

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

10 июня 2024 г.

Регистрационный №1773/б.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-08 Компьютерная математика и системный анализ

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-08-2023, учебных планов БГУ № 6-5.4 – 56/01 от 15.05.2023 и № 6-5.4 – 56/11 ин. от 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

Дмитрий Федорович Базылев – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Виталий Владимирович Балащенко – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Глеб Олегович Кукрак – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Владимир Леонидович Тимохович – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕЦЕНЗЕНТ:

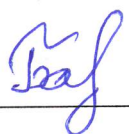
Николай Васильевич Гриб – заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики физико-математического факультета учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка», кандидат педагогических наук, доцент;

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ (протокол № 10 от 31.05.2024);

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 8 от 31.05.2024)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики



Д.Ф. Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» является одной из основных дисциплин, которые изучаются студентами-математиками на втором году обучения в университете. Понятия и основные факты этой дисциплины используются при изучении ряда других математических дисциплин, в первую очередь таких, как «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Теоретическая механика»

Цели и задачи учебной дисциплины

Главными **целями** учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» являются:

- Освоение новых математических понятий: метрического пространства, топологического пространства, линии и поверхности в евклидовом пространстве;
- Приобретение студентами знаний в основах общей топологии и теории линий и поверхностей;
- Овладение методами исследования, характерными для общей топологии и дифференциальной геометрии;
- Приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области дифференциальной геометрии и топологии для их использования при изучении других математических дисциплин.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи**:

- Определяются понятия метрического и топологического пространств. Излагаются основные факты, относящиеся к геометрии топологических пространств, свойства непрерывных отображений, свойства связных и компактных пространств;
- Изучаются линии и поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, являющиеся основными объектами исследования в классической дифференциальной геометрии.

В начале изучения дисциплины излагаются основы теории метрических и топологических пространств. При этом особое внимание уделяется свойствам непрерывных отображений, а также таким свойствам топологических пространств как связность и компактность, поскольку владение этим материалом необходимо для изучения ряда других математических дисциплин.

Далее рассматриваются линии и поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве. Здесь излагается классический материал дифференциальной геометрии: репер Френе, кривизна и кручение линий, понятия и факты теории поверхностей, связанные с первой и второй квадратичными формами.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» относится к **дополнительным видам обучения**.

Изучение дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» в течение всего срока обучения проходит во **взаимосвязи** с дисциплинами:

«Алгебра и теория чисел» и «Математический анализ».

Требование к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» должно обеспечить формирование следующей специализированной компетенции:

СК. Применять основные алгебраические, геометрические и топологические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- понятия метрического и топологического пространств;
- свойства непрерывных отображений метрических и топологических пространств, свойства связных и компактных пространств;
- понятия линии и поверхности в трехмерном евклидовом пространстве и их характеристики;

уметь:

- находить замыкание, внутренность и границу множеств в метрических и топологических пространствах, определять, является ли пространство связным, компактным;
- вычислять кривизну и кручение линии, использовать понятия первой и второй квадратичных форм для исследования поверхности;

иметь навык:

- применения методов общей топологии и дифференциальной геометрии при решении геометрических задач.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» отведено:

- для очной формы получения высшего образования: 108 часов, в том числе 54 аудиторных часа, из них: лекции – 18 часов, практические занятия – 32 часа, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Основы топологии

Тема 1.1. Метрические и топологические пространства и их геометрия.

Понятие метрического пространства. Топология метрического пространства. Топологические пространства. Подпространства метрических и топологических пространств. Замкнутые множества. Замыкание, внутренность и граница множеств.

Тема 1.2. Непрерывные отображения.

Понятие непрерывного отображения. Непрерывность композиции. Критерии непрерывности. Гомеоморфизмы.

Тема 1.3. Связность и компактность.

Связные пространства. Сохранение связности непрерывными отображениями. Теорема о промежуточных значениях. Линейно связные пространства. Компактные пространства. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. Сохранение компактности непрерывными отображениями. Обобщение теоремы Вейерштрасса.

Раздел 2. Линии в E^3

Тема 2.1. Линии и способы их задания. Касательная к линии.

Параметризованные кривые в E^3 и вектор-функции одной переменной. Понятие линии. Примеры и способы задания линий. Касательная к линии.

Тема 2.2. Длина дуги. Натуральная параметризация.

Параметризованные кривые в E^3 и вектор-функции одной переменной. Понятие линии. Примеры и способы задания линий. Касательная к линии.

Тема 2.3. Кривизна линии.

Кривизна линии и формула для её вычисления. Механический смысл кривизны. Условие биегularity и его геометрический смысл.

Тема 2.4. Репер Френе.

Репер Френе биегularityной линии. Координатные прямые и плоскости репера Френе. Свойства соприкасающейся плоскости.

Тема 2.5. Формулы Френе. Кручение.

Формулы Френе. Кручение, его механический смысл и формула для его вычисления.

Раздел 3. Поверхности в E^3 .

Тема 3.1. Поверхности и способы их задания.

Вектор-функции двух переменных. Поверхности и способы их задания. Линии на поверхности.

Тема 3.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательное пространство и касательная плоскость к поверхности. Нормаль к поверхности.

Тема 3.3. Первая квадратичная форма поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление дуги линии на поверхности и величины угла между линиями.

Тема 3.4. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.

Ориентация поверхности. Нормальная кривизна линии на ориентированной поверхности и вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и главные направления поверхности. Полная и средняя кривизна. Типы точек на поверхности.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Иное	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия	Семинарские занятия	Практические занятия	Количество часов УСР		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 семестр								
1	Основы топологии	6			8			
1.1	Метрические и топологические пространства и их геометрия	2			4			Опрос
1.2	Непрерывные отображения	2			2			Опрос
1.3	Связность и компактность	2			2			Опрос
2	Линии в E^3	6			12	2		
2.1	Линии и способы их задания. Касательная к линии.	2			2			Опрос
2.2	Длина дуги. Натуральная параметризация.				2			Опрос
2.3	Кривизна линии.	2			2			Опрос
2.4	Репер Френе.				4	2		Контроль ная работа
2.5	Формулы Френе. Кручение.	2			2			Опрос
3	Поверхности в E^3	6			12	2		
3.1	Поверхности и способы их задания.	2			2			Опрос
3.2	Касательная плоскость и нормаль к поверхности.				2			Опрос
3.3	Первая квадратичная форма поверхности.	2			4			Опрос
3.4	Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.	2			4	2		Контроль ная работа
	Всего по учебной дисциплине	18			32	4		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии: учебник для государственных университетов / П. К. Рашевский. - Изд. стер. - Москва: URSS: ЛКИ, 2021. - 428 с.
2. Александров, П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию: учебное пособие / П. С. Александров. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2024. - 367 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210431>.
3. Подран, В. Е. Элементы топологии: учебное пособие для студентов [вузов], обучающихся по направлению "Физико-математическое образование" / В. Е. Подран. - Изд. 3-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2020. - 186 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/147138>.
4. Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию: учебное пособие для студ. высших учебных заведений, обуч. по спец. "Математика" / В. И. Паньженский. - Изд. 2-е, испр. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2024. - 236 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212126>.
5. Павлов, Е. А. Дифференциальная геометрия в упражнениях и задачах: учебное пособие / Е. А. Павлов, О. И. Рудницкий. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2022. - 74 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/195518>.

Дополнительная литература

1. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: учебное пособие. – М., Наука, 1987. – 478 с.
2. Дифференциальная геометрия. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – Минск: БГУ, 1982. – 255 с.
3. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – 2-е издание. М: Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., 1979. — 272 с.
4. Топология. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1990, 318 с.
5. Радыно, Я. В. Элементы общей топологии для студентов-аналитиков / Я. В. Радыно, А. Я. Радыно, Е. М. Радыно. - Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2015. - 295 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- контрольные работы;
- устный опрос.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» учебным планом предусмотрен зачёт в 3 семестре.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.4. Репер Френе. (2ч.)

1. Найти касательные к линии $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$, параллельные прямой $2x - y + 3 = 0$
2. Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.
3. Найти кривизну линии $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$ в произвольной точке.
4. Написать уравнение соприкасающейся плоскости линии $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = -t \sin t \\ z = at \end{cases}$ в начале координат.
5. Написать уравнение главной нормали и бинормали линии $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ при $t = 1$.

Форма контроля – контрольная работа № 1 (примерный вариант).

Тема 3.4. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности. (2ч.)

1. Для поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$ в точке $M(u = 2, v = \frac{\pi}{4})$ напишите
 - (а) уравнение касательной плоскости, (б) уравнение нормали, (в) уравнение касательной к линии $u = 2$.
2. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3; 1; -1)$.

3. Найти косинус угла, под которым пересекаются линии $u + v = 0$ и $u - v = 0$ на поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = av \end{cases}$.

4. На поверхности $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$ найти длину дуги линии $v = au$ между

точками её пересечения с линиями $u = 1, u = 2$.

5. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизну прямого геликоида в произвольной точке.

Форма контроля - контрольная работа № 2 (примерный вариант).

Примерная тематика практических занятий

Основы топологии.

Занятия 1,2. Примеры метрических пространств. Задачи, связанные с нахождением замыкания, внутренности и границы множеств.

Занятие 3. Примеры гомеоморфных фигур в евклидовом пространстве.

Занятие 4. Задачи на применение теоремы о промежуточных значениях. Примеры компактных и не компактных фигур в евклидовом пространстве.

Линии в E^3

Занятие 5. Задачи на нахождение касательных к линиям, заданным различными способами.

Занятие 6. Задачи, связанные с нахождением длины дуги линии. Построение натуральной параметризации для окружности.

Занятие 7. Задачи на нахождение кривизны различных линий.

Занятие 8,9. Определение репера Френе и изучение способов нахождения его координатных прямых и плоскостей для произвольной параметризации. Задачи на свойства соприкасающейся плоскости.

Занятия 10. Задачи на нахождение кручения линий.

Поверхности в E^3

Занятие 11. Примеры поверхностей и их параметризаций.

Занятие 12. Нахождение касательных плоскостей и нормалей к поверхностям, заданным различными способами.

Занятия 13, 14. Задачи, связанные с первой квадратичной формой поверхности.

Занятие 15, 16. Нахождение главных кривизн и полной кривизны поверхностей. Задачи, связанные с определением типов точек на поверхностях.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

эвристический, ориентированный на: - осуществление студентами лично-значимых открытий в процессе подготовки к практическим занятиям по методике преподавания математики; - демонстрацию многообразия решений математических задач, методов, форм, средств и приемов организации учебной деятельности школьников; - творческую самореализацию студентов в процессе создания планов-конспектов уроков и их видеофрагментов; - индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

практико-ориентированный, предполагающий: - освоение содержания образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;

метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности студентов, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

В процессе самостоятельной работы по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и практических занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;

- подготовка к различным формам промежуточной аттестации (контрольной работе и зачету);

- поиск и изучение понятий и фактов из дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», необходимых для усвоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»;

- выполнение домашних заданий; самостоятельное выполнение заданий для лабораторных работ;

- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология»,

является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных и работ, и при сдаче зачета.

К **организационным формам** проведения УСР по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» относится аудиторная деятельность на практических занятиях. **Видами отчетности** УСР являются контрольные работы.

Контроль УСР по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы.

Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Понятие метрического пространства. Примеры. Топология метрического пространства.
2. Подпространство метрического пространства и его топология.
3. Понятие топологического пространства. Открытые и замкнутые множества.
4. Замыкание множества в топологическом пространстве.
5. Внутренность множества в топологическом пространстве.
6. Граница множества в топологическом пространстве.
7. Непрерывные отображения. Примеры. Непрерывность композиции.
8. Критерии непрерывности.
9. Гомеоморфизмы. Примеры.
10. Связные пространства и их простейшие свойства. Примеры.
11. Связность и непрерывные отображения. Теорема о промежуточных значениях.
12. Компактные пространства и их основные свойства.
13. Компактность подпространств. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.
14. Непрерывные отображения компактных пространств. Обобщение теоремы Вейерштрасса.
15. Параметризованные кривые и линии. Способы задания линий.
16. Касательные к линиям, заданным различными способами.
17. Кривизна линии. Механический смысл кривизны.
18. Репер Френе бигулярной линии.
19. Формулы Френе. Кручение.
20. Поверхности и способы их задания.
21. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
22. Первая квадратичная форма поверхности и задачи, решаемые с её помощью.
23. Нормальная кривизна линии на поверхности.
24. Вторая квадратичная форма поверхности.
25. Главные направления и главные кривизны поверхности.

26. Формула Эйлера.

27. Полная и средняя кривизна поверхности. Типы точек на поверхности.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)*
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
геометрии, топологии и
методики преподавания математики
кандидат физико-математических наук,
доцент

Д.Ф. Базылев

31 . мая 20 24 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета
