

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

10 июня 2024 г.

Регистрационный №1774/б.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки

Профилизация: Математика

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-07-2023, учебных планов БГУ № 6-5.4 – 55/01 от 15.05.2023, № 6-5.4 – 55/11 ин. от 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

Дмитрий Федорович Базылев – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Виталий Владимирович Балащенко – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Глеб Олегович Кукрак – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Владимир Леонидович Тимохович – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕЦЕНЗЕНТ:

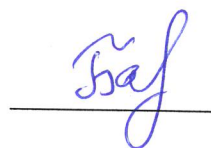
Николай Васильевич Гриб – заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики физико-математического факультета учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка», кандидат педагогических наук, доцент;

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ (протокол № 10 от 31.05.2024);

Научно-методическим Советом БГУ (протокол № 8 от 31.05.2024)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики



Д.Ф. Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» является одной из основных дисциплин, которые изучаются студентами-математиками в университете. Понятия и основные факты этой дисциплины используются при изучении ряда других математических дисциплин, в первую очередь таких, как «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Теоретическая механика».

Цели и задачи учебной дисциплины

Главными **целями** учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» являются:

- Освоение новых математических понятий: метрического пространства, топологического пространства, линии и поверхности в евклидовом пространстве;
- Приобретение студентами знаний в основах общей топологии и теории линий и поверхностей;
- Овладение методами исследования, характерными для общей топологии и дифференциальной геометрии;
- Приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области дифференциальной геометрии и топологии для их использования при изучении других математических дисциплин.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи**:

- Определяются понятия метрического и топологического пространств. Излагаются основные факты, относящиеся к геометрии топологических пространств, свойства непрерывных отображений, свойства связных и компактных пространств, аксиомы счётности и сепарабельность;
- Изучаются линии и поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве, являющиеся основными объектами исследования в классической дифференциальной геометрии.

В начале изучения дисциплины излагаются основы теории метрических и топологических пространств. При этом особое внимание уделяется свойствам непрерывных отображений, а также таким свойствам топологических пространств как связность и компактность, поскольку владение этим материалом необходимо для изучения ряда других математических дисциплин.

Далее рассматриваются линии и поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве. Здесь излагается классический материал дифференциальной геометрии: репер Френе, кривизна и кручение линий, понятия и факты теории поверхностей, связанные с первой и второй квадратичными формами, вводится понятие геодезической на поверхности.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» относится к модулю «Алгебра и геометрия» 2 компонента учреждения высшего образования.

Изучение дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» в течение всего срока обучения проходит во **взаимосвязи** с дисциплинами: «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения».

Требование к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

базовая профессиональная компетенция:

БПК Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных математических задач.

Специализированная компетенция:

СК Применять основные алгоритмы компьютерной геометрии и современные математические средства визуализации изображений и анимации.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- понятия метрического и топологического пространств;
- свойства непрерывных отображений метрических и топологических пространств, свойства связных и компактных пространств;
- понятия линии и поверхности в трехмерном евклидовом пространстве и их характеристики;

уметь:

- находить замыкание, внутренность и границу множеств в метрических и топологических пространствах, определять, является ли пространство связным, компактным, сепарабельным;
- вычислять кривизну и кручение линии, использовать понятия первой и второй квадратичных форм для исследования поверхности;

иметь навык:

- применения методов общей топологии и дифференциальной геометрии при решении геометрических задач.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 3, 4 и 5 семестрах. Всего на изучение учебной дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» отведено:

3 семестр:

- для очной формы получения высшего образования: 90 часов, в том числе 36 аудиторных часов, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

4 семестр:

- для очной формы получения высшего образования: 88 часов, в том числе 34 аудиторных часов, из них: лекции – 16 часов, лабораторные занятия – 14 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачёт.

5 семестр:

- для очной формы получения высшего образования: 116 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 32 часа, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Метрические и топологические пространства и их геометрия.

Тема 1.1. Первоначальные сведения о метрических пространствах.

Определение и примеры метрических пространств. Топология метрического пространства. Подпространство метрического пространства. Изометрия и изометрическое вложение.

Тема 1.2. Первоначальные сведения о топологических пространствах.

Определение и примеры топологических пространств. Метризуемые и неметризуемые пространства. Замкнутые множества. Подпространства. Хаусдорфовы пространства. Сходимость последовательностей в топологических пространствах.

