

Министерство образования Республики Беларусь  
Белорусский государственный университет  
Механико-математический факультет

Вычислительная механика для гранулированных и геоматериалов  
(Computational Mechanics for Granular and Geo-materials)

Материалы  
международного белорусско-китайского семинара по компьютерной  
механике для сыпучих и геоматериалов  
(Belarus-China International Workshop on Computational Mechanics  
for Granular and Geo-materials)  
9–10 июля, Минск, БГУ

Минск  
2024

УДК 539.3:519.67(06)+622.83:519.6(06)  
В 949

Решение о депонировании вынес:  
Совет механико-математического факультета  
17.09.2024 г., протокол № 1

Рецензенты:

Академик-секретарь отделения физико-технических наук Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор Щербаков С.С.

Василевич Ю.В., доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Теоретическая механика и механика материалов машиностроительного факультета БНТУ

Вычислительная механика для гранулированных и геоматериалов = Computational Mechanics for Granular and Geo-materials : материалы международного белорусско-китайского семинара по компьютерной механике для сыпучих и геоматериалов, 9–10 июля, Минск, БГУ / под общей редакцией М.А. Журавкова, Shunying Ji. – Минск : БГУ, 2024. – 134 с. – Библиогр. в конце отд. ст. – Текст на рус. и англ. яз.

В сборнике представлены материалы международного белорусско-китайского семинара по компьютерной механике для сыпучих и геоматериалов, 9–10 июля, Минск, БГУ.

Рассмотрены актуальные вопросы современной механики сплошных и дискретных сред, механики горных пород и массивов, информатики применительно к разработке моделей, алгоритмов и расчетных схем для решения различных классов задач. Приведены примеры решения прикладных задач из различных приложений механики сплошных и дискретных сред. В докладах затронуты различные аспекты методов дискретных элементов, моделирование контактного взаимодействия частиц, построение параллельных алгоритмов, разработка специализированного программного обеспечения, механико-математические модели механики грунтов, геотехники и геофизика, экспериментальные исследования, связанные с методами дискретных элементов и др.

Материалы сборника представляют интерес как специалистам в области теоретической и прикладной механики, математического моделирования, численных методов применительно к решению задач механики гранулированных сред и геоматериалов.

## ВВЕДЕНИЕ

Основными организаторами конференции выступают Белорусский государственный университет, механико-математический факультет, кафедра теоретической и прикладной механики и Далянский политехнический университет, совместный образовательный институт ДПУ-БГУ. В рамках совместной образовательной и научной деятельности институтов ДПУ-БГУ и БГУ-ДПУ ежегодно проводятся конференции, семинары для сотрудников, аспирантов и студентов университетов. Помимо этого, выполняются совместные научные исследования по грантам ДПУ, совместные проекты ФФИ Беларуси и Китая по направлению исследований заявленной научной конференции «Вычислительная механика для гранулированных и гео-материалов». Тематика конференции является современной и актуальной. Исследования в данном направлении выполняются во многих странах и имеют помимо научного и важное прикладное значение. Выполняемые в Белорусском государственном университете исследования в области вычислительной механики для геоматериалов и гранулированных материалов широко известны и признаны среди научной общественности не только в Беларуси, Китае, но и других странах.

Целью данного курса лекций является аналитический обзор и анализ современного состояния методов и технологий численного анализа и компьютерного моделирования в механике сплошных и дискретных сред.

Применение технологий и методов численного (компьютерного) анализа при выполнении исследований и решении прикладных задач механики имеет уже внушительную историю развития. Так, *метод конечных элементов* (МКЭ, Finite-Elements Methods) начал активно развиваться в 60-х годах прошлого века. Возможности метода конечных разностей (МКР, Finite-Difference Methods) для получения приближенного решения уравнений в частных производных и построение алгоритмов на его основе для решения инженерных прикладных задач известны еще с 19 века. Но эти и другие численные методы не могли быть использованы эффективно и не имели широкого распространения из-за слишком большого количества требуемых арифметических операций и отсутствия соответствующих компьютеров. И только с развитием вычислительной техники, существенным возрастанием вычислительных мощностей компьютеров подходы численного моделирования приобрели реальное значение и показали свою эффективность.

Исследователи еще на стадии развития компьютерной техники и технологий поняли, что компьютеры должны дать новый мощный импульс развитию научных технологий и инженерии. Поэтому практически одновременно с появлением компьютеров начался процесс разработки и внедрения компьютерных специальных технологий для проведения сложных трудоемких работ, связанных с исследованиями разнообразных механических процессов и явлений, изучением механических систем и решением многочисленных задач прикладной механики. При этом, одним из наиболее важных условий, которому при создании таких компьютерных технологий необходимо неукоснительно следовать, является требование, чтобы компьютеры использовались не только как калькуляторы (т.е. вычислительные машины для быстрого и более-менее автоматизированного расчета). Необходимо было создать новые методы, использующие все преимущества нового инструментария – компьютерных технологий. Кроме того, благодаря своему главному качеству – обеспечению выполнения математических операций с огромным быстродействием – создавались возможности применения более адекватных реальным процессам математических моделей.

# **ABOUT MECHANICAL-MATHEMATICAL MODELS FOR COMPUTER SYSTEMS OF INTELLIGENT AND SMART ANALYSIS OF GEOMECHANICAL PROCESSES**

**M.A. Zhuravkov**

**Belarussian State University, Minsk, Belarus**

## **1. General comments**

At the present time Artificial Intelligence (AI) technologies play an important role in the development of computer technologies for mathematical modeling and computer simulation the state and behavior of physical and engineering objects of various nature.

*Therefore, the actual task is to develop the “philosophy” and essence a new generation of application software and actually elaborate such software.*

The application of approaches and methods of numerical (computer) analysis in performing research and solving applied problems of mechanics and engineering has an impressive history of development. But, before the advent of modern computers and computer technologies, the use of realistic mathematical models in performing complex fundamental and applied research and calculations was possible only in rather limited cases.

Today computer modeling capabilities are qualitatively changing and one of the essential new requirements to computer modeling technologies is the presence of artificial intelligence (AI) elements in such technologies, or, what seems to be more precise, the presence of such "skills" as "intelligence", "understanding", "insight", "ability to adequately predict on the basis of processing large sets of information and data (Big Data)" (which is the essence of the concept of "artificial intelligence").

Modern computer modeling systems should be “able” to give recommendations for setting model problems, be able to correct computational algorithms, interpret the results of calculations and give a person a possible plan of further actions (measures).

It can be stated that today computer technologies for modeling physical and production processes are: high-performance computing + knowledge and "Big Data" + mathematical models + elements of artificial intelligence technologies.

### ***What are intelligent and intellectual systems?***

While intellect and intelligence are related, they are not the same thing. A person can be highly intelligent but lack intellectual curiosity or the ability to think deeply about abstract ideas. Conversely, a person can have a high intellect but struggle with practical problem-solving or learning new skills.

May be say that: “Intelligent” is a quick learner of any task, and “Intellectual” is knowledgeable and would offer great solutions to an issue.

Therefore, let's assume that in decision-making technologies, *an intelligent system* is an information-computing system with intelligent support that solves problems mainly without human involvement, as opposed to *an intellectual system* in which an operator is present.

### ***What are the concepts Modeling and Simulation?***

Modeling and simulation are two closely related computer applications, which play a major role in science and engineering today.

Modeling is a way to create a virtual representation of a real-world system. Simulation is used to evaluate a new design, diagnose problems with an existing design, and test a system under conditions that are hard to reproduce in an actual system.

The key difference between modeling and simulation is that optimization modeling provides a definite recommendation for action in a specific situation, while simulation allows users to determine how a system responds to different inputs so as to better understand how it operates.

Modeling is the act of a model building. A simulation is the process of using a model to study the behavior and performance of an actual or theoretical system. While a model aims to be true to the system it represents, a simulation can use a model to explore states that would not be possible in the original system.

The model comes first. That model is then used to perform simulation studies. Typically, you are using a model to either reproduce a historical period (for validation purposes) or to extrapolate data to predict the future (for what-if studies).

Simulation modeling is the process of creating and analyzing a digital prototype of a physical model to predict its performance in the real world. Simulation modeling is used to help designers and engineers understand whether, under what conditions, and in which ways a part could fail and what loads it can withstand. So, for example, it is more correct to use the term “simulation” or “simulation modeling” for Digital Twin technologies.

## **2. Some strategic goals of development of mechanical-mathematical modeling systems with elements of AI.**

It should be noted that at the current stage of AI technology development, we are talking about systems with human participation in the control of the AI-

supported process. From this point of view and *building intellectual system of modelling, strategic goals of active development of AI systems are:*

- elaboration and development of mathematical foundations of data processing and intelligent data analysis methods for various application areas and directions;
- elaboration of mathematical foundations of systems for computer simulation, calculations and analysis of various physical processes;
- recommendations for setting model mathematical and computer problems for real processes and phenomena under analysis;
- intelligent interpretation
- transition to new intelligent CAD, CAE and CAM technologies.
- recommendations for setting model mathematical and computer problems for real processes and phenomena under analysis;
- intelligent interpretation and analysis of modeling and simulation results.

Expansion of AI applications, increasing complexity of the class of solving problems, range and volume of data used to create applied AI models and intelligent systems based on AI, requires a significant expansion of the theoretical and algorithmic base of AI, including the need to develop machine learning methods using mathematical and physical models of objects and phenomena, methods of multimodal data consolidation, methods of creating geometric and topological components of neural deep networks, methods of three-dimensional computer design and simulation of objects.

AI technologies are increasingly becoming full-fledged “co-authors” of algorithms for simulation mathematical and computer modeling of various physical and technological processes and phenomena.

*One of the important problems today is the development of modern advanced approaches and methods of reliable and adequate mathematical modeling and computer simulation for various classes of problems with elements of intelligent analysis.*

Any model is accurate for some classes/types of problems and inaccurate for others. In addition, you need to know at which stages it is most effective to use and which model to use in order to avoid errors or minimize inaccuracies. Thus, the same object of applied mechanics can be described by different mechanical-mathematical models, based on the goal set by the researcher. It is reasonable to note that when constructing a mathematical model of the applied mechanics problem under consideration and choosing a method for its solution, it is necessary to be guided not only by the accepted mechanical model of the object behavior, but also by the ultimate goal of solving the problem.

The use of AI technologies is effective practically at all stages of mechanical-mathematical modeling of processes and phenomena of applied mechanics. Among them, for example, intellectual processing, interpretation and analysis of large volumes of knowledge and data on the basis of mathematical models of studied objects, processes or phenomena; development of knowledge bases on various directions and subject branches of mechanics; development of systems for analyzing the results of modeling and decision-making and others.

### **3. Elaboration of Intelligent and Intellectual computer simulation systems in geomechanics. Actual problems**

Let us now consider some of the main directions in the development and construction of new geomechanical models.

Intensive excavation of underground space leads to quantitative and qualitative changes in geomechanical processes and phenomena and even to new, previously non-existent phenomenon. In this regard, at present, sometimes even radically changing ideas about the nature of geomechanical phenomena and processes.

Therefore, there are a number of new scientific problems and questions associated, on the one hand, with the study of the influence of man-made factors on the geophysical environment, and, on the other hand, with the study of the behavior of rock strata and the ability to manage natural processes in the new changed conditions.

***Deepening and expansion of fundamental knowledge about the behavior of rock masses with underground workings, constructions.***

One of the most important fundamental task of geomechanics at the present stage is the construction and developing models of the rock masses behavior with underground constructions, which most adequately describe rock masses' condition and behavior, taking into account the new facts and ideas about the behavior of rock masses accumulated to date. In turn, this general problem includes many internal problems. Among them, for example.

**A.** It is very difficult to correctly account for the variability in time of stress fields in the massif around of underground structures due to the wide variety of influencing factors. The main difficulty is caused by the structurally inhomogeneous structure of rock massif. In addition, in the rock massifs with mines (the undermined rock massifs) in general, areas are formed that are in different structural-mechanical states. In this regard, mathematical formulations of model problems for the study of geomechanical processes in the selected characteristic zones of the mined rock strata should be different.



Therefore, the problem of constructing mechanical-mathematical models to study the stress-strain state of the rock massif from the depths of underground mining operations to the Earth's surface is an urgent and very complex.

**B.** It is well known, that for rocks and rock masses, as a rule, the mechanical properties of rock samples, rock mass samples and mechanical properties of the rock mass on the whole are different and in some cases significantly. There are a lot of works related to the determination of the properties of rock masses, and significant progress has been made in this direction. But, there are still a lot of unresolved questions in the problem of determining the physical&mechanical properties of rock masses. Currently, a new scientific direction is developing – breed science, associated with the construction of classifications of rocks and massifs according to physical and mechanical properties in canonical scales. A cluster approach based on the existence of canonical series of structural separations and associated amplitude-period spectra of geophysical and geomechanical fields is developed for the quantitative description of the block-hierarchical structure.

**C.** It should be noted an actual problems associated with modeling of geophysical processes in the rock mass as multilayer media (taking into account the presence of gas fraction and liquid). For their reliable solution, it is necessary to construct conjugate mechanical&mathematical models. On their basis, such important tasks as the elaboration of measures to prevent sudden emissions of rock and gas in mines, prevention of flooding of mines etc. are solved, in particular.

**D.** Despite the significant numbers of research work carried out, the problem of forecasting and describing such a dangerous phenomenon as dynamic phenomena in mining operations has not yet been studied and solved.

**E.** It is experimentally confirmed and theoretically justified that rock masses before destruction are divided into parts, while the continuity of the massif as a whole can be preserved. As a result, a block structure appears in the massif. It is obvious that when a block structure occurs, the resistance of the rock to deformation decreases, but still remains finite. This phenomenon is characterized by the appearance of a “descending branch” on the stress-strain diagram. Obviously, in this new state of the massif, the relationship between stresses and strains is different from the standard one. Therefore, it is necessary to expand the “standard” approaches and schemes for the construction of mechanical-mathematical models of geomechanics problems. We should investigate the behavior of rock massifs when we “get” on the deformation diagram to the stage of post-peak development of deformation processes.

In the region after the “peak” behavior of rock, in addition to general deformations, shear deformations develop and slip sites appear. As a result, there is a dilatancy effect (volume change due to stress changes and due to shear). In turn, the appearance of slip areas and associated dilatancy is important for the study of a wide range of processes, for example, geofiltration in the rock massif.

**F.** Among the important tasks is the problem of development and adaptation of modern approaches and methods of mathematical modeling to perform computer modeling and simulation of a wide range of applied geomechanical processes. At the same time, the main emphasis should be placed on the study of physical processes, the modeling of which is very time-consuming or almost impossible to execute with the help of other approaches.

**G.** As a special important problem I would single out the problem “Construction of geomechanical models of rock massifs behavior take into account of their complex structure”

Among the most “science-intensive” are such areas as the construction of mechanical-mathematical and computer digital geomechanical models of rock masses, taking into account their structural-mechanical features and with an extensive system of underground structures. And as well as the study and prediction of physical processes in rock masses under the influence of natural and man-made sources of disturbances on the basis of these models.

Studies of the material behavior and properties at the pre-limit stage of deformation were carried out quite a lot. Similar studies for the “over-limit deformation section” are single. However, the practical importance and relevance of these studies are evident. In an over-limit deformation branch, a solid takes on a block structure.

*Therefore, to account for the behavior of the rock massif at all stages, models are needed not only in the framework of continuum mechanics, but also in the framework of discrete media mechanics.*

**H.** Intellectual systems for the formulation of boundary value problems and the construction of numerical computational models.

So, we talked about the urgency of the development of adequate mechanical-mathematical models to describe geomechanical processes. It was about the importance of using AI-technologies in modern systems of computer modeling and simulation of various classes of applied geomechanical processes. And now I would like to provide information about such direction of our research as the development of Intellectual systems for formulation of boundary

value problems, the construction of numerical computational models and solution applied problems on their base.

Despite the fact that the general algorithm for solving such problems as study of strength and stability of geotechnical underground structures (such as mining excavations, underground cavities and chambers) for a given period of time for mining excavations was developed long time ago, the solution of this problem is still widely discussed in the scientific publications.

There are some of important problems related to the common relevant problem of the development of computer-aided technologies for describe the behavior of rock masses with underground structures at various depths.

One of the main our points is that the calculation schemes for the study of stress-strain state of rock masses in the vicinity of underground structures at great, moderate and small depths should significantly differ.

**I.** Our experience in solving problems of stability and strength of geotechnical structures located at different depths inside the rock strata with significantly different mechanical properties allows to clarify and expand the classification of depths in geomechanics. We propose the classification of mining depths based on the level of rock pressure and mechanical properties of the rock strata at the considered depth:

*Small depths* at which the ratio of cohesion coefficient to lithostatic pressure is greater than unity ( $C/\rho gH > 1$ ).

*Moderate depths* at which the ratio of cohesion coefficient to lithostatic pressure is less than or equal to one ( $C/\rho gH \leq 1$ ), but this ratio does not exceed the effective ultimate compressive strength of the correspondent rock strata ( $\rho gH \leq \sigma_c$ ).

*Significant depths* at which lithostatic pressure exceeds the effective ultimate compressive strength of the rock strata ( $\rho gH > \sigma_c$ ).

As follows from the introduced classification, the understanding of “significant depth” depends not only on the absolute value of the vertical component of the lithostatic pressure, but mainly on the value of the effective ultimate compressive strength of the rock mass  $\sigma_c$  in the considered strata.

**J.** One of the difficult problem of rock mechanics is: “what is the limit state of the rock mass in the vicinity of the underground structure (mining, goaf), what is the criteria for the limit state of the rock massif”?

The problems of strength and stability of underground structures and undermined rock masses are among the most important problems of rock mechanics.

To date, researchers have clearly established that to assess the strength of undermined rock masses, one should use not classical strength theories and corresponding strength criteria, but limit state criteria instead. This is because rock fracture or crack propagation in some area of the rock mass does not necessarily lead to its complete failure or to the critical impact of the rock mass on underground structures.

Nowadays, a number of limit state criteria are suggested for the evolution of the rock mass limit state in various conditions. However, the correct choice of the limit state criteria for applied engineering problems is still an open issue.

*Limit state (LS)* of the rock mass and geotechnical structures, in turn, is a condition at which the considered rock mass and/or elements of geotechnical structure experience significant violation of LS criteria (zones discontinuity, failure, fracture or crack propagation occur) and this leads to complete destruction of the rock mass, loss of stability of the whole geotechnical system or transition of the rock strata into a new structural state.

It is shown that to evaluation of the limit state of the rock masses in the vicinity of underground structures it is efficient to use the complex limit state criterion which is a specific system of failure criteria. The application of this criteria depends on the type of the stress-strain state at a particular point of the rock mass. The complex limit state criterion includes the most common and effective criteria used in the practice of geotechnical calculations. These common criteria are applied for each particular point of the rock mass depending on the value of the Nadai-Lode parameter, which defines the type of the stress-strain state. In addition to that it is shown that the system of failure criteria can be expanded if specific data of mechanical properties of the rock mass is available. In particular, this data should include the information on specific parameters used for other failure criteria used in geomechanics and geotechnics.

So, we proposed to evaluate limit states of rock masses based on a complex criterion. *The main idea of this evaluation is that before one evaluates the state of the rock mass it is needed to determine the type of stress state in each area of the considered rock mass.* After that, rock mass state evaluation should be performed by those limit state criteria, which are based on the same physical processes as occur in the evaluated area of the rock mass.

We propose to use the Discrete Element Method (DEM) or Block Element Method (BEM) to simulate the behavior of the rock mass beyond the limit state. To understand which areas can potentially go beyond the limit state, Finite Element Method (FEM) simulations may be used.

**K.** The algorithm of simulation the undermined rock mass behavior in the vicinity of excavations or underground structures is a complicated coupled technique (FEM + DEM + analytical methods). Such approach is almost the only one today, which can be used for adequate solution of applied engineering problems taking every significant factor into account.

The construction of a computer (digital) geomechanical model (DGM) of the rock massif with geotechnical structures for modelling of various geomechanical processes is a non-trivial, very difficult task. When constructing such model, it is necessary to generalize a huge quantity of multidisciplinary data and knowledge accumulated both in science and in practice. An important condition for the construction of an adequate reliable complex three-dimensional geomechanical model of rock strata is the use of the whole set of geological, mining and geomechanical data, their structure and consistency.

***Numerical Modeling and Computer Simulation of geomechanical processes in rock massif with large-scale excavation of mineral resources.***

The main directions of our research on the development of numerical models and computer models of various geomechanical processes can be grouped into several groups: (they are shown on the slide)

- stress-strain state in vicinity of underground geotechnical building/goafs;
- stability and measures of safeguard of underground goafs;
- stress-strain state in rock massif with large-scale underground mining works from Earth Surface to large depths;
- deforming processes on Earth Surface and undersurface regions;
- geomechanics of open mining operations, pits;
- stability of engineering buildings on Earth Surface and undersurface regions;
- couple (conjugate) problems of geomechanics (hydrogeomechanics, gasgeomechanics, thermogeomechanics and others);
- couple (conjugate) of rock mechanics and mechanics of rock equipment.

I would also like to separate the following problem into a separate class:

***Stability of underground structures and rock massifs with a large-scale network of underground structures. Technogenic accidents.***

At present, such a scientific direction of fundamental research in geomechanics and geophysics as “The elaboration of theoretical foundations of the theories of dynamic deformation of geomedia under powerful natural and man-made impacts” is actively developing.

Block-hierarchical structure of rock masses plays a significant role in the formation of specific dynamic processes in the undermined rock massifs. Today,

it is indisputable that for the correct description of the behavior of rock masses and their responses to external influences, it is necessary to take into account the complex structure of masses, dissected by surfaces and weakening zones into separate blocks of different scale levels.

One of the important task is a reliable forecast of the long-term stability of the rock mass both in the vicinity of a complex system of underground workings, and the stability of the considered area of the rock strata as a whole.

Changes accumulate in the massif under the influence of technogenic factors can cause catastrophic consequences not only for an individual underground structure, but also for the mining region as a whole. The result can be a large-scale man-made accident, manifested in various forms (which depends on a set of factors). In accordance with the basic laws of the theory of catastrophes, to initiate the process of release of potential energy accumulated in the contour zone under certain conditions, a slight external influence is sufficient.

### **Conclusion**

Unfortunately, the report does not cover the whole range of actual tasks and problems of modern geomechanics.

It should be emphasized that geomechanics contains tasks that require an excellent knowledge and skills from various fields of modern theoretical and applied mechanics, fundamental and applied mathematics and a number of special disciplines.

Successful solution of geomechanics problems requires the construction of specialized models and algorithms based on the methods of continuum mechanics, mechanics of discrete bodies and the mechanics of bulk media.

# COUPLED SPH-DEM-FEM MODEL FOR INTERACTION BETWEEN WATER, SEA ICE AND MARINE STRUCTURES

Dongbao Yang<sup>1</sup>, Lu Liu<sup>1</sup>, Shunying Ji<sup>1,2</sup>

1. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, China

2. DUT-BSU Joint Institute, Dalian University of Technology, Dalian, China

## 1. Introduction

In the interaction between offshore structures and sea ice in polar environment many different physical processes occur e.g. the failure of sea ice, structural vibration, the drift of sea ice, and the collision between sea ice, structure and fluids. These processes include two media: solid and fluid, and three materials: water, ice and structure. From the perspective of different media, this process belongs to a fluid-solid interaction (FSI) problem. However, conventional FSI in ocean engineering mainly focuses on structural elastic response under fluid load, e.g. violent free-surface flow, slamming issues and underwater explosion problems<sup>[1]</sup>. And to solve complex fluid and solid dynamics problems, a series of coupled CFD-FEM methods are developed. In polar environment, sea ice shows strong discrete characteristics, which makes sea ice exist as polygonal discrete particles in space. From the perspective of different materials, this process can be more finely divided into a fluid-particle-structure interaction (FPSI) problem. The FPSI govern a wide range of natural and engineering phenomena in recent years. For example, the impact of debris flow on barriers/structures<sup>[2-4]</sup>, modeling the mill behavior<sup>[5]</sup>, abrasive wear on the mill, and abrasive water jet cutting nozzles<sup>[6]</sup>.

This paper presents a introduces a novel coupled SPH-DEM-FEM model for FPSI is proposed to study water, ice and offshore structures interactions. The offshore structure is modelled using the FEM, the ice media using the DEM and the water using the SPH. Finally, the proposed model is employed to investigate a multi-habitat ship running from water to ice and ice-gonging ships navigated in the broken ice.

## 2. Coupled SPH-DEM-FEM model description

### 2.1 Governing equations for DEM

The DEM used in dynamics model of the granular system is based on the motion of a single particle, and the translation and rotation of the particle are solved according to Newton's second theorem. Equations of particle  $i$ :

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{u}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i, \quad (1)$$

$$\mathbf{I}_i \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_i}{dt^2} = \mathbf{M}_i, \quad (2)$$

where,  $\mathbf{u}_i$  and  $\boldsymbol{\theta}_i$  are position and orientation vector for a given particle,  $m_i$  is the mass of particle,  $\mathbf{I}_i$  is the rotary inertia,  $\mathbf{F}_i$  and  $\mathbf{M}_i$  are the external forces and moments acting on the particle, such as body force, buoyancy forces, drags forces and collision force and its moments.

For the simulation of ice model, the 3D sphere and dilated polyhedral DEM with bond and fracture model are employed in the breaking process of ice in ocean engineering, as shown in Figure 1.

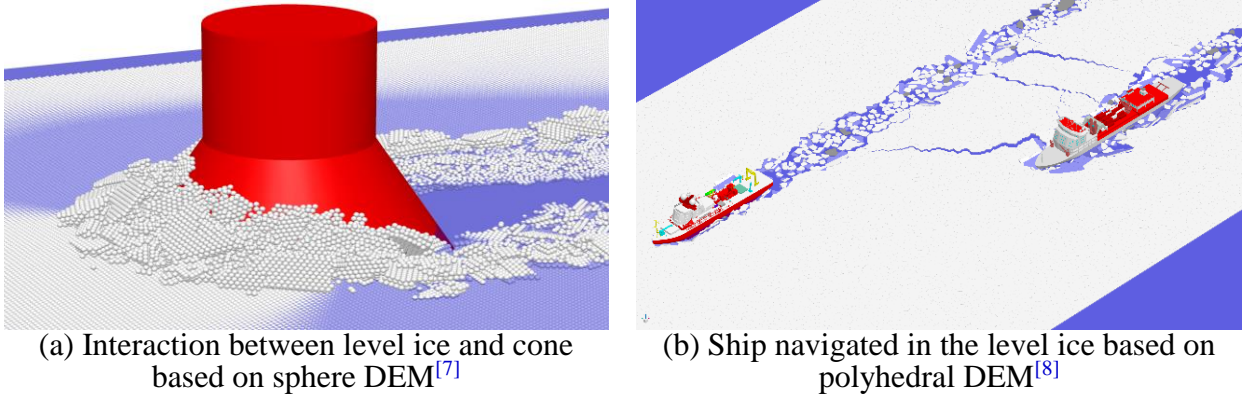


Figure 1. Different element of ice mode based on DEM are applied in ocean engineering

## 2.2 Governing equations for SPH

For incompressible Newtonian fluids, without considering energy loss, the fluid governing equation is as follows:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (4)$$

where,  $\rho$ ,  $p$  and  $\nu$  is the density, pressure and kinematic viscosity of fluids,  $\mathbf{v}$  and  $\mathbf{g}$  is the vector of the fluid velocity and gravity,  $t$  is time. The SPH method discretizes the range of fluid domain by the kernel function, and the fluid governing equation (1) and (2) are transformed from new form according to the particle approximation:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (5)$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = -\sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (6)$$



where,  $W_{ij}$  is the kernel function,  $m_j$  is the mass of particle  $j$ ,  $p_i$  and  $p_j$  is the pressure of particle  $i$  and  $j$ . Then, the explicit integration method is used to quickly solve the field variables of the particles to simulate the fluid domain changes.

### 2.3 Governing equations for FEM

The offshore structures in the current work are modelled using the FEM. In this method, the continuous structures are discretized into smaller and simpler “finite elements”. In this way, the partial differential equations on the whole structure dynamics does not need to be solved on the complete spatial domain, but on each small element. In matrix form, the dynamic equation of the structure is expressed as follows:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = Q \quad (7)$$

where,  $M$ ,  $C$  and  $K$  is mass, damping and stiffness matrix,  $Q$  is the vector of the external force,  $\ddot{u}$ ,  $\dot{u}$ , and  $u$  are the acceleration, velocity and displacement vectors. The explicit central difference method or implicit Newmark method is used to solve the dynamic equation.

### 2.4 Fluid-solid coupling

The solid materials including sea ice DEM and offshore structures FEM at any time is regarded as a solid phase without deformation and motion, and both are considered as the solid boundary of the SPH particle. In the fluid-solid boundary model of SPH, fixed or ghost particles method, boundary integral method, and repulsive force mode have all been used to deal with the contact of SPH particles with irregularly shaped boundaries. For the first two methods, the construction of irregularly DEM elements requires a large number of fixed or ghost particles and integral computation, and the construction algorithm can be cumbersome. In this paper, repulsive force model<sup>[9]</sup> is used to calculate the force between SPH particles and discrete elements, finite element structures, which is expressed as follows.

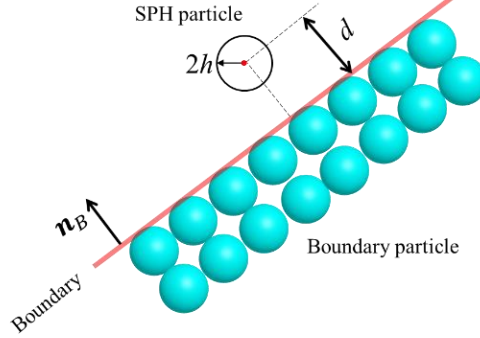
$$f_B = n_B \varepsilon(z) R(d) \quad (8)$$

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 0.02, & z \geq 0 \\ |z/h_0| + 0.02, & -h_0 \leq z < 0 \\ 1, & |z/h_0| > 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$R(d) = A \frac{1}{\sqrt{q}} (1 - q) \quad (10)$$

where,  $f_B$  is the repulsive force,  $n_B$  is the normal of contact plane,  $\varepsilon(z)$  is the

balances the pressure at different depths,  $R(d)$  is the repulsive force function,  $h_0$  is the initial fluid depth,  $z$  is the water level and free surface level is defined as the zero, i.e.,  $z = 0$ ,  $A$  is related to the sound speed.



