 1, \dots, n - 2,$$

откуда находим параметры $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2}$. После этого находим элементы c_{1k} и c_k матриц S_{1k} и S_k :

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_1 = c, \quad c_{12} = c\tau_1, \quad c_2 = c_{12} - c_{11} = c(\tau_1 - 1), \quad c_{13} = c_{12}\tau_2 = c\tau_1\tau_2, \\ c_3 &= c_{13} - c_{12} = c\tau_2(\tau_1 - 1), \quad c_{1k} = c_{1k-1}\tau_{k-1} = c\tau_1\tau_2 \cdots \tau_{k-1}, \\ c_k &= c_{1k} - c_{1k-1} = c\tau_1 \cdots \tau_{k-2}(\tau_{k-1} - 1), \quad k = 3, \dots, n - 1, \quad c_n = -c\tau_1\tau_2 \cdots \tau_{n-2}. \end{aligned}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Решение проблемы Римана для двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$ с $(n + 1)$ особыми точками $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = \infty$ удовлетворяет дифференциальному уравнению класса Фукса $\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{z - a_k}$, элементы матриц-вычетов $S_k = \begin{pmatrix} s_k & \gamma_k/c_k \\ c_k & s'_k \end{pmatrix}$ которых находятся по формулам

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{1 - \rho + \sigma} [d_{1k} - d_{1,k-1} + \rho(\rho_k + \sigma_k) + d_{kn} - d_{k+1,n}], \\ s'_k &= \frac{1}{1 - \rho + \sigma} [d_{1,k-1} - d_{1k} + (1 - \sigma)(\rho_k + \sigma_k) + d_{k+1,n} - d_{kn}], \\ c_1 &= c, \quad c_k = c\tau_1 \cdots \tau_{k-2}(\tau_{k-1} - 1), \quad k = 3, \dots, n - 1, \quad c_n = -c\tau_1\tau_2 \cdots \tau_{n-2}, \\ \tau_k^2 \gamma_{1k} - \tau_k (\gamma_{1k+1} + \gamma_{1k} - \gamma_{k+1}) + \gamma_{1k+1} &= 0, \quad k = 1, \dots, n - 2, \\ \gamma_{1k} &= -(s_{1k} - \rho_{1k})(s_{1k} - \sigma_{1k}), \quad \gamma_k = -(s_k - \rho_k)(s_k - \sigma_k), \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

c – произвольная постоянная.

7 Построение обыкновенного дифференциального уравнения Фукса второго порядка проблемы Римана–Гильберта с $n + 1$ особыми точками

Построим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее матричному уравнению

$$\frac{dY}{dz} = Y \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{z - a_k} \quad \text{или} \quad \frac{dY}{dz} = Y S(z),$$

где $Y(z) = (y_{ij})$, $S(z) = (s_{ij})$ – матрица 2-го порядка с элементами

$$\begin{aligned} s_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k}, \quad s_{21} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - a_k}, \\ s_{22} &= \sum_{k=1}^n \frac{s'_k}{z - a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k - \sigma_k - s_k}{z - a_k}, \quad s_{12} = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{c_k(z - a_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{z - a_k}. \end{aligned}$$

Как и случае четырех особых точек получим уравнение вида

$$y'' - \left(s_{11} + s_{22} + \frac{s'_{21}}{s_{21}} \right) y' + \left(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} - s'_{11} + \frac{s'_{21}}{s_{21}} s_{11} \right) y = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{s'_{21}}{s_{21}} &= (\ln s_{21})' = \left(\ln \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - a_k} \right)' = \\ &= \left(\ln c \left(\frac{1}{z - a_1} + \frac{\tau_1 - 1}{z - a_2} + \frac{\tau_1(\tau_2 - 1)}{z - a_2} + \dots + \frac{\tau_1\tau_2 \dots \tau_{n-3}(\tau_{n-2} - 1)}{z - a_{n-1}} - \frac{\tau_1\tau_2 \dots \tau_{n-2}}{z - a_n} \right) \right)' = \\ &= \left(\ln \frac{R_{n-2}(z)}{\prod_1^n (z - a_k)} \right)' = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}, \end{aligned}$$

а b_j , $j = 1, \dots, n - 2$, – корни многочлена

$$R_{n-2}(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\tau_1 \dots \tau_{k-2} (a_k - a_{k+1})}{(z - a_k)(z - a_{k+1})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} - \left(s_{11} + s_{22} + \frac{s'_{21}}{s_{21}} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j}, \\ s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} - s'_{11} + \frac{s'_{21}}{s_{21}} s_{11} &= \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k} \sum_{k=1}^n \frac{s'_k}{z - a_k} - \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - a_k} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{c_k(z - a_k)} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{(z - a_k)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k} \left(\sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} - \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k \sigma_k}{(z - a_k)^2} + \sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^n \frac{D(S_j + S_k) - D(S_j) - D(S_k) - s_j - s_k}{(z - a_j)(z - a_k)} + \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j}, \end{aligned}$$

где через $D(S)$ обозначен определитель матрицы S .

Преобразуем числитель второй дроби, используя формулу

$$D(S_1 + S_2 + S_3) = D(S_1 + S_2) + D(S_1 + S_3) + D(S_2 + S_3) - D(S_1) - D(S_2) - D(S_3).$$

Тогда

$$\begin{aligned} D(S_j + S_k) - D(S_j) - D(S_k) &= \\ &= D(S_j + \dots + S_k) + D(S_{j+1} + \dots + S_{k-1}) - D(S_j + \dots + S_{k-1}) - D(S_{j+1} + \dots + S_k) = \\ &= d_{jk} + d_{j+1, k-1} - d_{j, k-1} - d_{j+1, k}, \end{aligned}$$

где $d_{jk} = \det \left(\frac{1}{2\pi i} \ln(V_j \dots V_k) \right)$.

Таким образом получили обыкновенное дифференциальное уравнение Фукса с $(2n - 1)$ особыми точками, из которых $(n - 2)$ являются «ложными»

$$\begin{aligned} y'' + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} \right) y' + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\rho_k \sigma_k}{(z - a_k)^2} \right) y + \\ + \left(\sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^n \frac{d_{jk} + d_{j+1, k-1} - d_{j, k-1} - d_{j+1, k} - s_j - s_k}{(z - a_j)(z - a_k)} + \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z - a_k} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{z - b_j} \right) y = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где $s_k = \frac{1}{1 + \rho - \sigma} [d_{1k} - d_{1, k-1} + \rho(\rho_k + \sigma_k) + d_{kn} - d_{k+1, n}]$.

В окрестности каждой особой точки уравнение (28) имеет 2 линейно независимых решения, которые находятся в виде рядов, коэффициенты которых вычисляются по рекуррентным формулам. При этом справедливо утверждение.

Теорема 3. Если u_k и v_k — фундаментальная система решений дифференциального уравнения (28) в окрестности особой точки a_k , $k = 1, \dots, n+1$, то каноническая матрица задачи Римана в окрестности этой точки имеет вид

$$X(z) = D_k \begin{pmatrix} u_k & \frac{p(z)}{q(z)} \left(u'_k - \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z-a_k} u_k \right) \\ v_k & \frac{p(z)}{q(z)} \left(v'_k - \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{z-a_k} v_k \right) \end{pmatrix},$$

где D_k — матрицы, приводящие матрицы V_k , $k = 1, \dots, n+1$, к нормальной жордановой форме

$$p(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k), \quad q(z) = \prod_{j=1}^{n-2} (z - b_j).$$

8 О применении «метода логарифмизации» к решению некоторых задач математики и механики

Приведем примеры некоторых задач, при решении которых применялся «метод логарифмизации» произведения матриц.

1. В работе [13] дается решение одной смешанной задачи теории упругости: определить функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ комплексной переменной z , аналитические в верхней полуплоскости, непрерывно продолжимые на $\mathbb{R} \setminus \{-\psi \cup 0 \cup \psi\}$ и удовлетворяющие условиям:

$$\operatorname{Im} F_1(x) = -\operatorname{Re} F_2(x), \quad x \in (-\infty, 0); \quad \operatorname{Im} F_1(x) = \operatorname{Re} F_2(x), \quad x \in (0, +\infty);$$

$$\operatorname{Re} F_1(x) = f_1(x), \quad x \in (-\psi, \psi); \quad \operatorname{Im} F_2(x) = f_2(x), \quad x \in (-\infty, -\psi) \cup (\psi, +\infty),$$

где f_1 и f_2 — заданные функции. Вводя две новые неизвестные вектор-функции

$$\Phi^+(z) = \left(F_1(z), \overline{F_2(\bar{z})} \right) = (\Phi_1^+(z), \Phi_2^+(z)), \quad \Phi^-(z) = \left(\overline{F_1(\bar{z})}, F_2(z) \right) = (\Phi_1^-(z), \Phi_2^-(z)),$$

приходим к краевой задаче Римана с кусочно постоянной матрицей и четырьмя особыми точками

$$\Phi^+(x) = A_k \Phi^-(x) + G_k(x), \quad x \in l_k, \quad k = 1, \dots, 4,$$

$$\text{где } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_1(x) = -2f_2(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad G_2(x) = 2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad G_3(x) = 2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad G_4(x) = 2f_2(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

В работах [6, 14, 15] даются решения других задач теории упругости и гидромеханики.

2. Удалось построить также решения интегрального уравнения Карлемана на паре отрезков:

$$\int_{L_1} \frac{\phi(t) dt}{|x-t|^{\alpha_1}} + \int_{L_2} \frac{\phi(t) dt}{|x-t|^{\alpha_2}} = f(x),$$

где α_1, α_2 заданные числа, $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1, 2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, в двух случаях: на паре смежных и непересекающихся отрезков $L_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2$.

С помощью новых неизвестных функций $\Phi_k(z) = \int_{a_k}^{b_k} \frac{\phi_k(t)}{(t-z)^{\alpha_k}} dt$, $k = 1, 2$, записываем краевые условия для вектор-функции $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z))$ и приходим к краевым задачам с кусочно постоянной матрицей с четырьмя и пятью особыми точками, которые решаем «методом логарифмизации» [16].

3. С построением дифференциального уравнения Фукса связан связано решение ряда обобщенных краевых задач [17, 18].

4. «Метод логарифмизации» был распространен на произведение двух 3×3 матриц монодромии. С его помощью были построены решения проблемы Римана-Гильберта для трех функций с тремя и четырьмя особыми точками [19, 20].

5. Полученные нами формулы для матриц-вычетов дифференциального уравнения Фукса позволяют решать проблему Пуанкаре, т.е. находить по заданным матрицам-вычетам показательные подстановки (матрицы монодромии) [21, 22].

Благодарности

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция-2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, задание 1.7.01.4.

Литература

1. Риман, Б. *Сочинения*. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. С. 159–186.
2. Еругин, Н. П. *Проблема Римана*. Мн.: Наука и техника, 1982.
3. Хвощинская, Л. А. *Представление логарифма произведения невырожденных матриц второго порядка* // Материалы международной шестнадцатой научной конференции им. акад. Михаила Кравчука, 14–15 мая 2015, Киев. Т.2. Алгебра и геометрия. К.: НТУУ "КПИ 2015. С. 192–195.
4. Khvostchinskaya, L., Rogosin, S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers. 2020. P. 79–112.
5. Khvoshchinskaya, L., Rogosin, S. *Construction of 2×2 Fuchsian system with five singular points* // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 42, №4, 2021. P. 830–849. <https://doi.org/10.1134/S199508022104017X>.
6. Хвощинская, Л. А. *Построение дифференциального уравнения одной задачи гидромеханики* // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 3. / под общ. ред. А. А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. С. 14–18.
7. Мусхелишвили, Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. 3-е изд., М.: Наука, 1968.
8. Гахов, Ф. Д. *Краевые задачи*. 3-е изд., М.: Наука, 1977.
9. Frank, W. J. Oliver (editor-in-chief), Lozier, D.V., Boisvert, R.F., Clark, C.V. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Gaithersburg, Maryland, National Institute of Standards and Technology, and New York, Cambridge University Press, 951+xv pages and a CD, 2010.
10. Khvoshchinskaya, L., Rogosin, S. *On Solution to Riemann Problem in Logarithmic Cases* // Analysis without Borders (Sergei Rogosin Editor), Basel-Boston: Birkhäuser, 2024. С. 171–192. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-59397-0-11>.
11. Хвощинская, Л. А. *К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек* // Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. Труды междунар. конф. (Беларусь, Минск, 16–20 февр. 1996 г.). С. 377–382.
12. Болибрух, А. А. *Обратные задачи монодромии аналитической теории дифференциальных уравнений*. М.: МЦНМО, 2009.
13. Амелькин, В. В., Василевич, М. Н., Хвощинская, Л. А. *Об одном подходе к решению смешанных задач теории упругости* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2021. Т. 57, № 3. С. 263–273. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-263-273>.
14. Хвощинская, Л. А. *Решение одной задачи теории упругости* // Труды ин-та математики НАН Беларусі. Минск, 2000. Т.5. С. 136–141.
15. Хвощинская, Л. А. *Построение дифференциального уравнения одной задачи гидромеханики* // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 3 / под общ. ред. А. А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. С. 14–18.
16. Khvoshchinskaya, L. A. *On a Method of Solving Integral Equation of Carleman Type on the Pair of Segments* // Transmutation Operators and Applications. Vladislav V. Kravchenko, Sergei M. Sitnik Editors. Basel-Boston: Springer Nature AG, 2020. P. 431–446. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-35914-0-19>.
17. Хвощинская, Л. А. *Решение одной обобщенной задачи Римана на паре непересекающихся отрезков* // Труды ин-та математики НАН Беларусі. Минск, 2004. Т.12. С. 136–141.
18. Жоровина, Т. Н., Хвощинская, Л. А. *Решение одной четырехэлементной задачи Карлемана* // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Труды 5-й междунар. конф. 14–19 сент. 2009 г., Минск, Беларусь. Т.1: «Математический анализ». Мн.: ИМ НАНБ, 2009. С. 57–61.
19. Khvoshchinskaya, L. A. *Construction of the Fuchs Differential Equation with 3×3 Residue-Matrices and Three Singular Points Using Logarithmization Method* // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 43, №6, 2022. P. 1337–1344. <https://doi.org/10.1134/S199508022209013X>.
20. Khvoshchinskaya, L., Rogosin, S. *Construction of the Fuchs differential equation with 3×3 residue-matrices and four singular points using logarithmization method* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2021 (S.V. Rogosin, M.V. Dubatovskaya (eds.)), Cambridge Scientific Publishers Ltd., 2023. P. 15–38.
21. Хвощинская, Л. А., Жоровина, Т. Н. *О решении проблемы Пуанкаре для системы двух функций* // Математические методы в технологиях и технике. №11, 2022. С. 7–10.

22. Khvoshchinskaya, L. A. *On the Poincaré Problem Solution for a System of Two Functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol. 44, No. 8. 2023. P. 3372–3383.
<https://doi.org/10.1134/S1995080223080292>.

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О. Б. Цехан
e-mail: tsekhan@grsu.by

Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием по обоим переменным в уравнении медленного движения и по медленной переменной в уравнении быстрого движения развивается метод преобразований, с помощью которого построена асимптотическая аппроксимация решения 0-го порядка.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система; нестационарная система; запаздывание; асимптотическая аппроксимация; решение.

ASYMPTOTIC APPROXIMATION FOR SOLUTIONS OF CERTAIN CLASS OF TIME-VARYING SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS WITH DELAY

O. B. Tsekhan
e-mail: tsekhan@grsu.by

For a linear time-varying singularly perturbed system with nonsmall delay in both variables in the slow mode equation and in the slow variable in the fast mode equation, a transformation method is developed, with the help of which an asymptotic approximation of the 0th order solution is constructed.

Keywords: singularly perturbed system; time-varying system; delay; asymptotic approximation; solution.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 34K26, Secondary 34K06.

1 Введение

Сингулярно возмущенные системы с запаздыванием (СВСЗ) являются математическими моделями динамических систем, в которых одновременно реализуется несколько взаимосвязанных подпроцессов с существенно различающимися темпами изменения переменных, при этом скорость изменения переменных зависит не только от текущего состояния системы, но и от его прошлых состояний, что отражает присущее любым реальным процессам свойство инерционности. СВСЗ могут быть представлены в стандартной форме системами функционально-дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных (см. [1–6] и ссылки там).

При решении сингулярно возмущенных систем возникают проблемы, обусловленные их многотемповостью: высокая размерность, вычислительная жесткость. Применение асимптотических методов и методов разделения движений позволяет решить эти проблемы и сводит исследование многотемповой системы к анализу независимых подсистем в разных масштабах времени, описывающих движения с различными скоростями. Разделение движений с помощью метода преобразований на основе невырожденной замены переменных для линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем без запаздывания впервые выполнено в [7]. Исследования различных групп преобразований для нестационарных линейных систем выполнялись в [8–10].

Наличие запаздывания в СВС обуславливает особенности и принципиальные сложности применения методов преобразований, что связано с бесконечномерностью пространства состояний систем с запаздыванием. Например, аппроксимации 0-го и 1-го порядков решений СВС без запаздывания, построенные в [11], не переносятся напрямую на СВСЗ из-за нелокального характера преобразований, выполняющих декомпозицию СВСЗ. Преобразования для систем с запаздыванием изучались в [12–15]. Метод расщепляющего преобразования для СВС с постоянным запаздыванием развивается

в работах [5,16–19]. Аппроксимации 0-го и 1-го порядка для линейной нестационарной СВС с постоянным запаздыванием по состоянию только в медленных переменных построены в [20], аппроксимация 0-го порядка решения линейной нестационарной СВС, содержащей постоянное запаздывание в медленной и быстрой переменных состояния только в уравнении медленной переменной — в [21].

2 Описание системы. Постановка задачи

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему с постоянным запаздыванием по состоянию (ЛНСВСЗ) следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{10}(t)x(t) + A_{11}(t)x(t-h) + A_{20}(t)y(t) + A_{21}(t)y(t-h), \\ \mu \dot{y}(t) &= A_{30}(t)x(t) + A_{31}(t)x(t-h) + A_4(t)y(t), \quad t \in T \triangleq [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\{x_0(\cdot), y_0(\cdot)\} = \{(\varphi(\theta), \theta \in T_h), (\psi(\theta), \theta \in T_h)\}, \quad T_h \triangleq [t_0 - h, t_0]. \quad (2)$$

Здесь x — медленная переменная, y — быстрая переменная, $x \in \mathbb{R}^{n_1}, y \in \mathbb{R}^{n_2}, \mu$ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1, h = \text{const} > 0$ — запаздывание, $A_{ij}(t), i = 1, 2, 3, j = 0, 1, A_4(t)$, — матричные функции подходящих размеров, элементы которых предполагаются достаточно гладкими (точная гладкость указана ниже), $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ — заданные на T_h кусочно-непрерывные n_1 - и n_2 -вектор-функции, соответственно.

Здесь и далее запись $f(\cdot)$ означает реализацию функции $f(t), (t \in T)$, рассматриваемую как элемент некоторого пространства функций.

Обозначим $n = n_1 + n_2, z' = (x', y'), \chi(\cdot) \triangleq (\varphi'(\cdot), \psi'(\cdot))', ' — символ транспонирования.$

Представим правую часть ЛНСВСЗ (1) в операторной форме. Для этого введем оператор дифференцирования $p \triangleq \frac{d}{dt}$ и оператор чистого запаздывания $e^{-ph}: e^{-ph}x(t) = x(t-h)$.

Обозначим $\mathcal{M} = \text{diag}\{E_{n_1}, \mu E_{n_2}\}$ и определим множество $\mathcal{A}_\mu$ непрерывных на T операторов $\mathbf{A}_\mu$ правой части системы (1)

$$\mathbf{A}_\mu \triangleq \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) = \mathcal{M}^{-1} \mathbf{A}(t, e^{-ph}) \in \mathcal{A}_\mu.$$

Здесь $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})$ — это функциональный блочный матричный оператор вида

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = A_0(t) + A_1(t) e^{-ph} \in \mathcal{A},$$

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} A_{10}(t) & A_{20}(t) \\ A_{30}(t) & A_4(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) \\ A_{31}(t) & 0_{n_2 \times n_2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

из класса $\mathcal{A}$ непрерывных ограниченных на T операторов.

Тогда систему (1), (2) можно записать в виде

$$\mathbf{A}_\mu : \dot{z}(t) = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) z(t) \quad (4)$$

с начальными условиями:

$$z_0(\cdot) = \chi(\theta), \quad \theta \in T_h. \quad (5)$$

При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ под состоянием ЛНСВСЗ (1) в момент времени $t \in T$ понимаем непрерывную на $[t-h, t]$ n -вектор функцию $z(t+\theta, \mu), \theta \in [-h, 0]$.

Следуя [22, стр. 50], введем следующее определение.

Определение 1. При фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ решением ЛНСВСЗ (1) с начальными условиями (2) называется непрерывная на T n -вектор-функция $z(t, \mu) = (x'(t, \mu), y'(t, \mu))', z: T_h \cup T \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой верно $z(\theta, \mu) = \chi(\theta), \theta \in T_h$, и компоненты $x(t, \mu), y(t, \mu), t \in T$, удовлетворяют системе (1).

С ЛНСВСЗ (1) связаны независимые от параметра μ вырожденная система (ВС) и система погранслоя (СП), которые формально получаются из системы (1), если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$.

Пусть $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$. Тогда ВС имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_{s0}(t)x_s(t) + A_{s10}(t)x_s(t-h) + A_{21}(t)\psi(t-h), \quad t \in [t_0, t_0+h], \\ \dot{x}_s(t) &= A_{s0}(t)x_s(t) + A_{s1}(t)x_s(t-h) + A_{s2}(t)x_s(t-2h), \quad t \in [t_0+h, t_1], \\ x_s(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in T_h, \quad x_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{s0}(t) &=: A_{10}(t) - A_{20}(t)A_4^{-1}(t)A_{30}(t), \\ A_{s10}(t) &=: A_{11}(t) - A_{20}(t)A_4^{-1}(t)A_{31}(t), \\ A_{s1}(t) &=: A_{11}(t) - A_{20}(t)A_4^{-1}(t)A_{31}(t) - A_{21}(t)A_4^{-1}(t-h)A_{30}(t-h), \\ A_{s2}(t) &=: -A_{21}(t)A_4^{-1}(t-h)A_{31}(t-h), \end{aligned} \quad (7)$$

и является n_1 -мерной нестационарной системой с запаздыванием в состоянии.

Система погранслоя, соответствующая (1), может быть получена, если рассмотреть ЛНСВСЗ (1) в «растянутой» шкале времени: $\tau = \frac{t-t_0}{\mu}$, и положить $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} y_f(\tau) &= A_4(t_0)y_f(\tau), \quad \tau \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1-t_0}{\mu}\right], \\ y_f(\tau) &= y(t_0 + \mu\tau), \quad y_f \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ y_f(0) &= \psi(t_0) + A_4^{-1}(t_0)A_{30}(t_0)\varphi(t_0) + A_4^{-1}(t_0)A_{31}(t_0)\varphi(t_0-h). \end{aligned} \quad (8)$$

СП (8) является стационарной системой размерности n_2 без запаздывания.

Определение 2. Для любого k , $k = 0, 1, \dots$, функция $z^k(t, \mu) = (x^{k'}(t, \mu), y^{k'}(t, \mu))'$, $z^k : T_h \cup T \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ называется *асимптотической аппроксимацией k -го порядка* решения $z(t, \mu)$ ЛНС-ВСЗ (1), (2), если существует независимая от μ положительная константа C такая, что при всех достаточно малых значениях параметра $\mu > 0$ для каждого $t \in T$ верно $\|z(t, \mu) - z^k(t, \mu)\| \leq C\mu^{k+1}$, где $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. Если константа не зависит от t , то аппроксимация равномерна по t .

Задача. Построить равномерную на T асимптотическую аппроксимацию решения ЛНСВСЗ (1), (2) на основе решений ВС (6) и СП (8).

3 Преобразование задачи ЛНСВСЗ

Доказательство основного результата в следующем разделе использует метод преобразований, для корректного применения которого используем погружение ЛНСВСЗ в семейство систем.

Рассмотрим множество Σ начальных задач (1)-(2) в виде (4)-(5) для системы (4) с пространством состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$, множеством начальных состояний $\Phi_0 \triangleq PC(T_h; \mathbb{R}^n)$, где $PC(\mathcal{T}; \mathbb{R}^n)$ — множество кусочно-непрерывных на $\mathcal{T}$ n -вектор функций.

Сопоставим множеству Σ множество начальных задач Σ_2 в расширенном пространстве состояний. Для этого продолжим с $T = [t_0, t_1]$ на $[t_0 - 3h, t_1]$ матричные функции системы (1) так, что они непрерывно дифференцируемы. Сохраним для них прежние обозначения. Функции $\varphi(\theta), \psi(\theta)$ доопределим влево: $\varphi(\theta) \equiv 0, \psi(\theta) \equiv 0, \theta < t_0 - h$.

Пусть $M_j^m(t)$, $m = \overline{0, 2}$, $j = \overline{0, 3}$, — $n \times n$ -матричные функции с ограниченными кусочно-непрерывными на $[t_0 - 3h, t_1]$ элементами. Погрузим определенные выше классы операторов $\mathcal{A}, \mathcal{A}_\mu$ в классы $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{\mu 2}$, операторов $\mathbf{O}_2 \in \mathcal{O}_2$ и $\mathbf{O}_{\mu 2} \in \mathcal{O}_{\mu 2}$ вида

$$\mathbf{O}_2(t, \mu, e^{-ph}) = \sum_{j=0}^3 \sum_{m=0}^2 \mu^m M_j^m(t) e^{-jph}, \quad \mathbf{O}_{\mu 2}(t, \mu, e^{-ph}) = M^{-1} \cdot \mathbf{O}_2(t, \mu, e^{-ph})$$

и рассмотрим множество начальных задач $\tilde{\Sigma}_2$ для системы в расширенном пространстве состояний $PC([t-3h, t]; \mathbb{R}^n)$ вида

$$\mathbf{O}_{\mu 2} : \dot{z}(t) = \mathbf{O}_2(t, \mu, e^{-ph}) z(t) + \Phi(t), \quad \Phi(\cdot) \in PC(T; \mathbb{R}^n), \quad (9)$$

с начальными условиями

$$z_{02}(\cdot) = \chi_2(\theta), \quad \theta \in [t_0 - 3h, t_0], \quad \chi_2(\cdot) \in \Phi_{02} \triangleq PC([t_0 - 3h, t_0]; \mathbb{R}^n). \quad (10)$$

Выделим подклассы $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{O}_2$, $\mathcal{A}_{\mu 2} \subset \mathcal{O}_{\mu 2}$, которые получаются, если $M_0^0(t), M_1^0(t)$ имеют вид $A_0(t), A_1(t)$ (3) и все остальные $M_j^m(t) \equiv 0, t \in T$.

Пусть зафиксирован оператор $\mathbf{A}_\mu \in \mathcal{A}_\mu$ и согласно определенным выше вложениям ему соответствует оператор $\mathbf{A}_{\mu 2} \in \mathcal{A}_{\mu 2}$. Множеству Σ начальных задач для системы (4) с пространством состояний $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$ поставим в соответствие множество $\Sigma_2 \subset \tilde{\Sigma}_2$ начальных задач для системы $\mathbf{A}_{\mu 2}$ вида (9), (10) с $\mathcal{O}_{\mu 2} = \mathcal{A}_{\mu 2}$, $\Phi(t) \equiv 0$, $t \in T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mu 2} : \dot{z}(t) &= \mathbf{A}_2(t, \mu, e^{-ph}) z(t), \\ z_{02}(\cdot) &= \chi_2(\theta), \theta \in [t_0 - 3h, t_0], \quad \chi_2(\cdot) \in \Phi_{02}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для любой функции $\chi(\cdot) \in \Phi_0$ определим множество $\Phi_{02}(\chi(\cdot)) \subset \Phi_{02}$ всех кусочно-непрерывных продолжений $z_{02}(\cdot) = z_{02}(\cdot, \chi(\cdot))$ ее на $[t_0 - 3h, t_0]$.

Лемма. При любом фиксированном $\mu \in (0, \mu^0]$ для любой $\chi(\cdot) \in \Phi_0$ и любого начального условия $z_{02}(\cdot) = z_{02}(\cdot, \chi(\cdot)) \in \Phi_{02}(\chi(\cdot))$, сужение на $[t_0 - h, t_1]$ решения $z(\cdot; \mu, z_{02}(\cdot))$ задачи (11) из Σ_2 для системы $\mathbf{A}_{\mu 2}$ совпадает с решением $z(\cdot; \mu, \chi(\cdot))$ задачи (4), (5) из Σ для системы $\mathbf{A}_\mu$.

Доказательство. Обозначим $F(t, \tau, \mu)$, $F_2(t, \tau, \mu)$ — матрицы Коши [23, стр. 33] систем $\mathbf{A}_\mu$ (4) и $\mathbf{A}_{\mu 2}$ из (11), соответственно. Решение задачи (11) в форме Коши имеет вид

$$z(t, \mu) = F_2(t, t_0) \chi_2(t_0, \mu) + \int_{t_0 - 3h}^{t_0} F_2(t, s + h, \mu) \mathcal{M}^{-1} A_1(s) z_{02}(s) ds, \quad t \in T.$$

Из определения множества $\Phi_{02}(\chi(\cdot))$ сразу следует $z_{02}(\theta, \chi(\cdot)) \equiv \chi(\theta)$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$. Из определения операторов $\mathbf{A}_\mu$ и $\mathbf{A}_{\mu 2}$ следует, что $\mathbf{A}_\mu(t, e^{-ph}) \equiv \mathbf{A}_{\mu 2}(t, e^{-ph})$, поэтому верно $F_2(t, \tau, \mu) \equiv F(t, \tau, \mu)$, $\tau \geq t_0 - h$, $F_2(t, \tau, \mu) \equiv 0$, $\tau < t_0 - h$. С учетом этого и справедливости $\chi_2(t) \equiv \chi(t)$, $t \in T_h$ для любой $z_{02}(\cdot) \in \Phi_{02}(\chi(\cdot))$, представление в форме Коши для решения задачи (11) совпадает с представлением решения начальной задачи для системы $\mathbf{A}_\mu$ с начальным условием $\chi(\cdot) \in \Phi_0$. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, от исследования решений системы $\mathbf{A}_\mu$ (4) с начальными условиями (5) можно перейти к анализу решений задачи (11) для системы $\mathbf{A}_{\mu 2}$ при $\chi_2(\cdot) \in \Phi_{02}^0(\chi(\cdot))$, $\chi(\cdot) \in \Phi_0$, где $\Phi_{02}^0(\chi(\cdot))$ — продолжение влево функции $\chi(\cdot)$ с $\varphi(\theta) = 0$, $\psi(\theta) = 0$, $\theta < t_0 - h$.

Определим матричные функции:

$$L_j(t) := A_4^{-1}(t) A_{3j}(t), \quad H_j(t) := A_{2j}(t) A_4^{-1}(t - jh), \quad j = 0, 1, \quad t \in [t_0 - h, t_1]. \quad (12)$$

В классе систем вида (9) применимо нелокальное (по времени) преобразование переменных состояния системы:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad \xi(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \eta(t) \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in T, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) &= \\ &= \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu(\mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}_1(t) e^{-ph}) \\ -(\mathbf{L}_0(t) + \mathbf{L}_1(t) e^{-ph}) & E_{n_2} - \mu(\mathbf{L}_0(t) + \mathbf{L}_1(t) e^{-ph})(\mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}_1(t) e^{-ph}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Несложно проверить, что оператор $\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph})$ унимодулярный и обратимый $\forall \mu > 0$, $\forall t \in T$. При этом справедливо представление

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph})) &= \\ &= \begin{pmatrix} E_{n_1} - \mu(\mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}_1(t) e^{-ph})(\mathbf{L}_0(t) + \mathbf{L}_1(t) e^{-ph}) & -\mu(\mathbf{H}_0(t) + \mathbf{H}_1(t) e^{-ph}) \\ (\mathbf{L}_0(t) + \mathbf{L}_1(t) e^{-ph}) & E_{n_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \mathbf{K}^{-1}(t, \mu, e^{-ph}) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T. \quad (16)$$

4 Основной результат

Теорема. Пусть 1) матричные функции $L_j(t)$, $H_j(t)$, $j = 0, 1$ определены и непрерывно дифференцируемы на $[t_0 - h, t_1]$; 2) функции

$$L_1(t+h) \varphi(t), \quad H_1(t+h) (L_0(t) \varphi(t) + \psi(t)) + H_0(t+h) L_1(t+h) \varphi(t)$$

имеют ограниченные производные на $[t_0 - h, t_0]$; 3) корни $\lambda(A_4(t))$ характеристического уравнения матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) < -\gamma < 0 \quad \forall t \in T, \gamma = \operatorname{const} > 0$. Тогда существует $\mu^* > 0$ такое, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ функции

$$x^0(t) = x_s(t), y^0(t) = y_f\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) - L_0(t)x_s(t) - L_1(t)x_s(t-h), \quad t \in T, \quad (17)$$

где $x_s(t), y_f(t)$ — решения ВС (6) и СП (8), являются равномерными на T асимптотическими аппроксимациями 0-го порядка решения задачи (1), (2):

$$x(t) = x^0(t) + O(\mu), y(t) = y^0(t) + O(\mu), \quad t \in T. \quad (18)$$

Доказательство проведем по схеме доказательства теоремы из [21]. Рассмотрим ЛНСВСЗ в виде (4)-(5). Согласно лемме от исследования решений начальной задачи из Σ для системы $\mathbf{A}_\mu$ (4) можно перейти к анализу решений начальной задачи (11) из $\Sigma_2 \subset \tilde{\Sigma}_2$ для системы $\mathbf{A}_{\mu 2} \in \mathcal{A}_{\mu 2} \subset \mathcal{O}_{\mu 2}$. Выполним в (11) замену переменных (13). С учетом начальных условий (2) из (15), (16) имеем:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (E_{n_1} - \mu H_0(t)L_0(t))x(t) - \mu(H_0(t)L_1(t) + H_1(t)L_0(t-h))\varphi(t-h) - \\ &\quad - \mu H_0 y(t) - \mu H_1 \psi(t-h), \\ \eta(t) &= L_0(t)x(t) + L_1(t)\varphi(t-h) + y(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (E_{n_1} - \mu H_0(t)L_0(t))x(t) - \mu(H_0(t)L_1(t) + H_1(t)L_0(t-h))x(t-h) - \\ &\quad - \mu^2 H_1(t)L_1(t-h)\varphi(t-2h) - \mu H_0 y(t) - \mu H_1 y(t-h), \\ \eta(t) &= L_0(t)x(t) + L_1(t)x(t-h) + y(t), \quad t \in [t_0 + h, t_0 + 2h), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (E_{n_1} - \mu H_0(t)L_0(t))x(t) - \mu(H_0(t)L_1(t) + H_1(t)L_0(t-h))x(t-h) - \\ &\quad - \mu^2 H_1(t)L_1(t-h)x(t-2h) - \mu H_0 y(t) - \mu H_1 y(t-h), \\ \eta(t) &= L_0(t)x(t) + L_1(t)x(t-h) + y(t), \quad t \in [t_0 + 2h, t_1]. \end{aligned} \quad (21)$$

При выполнении условий 1), 2) теоремы правые части этих выражений дифференцируемы на T . Получим уравнения динамики ЛНСВС (4) в новых переменных $\xi(t), \eta(t)$. Для этого продифференцируем равенства (19)-(21). Используя производные в силу системы (4), замену переменных (14), вид оператора преобразования (14) и выполняя алгебраические преобразования с учетом определяющих и алгебраических свойств оператора запаздывания получим уравнения динамики ЛНСВСЗ в новых переменных состояния:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (A_{\xi 0}^0(t) + \mu A_{\xi 0}^1(t))\xi(t) + (\hat{A}_{\xi 1}^0(t) + \mu A_{\xi 1}^1(t))\xi(t-h) + \\ &\quad + \mu \sum_{j=0}^2 \sum_{m=0}^1 \mu^m A_{\xi \eta j}^m(t)\eta(t-jh) + (A_{21}(t) + \mu \Phi_{\xi 0}(t))\psi(t-h), \quad t \in [t_0, t_0 + h), \\ \dot{\xi}(t) &= \sum_{j=0}^2 \sum_{m=0}^1 \mu^m A_{\xi j}^m(t)\xi(t-jh) + \mu \sum_{j=0}^3 \sum_{m=0}^1 \mu^m A_{\xi \eta j}^m(t)\eta(t-jh) - \mu^2 \Phi_{\xi 1}(t), \quad t \in [t_0 + h, t_0 + 2h), \\ \dot{\xi}(t) &= \sum_{j=0}^2 \sum_{m=0}^1 \mu^m A_{\xi j}^m(t)\xi(t-jh) + \mu \sum_{j=0}^3 \sum_{m=0}^1 \mu^m A_{\xi \eta j}^m(t)\eta(t-jh), \quad t \in [t_0 + 2h, t_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \dot{\eta}(t) &= A_4(t)\eta(t) + \mu \sum_{j=0}^1 A_{\eta \xi j}(t)\xi(t-jh) + \mu \sum_{j=0}^2 \sum_{m=0}^1 A_{\eta j}^m(t)\eta(t-jh) + \mu \Phi_{\eta 0}(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h), \\ \mu \dot{\eta}(t) &= A_4(t)\eta(t) + \mu \sum_{j=0}^2 A_{\eta \xi j}(t)\xi(t-jh) + \mu \sum_{j=0}^3 \sum_{m=0}^1 A_{\eta j}^m(t)\eta(t-jh), \quad t \in [t_0 + h, t_1], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{\xi 0}^0(t) &:= A_{10}(t) - H_0(t)A_{30}(t), \quad \hat{A}_{\xi 1}^0(t) := A_{11}(t) - H_0(t)A_{31}(t), \\ A_{\xi 1}^0(t) &:= A_{11}(t) - H_0(t)A_{31}(t) - H_1(t)A_{30}(t-h), \quad A_{\xi 2}^0(t) := -H_1(t)A_{31}(t-h), \quad t \in T, \\ \Phi_{\xi 0}(t) &:= H_0(t)L_0(t)A_{21}(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h), \\ \Phi_{\eta 0}(t-h) &:= L_0(t)A_{11}(t)\varphi(t-h) + L_0(t)A_{21}(t)\psi(t-h) + \frac{d}{dt}(L_1(t)\varphi(t-h)), \quad t \in [t_0, t_0 + h), \\ \Phi_{\xi 1}(t) &:= \frac{d}{dt}(H_1(t)L_1(t-h)\varphi(t-2h)), \quad t \in [t_0 + h, t_0 + 2h), \end{aligned}$$

а кусочно-непрерывные матричные функции $A_{\xi j}^1(t), j = \overline{0, 2}, A_{\xi \eta j}^m(t), A_{\eta j}^m(t), m = 0, 1, j = \overline{0, 3}$, выражаются через матричные функции $A_{ij}(t), i = 1, 2, 3, j = 0, 1, A_4(t)$ системы (1).

При выполнении условия 3) теоремы функции $x(t), y(t)$ ограничены на $[t_0 - h, t_1]$ и с учетом представления (19)–(21) функции $\xi(t), \eta(t)$, $t \in [t_0 - 3h, t_1]$ также ограничены. Поэтому из последних выражений с учетом (7), (12) получим:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (A_{s0}(t) + O(\mu))\xi(t) + (A_{s10}(t) + O(\mu))\xi(t - h) + \\ &+ A_{21}(t)\psi(t - h) + O(\mu), \quad t \in [t_0, t_0 + h], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \sum_{j=0}^2 (A_{sj}(t) + O(\mu))\xi(t - jh) + O(\mu), \quad t \in [t_0 + h, t_1], \\ \mu \dot{\eta}(t) &= (A_4(t) + O(\mu))\eta(t) + O(\mu), \quad t \in T, \end{aligned} \quad (23)$$

Представим подсистему (23) в быстрой («растянутой») шкале времени. Для этого выполним замену независимой переменной $\tau = \frac{t - t_0}{\mu}$. Получаем с учетом $\mu \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$:

$$\frac{d}{d\tau} \eta(\mu\tau + t_0) = (A_4(\mu\tau + t_0) + O(\mu))\eta(\mu\tau + t_0) + O(\mu), \quad \tau \in T_\mu.$$

Матричная функция $A_4(t)$ дифференцируема для $t \geq t_0$. Используем линейную аппроксимацию функции $A_4(\mu\tau + t_0)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\mu = 0$:

$$A_4(\mu\tau + t_0) = A_4(t_0) + O(\mu). \quad (24)$$

Введем новую функцию: $\tilde{\eta}(\tau) = \eta(\mu\tau + t_0)$ $\tau \in [-\tilde{h}, 0] \cup T_\mu$ и подставим аппроксимацию (24) в (22). Получим

$$\frac{d\tilde{\eta}(\tau)}{d\tau} = (A_4(t_0) + O(\mu))\tilde{\eta}(\tau) + O(\mu), \quad \tau \in T_\mu. \quad (25)$$

Система (22), (25), полученная в результате преобразования зависимых и независимой переменных исходной сингулярно возмущенной системы (1) в виде (11), эквивалентна ей и является (в отличие от исходной ЛНСВСЗ (1)) регулярно возмущенной.

Начальные условия для (22) и (25) получаем в соответствии с заменой (16). С учетом (2), (15) они имеют вид:

$$\begin{aligned} \xi(\theta) &= \varphi(\theta) + O(\mu), \\ \tilde{\eta}(0) &= \psi(t_0) + A_4^{-1}(t_0)A_{30}(t_0)\varphi(t_0) + A_4^{-1}(t_0)A_{31}(t_0)\varphi(t_0 - h). \end{aligned} \quad (26)$$

Опуская в (22), (25), (26) члены порядка $O(\mu)$, приходим к системе 0-го порядка аппроксимации, которая совпадает с ВС (6) и СП (8).

Сравнивая начальные задачи (6), (8) и (22), (25), (26) и учитывая непрерывную зависимость решений задачи (6), (8) от начальных условий и параметров, убеждаемся в справедливости аппроксимации

$$x_s(t) = \xi(t) + O(\mu), \quad t \in T, \quad y_f(\tau) = \tilde{\eta}(\tau) + O(\mu), \quad \tau \in T_\mu. \quad (27)$$

Применяя теперь обратное преобразование (14) к решению (27) преобразованной системы (22), (25) получаем равенства (17), (18), что завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание. В частном случае при отсутствии запаздывающих членов в (1) теорема совпадает с теоремой 6.1 [11, стр. 227], при запаздывании только в уравнении медленного движения — с теоремой из [21], при запаздывании только в медленной переменной — с теоремой 3 из [20] при более слабых условиях на начальную функцию.

5 Пример

Пусть система (1), (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -tx(t) + x(t - h) + y(t - h), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \mu \dot{y}(t) &= -x(t) + x(t - h) - y(t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 5h], \\ \varphi(\theta) &= -1, \quad \psi(\theta) = 2, \quad \theta \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (28)$$

Для системы (28) выполнены условия теоремы, ее ВС (6) и СП (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= (\sin t - t)x_s(t) + (1 - \sin t)x_s(t - h) + \psi(t - h), \quad t \in [0, h], \\ x_s(\theta) &= \varphi(\theta) = -1, \quad \theta \in [-h, 0], \\ \dot{x}_s(t) &= (\sin t - t)x_s(t) + (-\sin t)x_s(t - h) + x_s(t - 2h), \quad t \geq h, \\ \frac{d}{d\tau}y_f(\tau) &= -y_f(\tau), \quad \tau \in [0, \mu^{-1}5h], \\ y_f(0) &= \psi(0) + \varphi(0) - \varphi(-h) = -h/2. \end{aligned}$$

Сравнение точного решения с аппроксимацией 0-го порядка решения при $h = 2$, для $\mu = 0.1$ показано на рисунке 1.

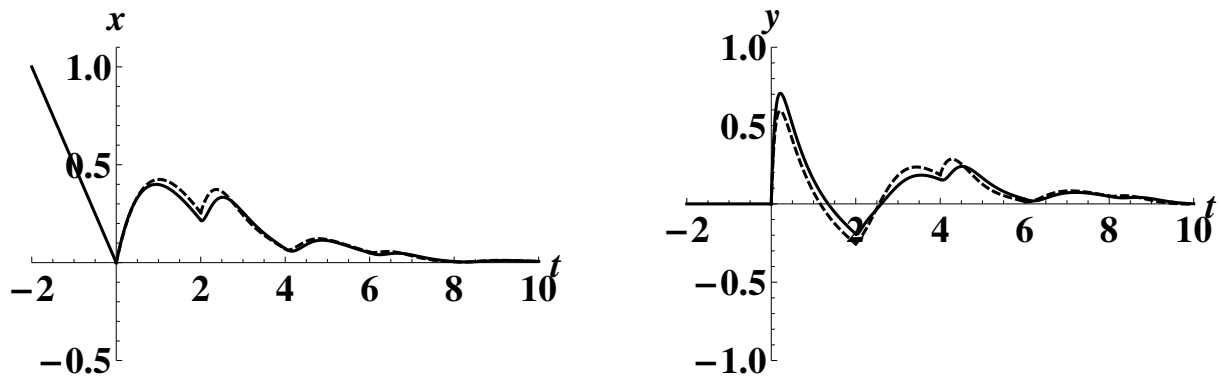


Рис. 1: x -компонента (слева) и y -компонента (справа) точного решения (сплошная линия) и их асимптотическая аппроксимация 0-го порядка (пунктир) для примера при $\mu = 0.1$.)

Для сравнения качества аппроксимации решения при различных значениях малого параметра, рассчитаем интегральную норму ошибок ($\varepsilon_x = x(\cdot) - x^0(\cdot)$, $\varepsilon_y = y(\cdot) - y^0(\cdot)$) аппроксимации 0-го порядка на интервале $[0, 10]$ (табл. 1).

Таблица 1: Интегральная норма ошибок аппроксимаций решения ЛНСВСЗ (28)

	$\mu = 0.2$	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.01$
$\ \varepsilon_x\ _1$	0.190723	0.112682	0.0129488
$\ \varepsilon_y\ _1$	0.595192	0.357266	0.0415529

Сравнение ошибок из табл. 1 подтверждает, что с уменьшением значения μ ошибка аппроксимации уменьшается.

6 Заключение

Развиваемый в работе метод построения асимптотических аппроксимаций решения задачи Коши для ЛНСВСЗ, основанный на операторном представлении ЛНСВСЗ и погружении ее в семейство систем в кольце степенных рядов в расширенном пространстве состояний с использованием асимптотических, алгебраических методов и метода преобразований, сводит построение аппроксимаций решения ЛНСВСЗ (1), (2) к решению не зависящих от малого параметра подзадач для систем меньшей размерности (6), (8), часть из которых является стационарными. Декомпозированные подсистемы можно решать параллельно, использовать для их решения разные по масштабам времени шкалы и различные методы.

Функции $x^0(t)$, $y^0(t)$, (17), выраженные через решения более простых, чем исходная ЛНСВСЗ, подсистем (6) и (8), являются равномерными (по t) асимптотическими (по μ) аппроксимациями 0-го порядка решения ЛНСВСЗ (1), (2). Аналогично можно построить аппроксимации решения ЛНСВСЗ (1), (2) более высоких порядков. Результаты можно распространить на системы со многими соизмеримыми запаздываниями.

Результаты можно использовать для создания алгоритмов управления и наблюдения системами автоматического управления, реальными физическими, техническими, биологическими, экономическими системами с разнотемповыми движениями и запаздыванием.

Благодарности

Исследование выполнено при частичной поддержке Министерства образования Республики Беларусь (ГПНИ “Конвергенция–2025”, задание 1.2.04).

Литература

1. Васильева, А. Б., Бутузов, В. Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, М.: Наука, 1973.
2. Васильева, А. Б., Дмитриев, М. Г. *Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ., 20, ВИНТИ, М. 1982. С. 3–77.
3. Дмитриев, М. Г., Курина, Г. А. *Сингулярные возмущения в задачах управления* // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
4. Kurina, G. A., Dmitriev, M. G., Naidu, D. S. *Discrete singularly perturbed control problems (a survey)* // Dyn. contin. discrete impuls. syst. Ser. B Appl. Algorithms. 2017. Vol. 24. P. 335–370.
5. Glizer, V. Y. *Controllability of singularly perturbed linear time delay systems*, Springer International Publishing, 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-65951-6>
6. Курина, Г. А., Калашникова, М. А. *Сингулярно возмущенные задачи с разномасштабными быстрыми переменными* // Автоматика и телемеханика. 2022. № 11. С. 3–61. <https://doi.org/10.31857/S0005231022110010>
7. Chang, K. *Singular perturbations of a general boundary value problem* // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1972. Vol. 3. No. 3. P. 520–526. <https://doi.org/10.1137/0503050>
8. Астровский, А. И., Гайшун, И. В. *Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем* // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 3–13.
9. Гайшун, И. В. *Введение в теорию линейных нестационарных систем*, Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1999.
10. Астровский, А. И. *Наблюдаемость линейных нестационарных систем*, Минск: МИУ, 2007.
11. Kokotovic, P. V., Khalil, H. K., O'Reilly, J. *Singular perturbations methods in control: analysis and design*, NY: Academic Press, 1999.
12. Марченко, В. М. *Преобразования систем с запаздывающим аргументом* // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 12. № 10. С. 1882–1884.
13. Кириллова, Ф. М., Марченко, В. М. *Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом*, Мн.: Изд-во ИМ АН БССР, 1978.
14. Марченко, В. М., Луазо, Ж.-Ж. *Реализация динамических систем в шкалах систем с последствием: I. Реализуемость* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1515–1523.
15. Califano, C., Moog, C. H. *Canonical forms of time-delay systems* // 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2012. P. 3862–3867.
16. Цехан, О. Б. *Достаточные условия спектральной управляемости на основе декомпозиции линейной стационарной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2017. Т. 7. № 3. С. 51–65.
17. Tsekhan, O. B. *Complete controllability conditions for linear singularly perturbed time-invariant systems with multiple delays via Chang-type transformation* // Axioms. 2019. Vol. 8. № 71. P. 1–19. <https://doi.org/10.3390/axioms8020071>
18. Naligama, C. A., Tsekhan, O. B. *Decoupling of three-time-scale linear time-invariant singularly perturbed control systems with state delay based on a nondegenerate transformation* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2021. Т. 11. № 3. С. 27–36.
19. Цехан, О. Б. *Декомпозиция сингулярно возмущенной функционально-дифференциальной системы на основе невырожденного преобразования* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 190. С. 130–143. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-190-130-143>
20. Tsekhan, O. *Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay* // Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. V. 407. / Tchemisova, T. V., Torres, D. F. M., Plakhov, A. Y. (Eds). Cham: Springer, 2021. P. 77–97. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-17558-9>
21. Цехан, О. Б. *Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2024. Т. 14. № 1. С. 37–47.
22. Хейл, Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, М.: Мир, 1984.
23. Габасов, Р. Ф., Кириллова, Ф. М. *Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа*, Мн.: Изд-во БГУ, 1973.

Научное издание

**Труды 11-го международного семинара
“Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений”
(АМАДЕ-2024)
16–20 сентября 2024 года, Минск, Беларусь**

Scientific edition

**Proceedings of the 11 th International Workshop
“Analytical Methods of Analysis and Differential Equations”
(AMADE-2024)
September 16–20, 2024, Minsk, Belarus**

Редактор: Рогозин С. В.
Технический редактор: Дубровина О. В.

Подписано в печать 10.12.2024
Формат 60×84/8 Усл. печ. л. 11,17 Уч.-изд. л. 10,6 Тираж экз. **40**. Заказ № **609**.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Республиканское унитарное предприятие “Информационно-вычислительный центр Министерства финансов Республики Беларусь”.
Свидетельства о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий №1/161 от 27.01.2014, №2/41 от 29.01.2014.
Ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.