Тема 1.3. Геометрия топологического пространства.

Замыкание, внутренность и граница множеств в топологических пространствах.

Раздел 2. Непрерывные отображения.

Тема 2.1. Основные свойства непрерывных отображений.

Понятие непрерывного отображения. Примеры. Критерии непрерывности. Операции над непрерывными функциями. Секвенциальная непрерывность.

Тема 2.2. Гомеоморфизмы.

Понятие гомеоморфизма. Примеры гомеоморфных пространств.

Раздел 3. Связность и компактность.

Тема 3.1. Связность.

Определение и примеры связных и несвязных пространств и их простейшие свойства. Связность и непрерывные отображения. Линейно связные пространства. Связные компоненты.

Тема 3.2. Компактность.

Определение и примеры компактных пространств и их простейшие свойства. Компактность и непрерывные отображения.

Тема 3.3. Полные и вполне ограниченные метрические пространства.

Определение и примеры полных метрических пространств. Свойства полных пространств. Вполне ограниченные метрические пространства и их простейшие свойства.

Тема 3.4. Компактные метризуемые пространства.

Основные критерии компактности метризуемых пространств.

Раздел 4. Базы и всюду плотные множества в топологических пространствах.

Тема 4.1. Аксиомы счётности и сепарабельность.

Понятие базы и фундаментальной системы окрестностей топологического пространства. Первая и вторая аксиомы счётности. Всюду плотные множества в топологических пространствах. Сепарабельность. Связь между сепарабельностью и второй аксиомой счётности.

Тема 4.2. Методы введения топологий.

Методы введения топологий. Примеры, иллюстрирующие связь между аксиомами счётности и сепарабельностью.

Раздел 5. Конструкции произведения и фактор-пространства.

Тема 5.1. Произведения топологических пространств.

Произведения топологических пространств и их простейшие свойства. Непрерывность отображения в произведение.

Тема 5.2. Фактор-пространства.

Фактор-пространства и факторные отображения. Примеры.

Раздел 6. Линии в E^3

Тема 6.1. Линии и способы их задания. Касательная к линии.

Параметризованные кривые в E^3 и вектор-функции одной переменной. Понятие линии. Примеры и способы задания линий. Касательная к линии.

Тема 6.2. Длина дуги. Натуральная параметризация.

Длина дуги линии. Натуральная параметризация. Касательная к линии как наиболее тесно прилегающая к ней прямая.

Тема 6.3. Кривизна линии.

Кривизна линии и формула для её вычисления. Механический смысл кривизны. Условие бигулярности и его геометрический смысл.

Тема 6.4. Репер Френе.

Репер Френе бигулярной линии. Координатные прямые и плоскости репера Френе. Свойства соприкасающейся плоскости.

Тема 6.5. Формулы Френе. Кручение.

Формулы Френе. Кручение, его механический смысл и формула для его вычисления. Натуральные уравнения.

Раздел 7. Поверхности в E^3

Тема 7.1. Поверхности и способы их задания.

Вектор-функции двух переменных. Поверхности и способы их задания. Линии на поверхности.

Тема 7.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Касательное пространство и касательная плоскость к поверхности. Нормаль к поверхности.

Тема 7.3. Первая квадратичная форма поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление дуги линии на поверхности и величины угла между линиями. Площадь поверхности.

Тема 7.4. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.

Ориентация поверхности. Нормальная кривизна линии на ориентированной поверхности и вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и главные направления поверхности. Полная и средняя кривизна. Типы точек на поверхности.

Тема 7.5. Внутренняя геометрия поверхностей.

Понятие геодезической на поверхности. Дифференциальные уравнения геодезических. Существование и единственность максимальной геодезической, проходящей через данную точку в данном направлении. Геодезические как локально кратчайшие. Изометрические отображения поверхностей. Теорема Гаусса.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Иное	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия	Семинарские занятия	Практические занятия	Количество часов УСП		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 семестр								
1	Метрические и топологические пространства и их геометрия	10	6			2		
1.1	Первоначальные сведения о метрических пространствах	4	2					Опрос
1.2	Первоначальные сведения о топологических пространствах	4	2					Опрос
1.3	Геометрия топологического пространства.	2	2			2		Отчёт по индивидуальным заданиям
2	Непрерывные отображения	4	4					
2.1	Основные свойства непрерывных отображений.	2	2					Опрос
2.2	Гомеоморфизмы.	2	2					Опрос
3	Связность и компактность	12	10			4		
3.1	Связность.	4	4			2		Контроль ная работа
	Всего за семестр	18	14			4		
4 семестр								
3.2	Компактность	2	2			2		Контроль ная работа
3.3	Полные и вполне ограниченные метрические пространства.	4	2					Опрос
3.4.	Компактные метризуемые пространства.	2	2					Опрос
4	Базы и всюду плотные множества в топологических пространствах	4	4			2		
4.1	Аксиомы счётности и сепарабельность.	2	2					Опрос
4.2	Методы введения топологий	2	2			2		Отчет по индивиду

								альным заданиям
5	Конструкции произведения и фактор-пространства.	4	4					
5.1	Произведения топологических пространств.	2	2					Опрос
5.2	Фактор-пространства.	2	2					Опрос
	Всего за семестр	16	14			4		
5 семестр								
6	Линии в E^3	12	10			2		
6.1	Линии и способы их задания. Касательная к линии.	4	2					Опрос
6.2	Длина дуги. Натуральная параметризация.	2	2					Опрос
6.3	Кривизна линии.	2	2					Опрос
6.4	Репер Френе.	2	2					Опрос
6.5	Формулы Френе. Кручение	2	2			2		Контроль ная работа
7	Поверхности в E^3	24	22			2		
7.1	Поверхности и способы их задания.	4	4					Опрос
7.2	Касательная плоскость и нормаль к поверхности.	2	2					Опрос
7.3	Первая квадратичная форма поверхности.	4	4					Опрос
7.4	Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности.	8	6			2		Контроль ная работа
7.5	Внутренняя геометрия поверхностей.	6	6					Опрос
	Всего за семестр	36	32			4		
	Всего по учебной дисциплине	70	60			12		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии: учебник для государственных университетов / П. К. Рашевский. - Изд. стер. - Москва: URSS: ЛКИ, 2021. - 428 с.
2. Александров, П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию: учебное пособие / П. С. Александров. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2024. - 367 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210431>.
3. Подран, В. Е. Элементы топологии: учебное пособие для студентов [вузов], обучающихся по направлению "Физико-математическое образование" / В. Е. Подран. - Изд. 3-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2020. - 186 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/147138>.
4. Паньженский, В. И. Введение в дифференциальную геометрию: учебное пособие для студ. высших учебных заведений, обуч. по спец. "Математика" / В. И. Паньженский. - Изд. 2-е, испр. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2024. - 236 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/212126>.
5. Павлов, Е. А. Дифференциальная геометрия в упражнениях и задачах: учебное пособие / Е. А. Павлов, О. И. Рудницкий. - Изд. 2-е, стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2022. - 74 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/195518>.

Дополнительная литература

1. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия: учебное пособие. – М., Наука, 1987. – 478 с.
2. Дифференциальная геометрия. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – Минск: БГУ, 1982. – 255 с.
3. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – 2-е издание. М: Наука, Главная ред. физ.-мат. лит., 1979. — 272 с.
4. Топология. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1990, 318 с.
5. Радыно, Я. В. Элементы общей топологии для студентов-аналитиков / Я. В. Радыно, А. Я. Радыно, Е. М. Радыно. - Гродно: ГрГУ им. Я. Купалы, 2015. - 295 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- контрольные работы;
- устный опрос;
- отчет по индивидуальным заданиям.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Отметка за выполнение индивидуальных заданий отражает степень самостоятельности выполнения задания, соответствие теоретическим положениям, творческий подход.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» учебным планом предусмотрены: зачёт – 3 семестр, зачёт – 4 семестр, экзамен – 5 семестр.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине в пятом семестре используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- контрольные работы – 34 %;
- отчет по индивидуальным заданиям – 33 %;
- устный опрос – 33 %;

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) 30 % и экзаменационной отметки 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.3. Геометрия топологического пространства (2ч.)

1. Пусть A – подмножество топологического пространства X . Докажите, что $\text{int } A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$

2. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – подмножества топологического пространства X . Докажите, что $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$

3. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – подмножества топологического пространства X . Докажите, что $\text{int}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \text{int } A_1 \cap \dots \cap \text{int } A_n$

4. Пусть A, B – подмножества топологического пространства X . Докажите, что $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Приведите примеры, когда $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и когда $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

5. Покажите, что замыкание объединения произвольного семейства

подмножеств топологического пространства содержит объединение их замыканий. Приведите пример, показывающий, что равенства может не быть.

Форма контроля – отчёт по индивидуальным заданиям (примерные варианты).

Тема 3.1 Связность (2ч.)

1. Приведите пример несвязного замкнутого подмножества вещественной прямой, имеющего непустую внутренность.

2. Определите, является ли вещественная прямая с топологией Зарисского связным пространством.

3. Докажите, что парабола и пара пересекающихся прямых являются не гомеоморфными подпространствами евклидовой плоскости.

4. Найдите связные компоненты прямой Зоргенфрея.

Форма контроля – контрольная работа № 1 (примерный вариант)

Тема 3.2 Компактность (2ч.)

1. Определите, какие из следующих фигур трёхмерного евклидова пространства гомеоморфны друг другу: эллиптический параболоид, сфера, гиперболический параболоид, эллипсоид. Ответ обосновать.

2. На вещественной прямой (топология естественная) найдите замыкание и внутренность подмножества $M = [-1, 0] \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Является ли это множество компактным?

3. Определите, является ли вещественная прямая с топологией Зарисского компактным топологическим пространством.

4. Приведите пример компактного несвязного подмножества евклидовой плоскости, имеющего непустую внутренность.

Форма контроля – контрольная работа № 2 (примерный вариант).

Тема 4.2. Методы введения топологий (2ч.)

1. Покажите, что пространство непрерывных функций на отрезке с топологией поточечной сходимости не удовлетворяет первой аксиоме счётности.

2. Покажите, что пространство непрерывных функций на отрезке с топологией поточечной сходимости сепарабельно, но не имеет счётной базы.

3. Покажите, что прямая Зоргенфрея сепарабельна, но не имеет счётной базы.

4. Покажите, что прямая Зоргенфрея удовлетворяет первой аксиоме счётности, но не удовлетворяет второй аксиоме счётности.

5. Покажите, что плоскость Немыцкого сепарабельна, но при этом имеет подпространство, которое не сепарабельно.

Форма контроля – отчет по индивидуальным заданиям (примерные варианты).

Тема 6.5. Формулы Френе. Кручение (2ч.)

1. Найти касательные к линии $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$, параллельные прямой $2x - y + 3 = 0$
2. Найти точки пересечения и углы, под которыми пересекаются линии $x^2 + y^2 + 2x = 7$, $y^2 = 4x$.
3. Найти кривизну и кручение линии $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$ в произвольной точке.
4. Написать уравнение соприкасающейся плоскости линии $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = -t \sin t \\ z = at \end{cases}$ в начале координат.
5. Написать уравнение главной нормали и бинормали линии $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ при $t = 1$.

Форма контроля – контрольная работа №3 (примерный вариант)

Тема 7.4. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и типы точек на поверхности. (2ч.)

1. Для поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$ в точке $M(u = 2, v = \frac{\pi}{4})$ напишите
(а) уравнение касательной плоскости, (б) уравнение нормали, (в) уравнение касательной к линии $u = 2$.
2. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $M(3; 1; -1)$.
3. Найти косинус угла, под которым пересекаются линии $u + v = 0$ и $u - v = 0$ на поверхности $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = uv \end{cases}$.
4. На поверхности $\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 - v^2 \\ z = uv \end{cases}$ найти длину дуги линии $v = au$ между точками её пересечения с линиями $u = 1, u = 2$.
5. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизну прямого геликоида в произвольной точке.

Форма контроля - контрольная работа № 4 (примерный вариант).

Примерная тематика лабораторных занятий

3 семестр.

Метрические и топологические пространства и их геометрия

Занятие 1. Примеры метрических пространств.

Занятие 2. Задачи, связанные с понятиями открытого и замкнутого множеств.

Занятие 3. Нахождение замыкания, внутренней и границы множеств.

Непрерывные отображения

Занятие 4. Задачи на применение критериев непрерывности.

Занятия 5. Примеры гомеоморфизмов.

Связность и компактность

Занятия 6,7. Задачи на применение теоремы о промежуточных значениях. Примеры связных и линейно связных пространств.

Занятие 8. Задачи на свойства компактных пространств.

Занятия 9. Примеры полных и не полных метрических пространств. Примеры топологически эквивалентных метрик, одна из которых полная, а другая – нет, одна вполне ограничена, а другая – нет.

Занятие 10. Примеры замкнутых, ограниченных но не компактных множеств в метрических пространствах.

Базы и всюду плотные множества в топологических пространствах

Занятие 11. Задачи на взаимосвязь между аксиомами счётности и сепарабельностью.

Занятие 12. Задачи, в которых используются различные методы введения топологий.

Конструкции произведения и фактор-пространства

Занятие 13. Задачи, связанные со свойствами произведений топологических пространств.

Занятие 14. Примеры фактор-пространств.

Линии в E^3

Занятие 1. Задачи на свойства вектор-функций. Примеры параметризованных кривых. Задачи на различные способы задания линий.

Занятие 2. Вычисление длины дуги. Нахождение натуральной параметризации винтовой линии.

Занятие 3. Нахождение кривизны различных линий.

Занятие 4. Нахождение элементов репера Френе различных линий.

Занятие 5. Нахождение кручения различных линий.

Поверхности в E^3

Занятия 6,7. Задачи, иллюстрирующие различные способы задания поверхностей и задание параметризованных кривых на поверхности в криволинейных координатах.

Занятие 8. Нахождение касательных плоскостей и нормалей к поверхностям для различных способов задания поверхностей.

Занятия 9, 10. Задачи на вычисление длины дуги линии на поверхности, нахождение угла между линиями на поверхности, нахождение площади области на поверхности с помощью первой квадратичной формы.

Занятия 11, 12, 13. Задачи на нахождение главных кривизн поверхности, главных направлений на поверхности и полной кривизны поверхности. Определение типов точек на поверхности.

Занятия 14, 15, 16. Примеры геодезических. Примеры, иллюстрирующие локальный характер свойства геодезических быть кратчайшими. Примеры изометричных и не изометричных поверхностей.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

эвристический, ориентированный на: - осуществление студентами лично-значимых открытий в процессе подготовки к практическим занятиям по методике преподавания математики; - демонстрацию многообразия решений математических задач, методов, форм, средств и приемов организации учебной деятельности школьников; - творческую самореализацию студентов в процессе создания планов-конспектов уроков и их видеофрагментов; - индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

практико-ориентированный, предполагающий: - освоение содержания образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;

метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности студентов, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями;

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

В процессе самостоятельной работы по дисциплине «Дифференциальная

геометрия и топология» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- Изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и лабораторных занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- Подготовка к различным формам промежуточной аттестации (лабораторной и контрольной работе, зачету, экзамену);
- Поиск и изучение понятий и фактов из дисциплин *«алгебра и теория чисел»*, *«математический анализ»*, *«дифференциальные уравнения»*, необходимых для усвоения дисциплины *«дифференциальная геометрия и топология»*;
- Выполнение домашних заданий; самостоятельное выполнение заданий для лабораторных работ;
- Подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине *«Дифференциальная геометрия и топология»*, является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных и лабораторных работ, индивидуальных заданий и при сдаче зачетов и экзаменов.

К **организационным формам** проведения УСР по дисциплине *«Дифференциальная геометрия и топология»* относится аудиторная деятельность на лабораторных занятиях. **Видами отчетности** УСР являются: контрольные работы и отчеты по индивидуальным заданиям.

Контроль УСР по дисциплине *«Дифференциальная геометрия и топология»* проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы;
- защиты отчета по индивидуальным заданиям.

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой отметки по дисциплине в рамках рейтинговой системы оценки знаний студента.

Примерный перечень вопросов к зачёту (3 семестр)

1. Понятие метрического пространства. Примеры. Топология метрического пространства.
2. Подпространство метрического пространства и его топология.
3. Изометрия и изометрическое вложение. Примеры.
4. Понятие топологического пространства. Окрестности. Метризуемые и неметризуемые пространства. Примеры.

5. Замкнутые множества в топологическом пространстве и их свойства.
6. Хаусдорфовы пространства.
7. Подпространство топологического пространства. Свойства индуцированной топологии.
8. Замыкание множества в топологическом пространстве и его свойства.
9. Внутренность множества в топологическом пространстве и её свойства.
10. Граница множества в топологическом пространстве и её свойства.
11. Непрерывные отображения. Примеры. Непрерывность композиции.
12. Критерии непрерывности.
13. Сужение отображения и его непрерывность.
14. Операции над вещественнозначными непрерывными функциями.
15. Секвенциально непрерывные отображения.
16. Гомеоморфизмы. Примеры.
17. Связные пространства и их простейшие свойства. Примеры.
18. Связность и непрерывные отображения.
19. Теорема о промежуточных значениях.
20. Линейно связные пространства.
21. Связность и операция замыкания. Свойство веера.
22. Связные компоненты топологических пространств.

Примерный перечень вопросов к зачёту (4 семестр)

23. Компактные пространства и их основные свойства.
24. Компактность подпространств.
25. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.
26. Непрерывные отображения компактных пространств.
27. Обобщение теоремы Вейерштрасса.
28. Теорема о непрерывной биекции компактного пространства на хаусдорфово.
29. Полные метрические пространства. Примеры полных и не полных пространств.
30. Полнота подпространств.
31. Вполне ограниченные метрические пространства.
32. Пример ограниченного, но не вполне ограниченного множества в метрическом пространстве.
33. Связь между ограниченностью и вполне ограниченностью множеств в $\mathbb{R}^n$.
34. Теорема о связи между компактностью, полнотой и вполне ограниченностью метрического пространства.
35. Критерий компактности метризуемого пространства в терминах последовательностей и предельных точек.
36. Пример ограниченного, замкнутого, но не компактного множества в метрическом пространстве.

37. Базы и локальные базы в топологических пространствах. Аксиомы счётности и связь между ними.

38. Сепарабельные пространства. Теорема о связи между сепарабельностью и второй аксиомой счётности.

39. Пример сепарабельного пространства, не удовлетворяющего второй аксиоме счётности.

40. Произведения топологических пространств. Метризуемость произведений метризуемых пространств.

41. Проектирования на произведениях.

42. Отображение в произведение и его непрерывность.

43. Фактор-пространства топологических пространств.

44. Факторные отображения.

Примерный перечень вопросов к экзамену (5 семестр)

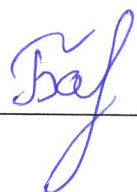
1. Параметризованные кривые и вектор-функции.
2. Понятие линии. Способы задания линий. Касательная к линии.
3. Касательная к плоской линии, заданной уравнением.
4. Длина дуги линии.
5. Натуральная параметризация.
6. Касательная как прямая, наиболее тесно прилегающая к линии.
7. Кривизна линии. Формула для вычисления кривизны.
8. Механический смысл кривизны.
9. Условие бирегулярности и его геометрический смысл.
10. Репер Френе бирегулярной линии. Элементы репера Френе.
11. Соприкасающаяся плоскость и её свойства.
12. Формулы Френе.
13. Кручение, его механический смысл и формула для вычисления.
14. Понятие поверхности. Примеры и способы задания поверхностей.
15. Внутренние уравнения линий на поверхности.
16. Касательное пространство и касательная плоскость к поверхности. Нормаль к поверхности.
17. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной уравнением.
18. Первая квадратичная форма поверхности и задачи, решаемые с её помощью.
19. Площадь поверхности.
20. Ориентация поверхности.
21. Нормальная кривизна линии на поверхности.
22. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении.
23. Главные направления и главные кривизны поверхности в данной точке.

24. Формула Эйлера.
25. Полная и средняя кривизна поверхности в данной точке. Типы точек на поверхности.
26. Геодезические на поверхности.
27. Дифференциальные уравнения геодезических. Существование и единственность геодезической, проходящей через данную точку в данном направлении.
28. Геодезические как локально кратчайшие.
29. Гладкие отображения поверхностей. Дiffeоморфизмы.
30. Изометрические отображения поверхностей.
31. Пример изометричных поверхностей.
32. Теорема Гаусса. Пример не изометричных поверхностей.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)*
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
геометрии, топологии и
методики преподавания математики,
кандидат физико-математических наук,
доцент



Д.Ф. Базылев

31. мая 2024 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета