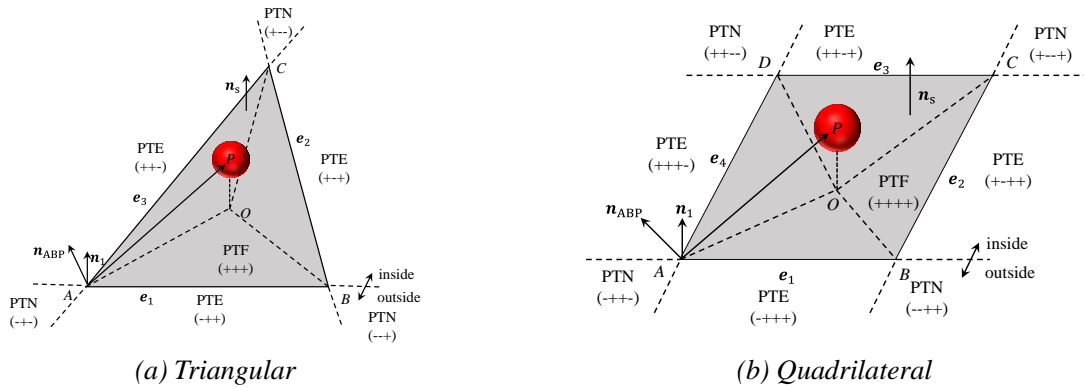
**Figure 2. Repulsive force model of SPH particle and arbitrary solid boundary**

### 2.5 Particles-FEM coupling

Both DEM and SPH are particle methods, and the particles-FEM coupling method mainly includes contact search and load equivalence. Contact search is mainly to calculate the distance and force between the particle and the finite element, as shown in Figure 3. A nonlinear contact model is used to calculate the contact forces between the DEM particles and the finite elements. The contact force is usually applied to any contact point on the element outside the model, and the contact force between the particles and the finite element is equivalent to the element node based on the shape function difference technique. And the function difference technique is defined as follows:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{F} \quad (i=1, 2, 3 \dots N) \quad (11)$$

where,  $\mathbf{f}_i$  is node force,  $\mathbf{N}_i$  is shape function,  $\mathbf{F}$  is the contact force between the particles and the finite element.

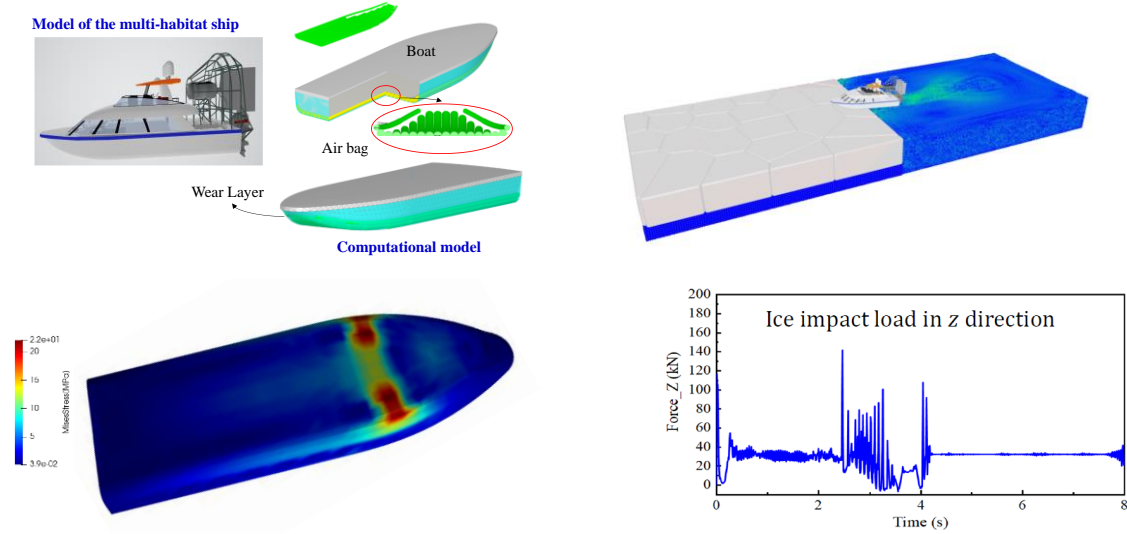


**Figure 3. Contact-search and load equivalence model of spherical element and different element**

### 3. Application for interaction between ice, water, and offshore Structure

#### 3.1 Case1: Simulation of a multi-habitat ship running from water to ice

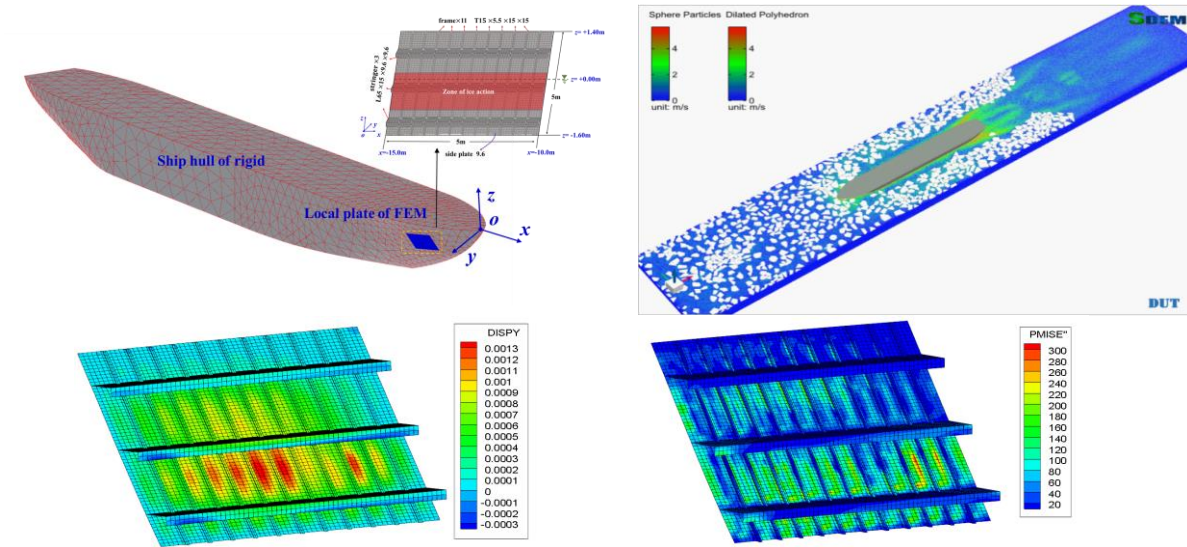
The coupled SPH-DEM-FEM method is used to simulate the navigation of multi-habitat ship from water to ice. Among them, the multi-habitat ship is composed of four parts, the wear-layer made of PVC at the bottom, the buffer air bag in the middle, the upper hull and the propulsion system. In the computational model, the wear-layer and air bag are modelled using the FEM, the hull is a rigid body, and the propulsion system is simplified. The sea ice is composed of polyhedral discrete elements, and the water is calculated by SPH. The whole simulation process and results are shown in Figure 4.



**Figure 4. Simulation of a multi-habitat ship running from water to ice (a) ship model, (b) process of multi-habitat ship running from water to ice (c) von Mises stress distribution of wear layer of ship (d) ice impact load in z direction**

#### 3.2 Case2: Simulation of ice-gonging ships navigated in the broken ice

The SPH-DEM-FEM coupling model is used to simulate the navigation of ships in the ice breaking area. The ice-gonging ship model is mainly divided into two parts: the rigid hull structure constructed by triangular mesh and the local grillage finite element model composed of plate and shell elements. The local grillage structure is located at the waterline height, the port side of the hull and near the shoulder, which is the main position for the collision between the ship and the ice floe. The Voronoi cutting algorithm is used to generate the ice crushing area with a density of 40%, and the broken ice element is polyhedral DEM. The water is calculated by SPH. The whole simulation process and results are shown in Figure 5.



**Figure 5. Simulation of ice-gonging ships navigated in the broken ice (a) model of ice-gonging ship (b) process of ice-gonging ships navigated in the broken ice (c) displacement distribution of y direction (d) von Mises stress distribution**

#### 4. Conclusions

This paper develops a novel coupled SPH-DEM-FEM model for FPSI. In the coupled model, the SPH was employed to simulate the fluid flow, the DEM was employed to model the sea ice and the FEM was used to model the structural deformation. In FSI of SPH, the repulsive force model is used to calculate the force between SPH particles and discrete elements, finite element structures. In particles-FEM coupling, the contact force between the particles and the finite element is equivalent to the element node based on the shape function difference technique. Finally, the proposed model is employed to investigate a multi-habitat ship running from water to ice and ice-gonging ships navigated in the broken ice.

#### Acknowledgments

This study is supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 42176241, 52192693) and the Ministry of Industry and Information Technology of China (2021-342).

#### References

1. Chen C., Shi W., Shen Y., et al. A multi-resolution SPH-FEM method for fluid-structure interactions[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022,401:115659.
2. Li B., Wang C., Li Y., et al. Dynamic Response Analysis of Retaining Dam under the Impact of Solid-Liquid Two-Phase Debris Flow Based on the Coupled SPH-DEM-FEM Method[J].Geofluids, 2020, 6635378.

3. Leonardi A., Wittel F., Mendoza M., et al. Particle-fluid-structure interaction for debris flow impact on flexible barriers[J]. *Computer-aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2016, 31(5):323-333.
4. Liu C., Liang L., A coupled SPH–DEM–FEM approach for modeling of debris flow impacts on flexible barriers[J]. *Arabian Journal of Geosciences*, 2022, 15(5):1-18.
5. Larsson M J P. A novel approach for modelling of physical interactions between slurry, grinding media and mill structure in wet stirred media mills[J]. *Minerals Engineering*, 2020, 148:106180.
6. Adhav P., Besseron X., Peters B. Development of 6-way CFD-DEM-FEM momentum coupling interface using partitioned coupling approach[J]. *Results in Engineering*, 2024, 22, 102214.
7. Long X, Liu S , Ji S. Discrete element modelling of relationship between ice breaking length and ice load on conical structure[J]. *Ocean Engineering*, 2020, 201(1):107152.
8. Liu L., Ji S. Dilated-polyhedron-based DEM analysis of the ice resistance on ship hulls in escort operations in level ice[J]. *Marine Structures*, 2021, 80:103092.
9. Liu L., Wu J., Ji S., DEM-SPH coupling method for the interaction between irregularly shaped granular materials and fluids[J]. *Powder Technology*: 2022,400: 117249.

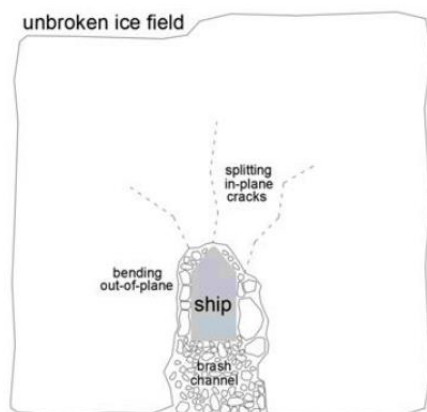
# RMIB FOR MODELING ICE-STRUCTURE INTERACTIONS IN BROKEN AND UNBROKEN SEA ICE FIELDS (EFFICIENT GPGPU SIMULATION)

**O.L. Konovalov**

Belarusian State University, Minsk, Belarus

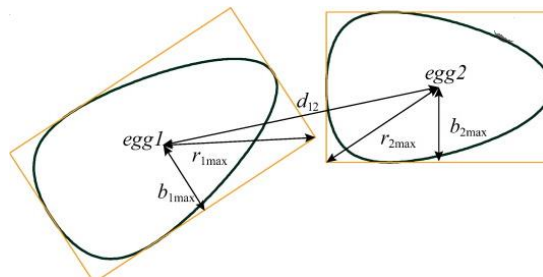
## Introduction

In this thesis, we investigate the computationally efficient approach to coupled simulate the processes of failure both a continues ice fields and a broken ice dynamic, caused by moving ice-breaking ships. Simulations of ice–structure interaction need to consider a complicated process (figure 1) including: fragmentation of ice field; formation and motion of ice blocks; interactions between the blocks; interactions between the blocks and the structure.



**Figure 1. Ice-structure interaction process**

Due to the discrete nature of broken ice, the Discrete Element Method (DEM) plays a central role in the development of numerical simulation programmers for ships traveling through broken ice. The classical DEM adopts an explicit scheme using rigid blocks and is usually referred to as the Smooth Discrete Element Method (SDEM). The contact detection (figure 2) on the fly is the most important issues in SDEM, and many researchers think that this “meshless” (ability of detection new contacts during the calculation procedure) is main feature of SDEM methods.



**Figure 2. Contact detection scheme**

From other side the collision detection is the most time-consuming step in

DEM. In worst case the complexity of contact detection is  $O(N^2)$ , where  $N$  is number of particles. There are many contact detection algorithms, which target is saving computing time and memory space, however this step is one of the most time consuming step of DEM.

From other side, for the simulations of fracture of continuous icefields, the bond based Discrete Element Method (BDEM) is used[1]. Bond DEM use stable bond's structure and there are not need the collision detection calculation step.

Typical example of bond DEM is real multidimensional internal bond (RMIB) approach that provide proper result of failure of continuous geostats. Physical correct crack propagation in RMIB arrive by very small time step that is proportional to value of relation of smallest bond length to sonic velocity for modeling material. Such small simulation time step request the special acceleration mechanism. For example massif parallelism approach based on GPGPU calculation. The BMIB is light applicable to GPGPU due to stable bond grid structure.

For coupled simulate the processes of failure (both a continues ice fields and a broken ice) there are as usually used both described above schemes, as SDEM, as bound DEM.

The main idea of presented in this thesis approach is to use one bond DEM computation scheme for both simulation. For this purpose, we provide to separate bond structure on two parts: stable and dynamic. The stable part are placed on GPU memory all time of computation, and the dynamics bonds are periodically reloaded between CPU $\rightleftharpoons$ GPU.

The main assumption of presented approach is that size of scope of dynamic bonds is enough small and frequency of dynamic bond recalculation is enough low. If above assumption will be true, then we should also provide of correctness of proposed computational approach.

So, the contents of our thesis is following: we described our specific “one layer” bond DEM and perform number of numerical experiments to estimate size increase of dynamic bonds, frequency of CPU $\rightleftharpoons$ GPU exchange and correctness of proposed computational scheme.

## **1. One layer ice RMIB**

Historically the first approach for modeling the crack propagation in elastic rock environment was LS (Lattice Spring) [2]. The next step was the VIB (Virtual Internal Bonds) model, where a continuous medium are determined as discretized model of microstructural relationships. The improved model of VMIB (Virtual Multidimensional Internal Bonds) was proposed by Zhang [3]. In

VMIB model bonds are broken down into components: normal and tangential forces are considered separately. At the current time, Zhao proposed the RMIB (Real Multidimensional Internal Bonds) model[4], where the bonds are determined by the contact of the particles in some packaging of the simulated medium. Take into account that RMIB provide good results in simulation of failure of continuous geostats, we design to based our ice DEM model on this approach. It should be pointed that some authors already used bond based DEM for the simulations of fracture of continuous icefields.

In RMIB model, each bond contains two springs: a normal spring and a shear spring where,  $k_n$  and  $k_s$  are respectively the normal and shear stiffness of bond. The deformation vector  $\mathbf{u}_{ij}$  of the bond, that connected particles i and j, decomposes into a normal  $\mathbf{u}^n$  and a shear  $\mathbf{u}^s_{ij}$  components. The normal and shear forces acting on the particle are:  $\mathbf{F}^n_{ij} = k_n * \mathbf{u}^n_{ij}$ ,  $\mathbf{F}^s_{ij} = k_s * \mathbf{u}^s_{ij}$ . If the bond's deformation reaches the critical value (i.e.  $\mathbf{u}_{ij} > \delta_0$ ), the bond goes to the broken state. In this state, the normal spring still elastically works on compression, but does not exert a tensile strength. The forces, that arise when the shear spring is deformed, should be are decreased and works as friction forces.

In RMIB theory, the relationship between properties of discretized 3D model  $k_n$ ,  $k_s$  and properties of continuous 3D model  $\mathbf{E}$ ,  $\nu$  is given by equations:

$$k_n = \frac{3E}{\alpha^{3D}(1-2\nu)} \quad (1)$$

$$k_s = \frac{3(1-4\nu)E}{\alpha^{3D}(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2)$$

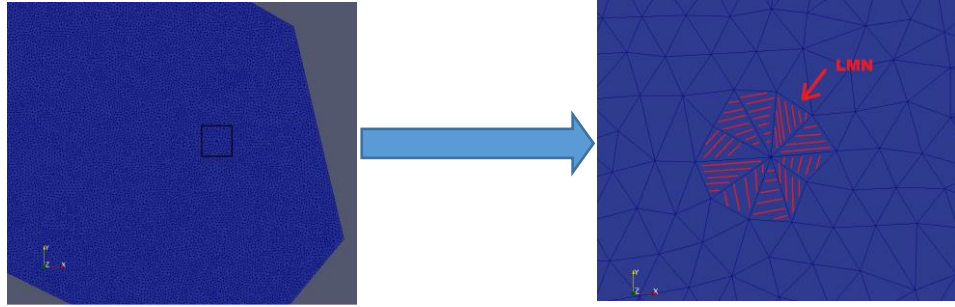
$$\alpha^{3D} = \frac{\sum l_i^2}{V} \quad (3)$$

here  $\mathbf{E}$ ,  $\nu$ ,  $V$ ,  $l$  are respectively the Young's modulus, Poisson ratio, volume of modeled media and average bond length.

For the shear spring, the relative shear displacement between two particles can be obtained simply as  $\mathbf{u}^s_{ij} = \mathbf{u}^n_{ij} - \mathbf{u}_{ij}$  like in some conventional lattice spring models. However, the shearing force calculated in this way is not rotationally invariant. To overcome the problem, Zhao has proposed a local strain based method [4]. In this method, the local strain of one particle is evaluated by a least square scheme, which only uses the displacement of itself and other particles, which have intact bonds with the particle. Based on above neighbor information the inverse of global transformation's matrix can be calculated. Unfortunately, in a practical simulation, the inverse of transformation's matrix may not exist in some conditions[4].



Our main assumption is that initial structure of ice bond structure is two dimensional Steiner constrained Delaunay triangulation (Steiner CDT). This bond grid structure we will name “**initial structure**”. Therefore, the center of elements will be associates with triangulation vertices. It means that our ice model is “one layer”. It means also that particle size is correlate with ice thickness. For each elements form the initial structure, we can define local manifold neighborhood (LMN) – the set of triangles adjusted with appropriate triangulation vertex (see figure 3).

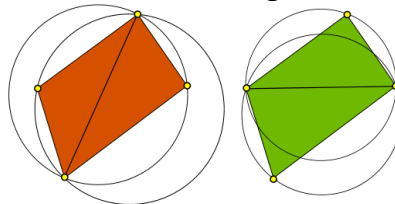


**Figure 3. The set of triangles adjusted with appropriate triangulation vertex**

The usage of Delaunay triangulation as bond structure give as some benefits. The first benefit of defined above structure is that under plane normal forces it provide 0.33 Poisson ratio without usage of share forces. The second benefit is that we can use average normal of LMN as local appreciation of ice surface normal in center of DE. Let  $\mathbf{a}_i$  is average LMN normal of particle  $i$ . We will calculate  $\mathbf{u}^n$  as projection  $\mathbf{u}_{ij}$  on plane with normal  $\mathbf{a}_i$  and we will calculate  $\mathbf{u}_{ij}^s$  as projection  $\mathbf{u}_{ij}$  on vector  $\mathbf{a}_i$ . So, the interaction forces at the contact interface between two particles  $i$  and  $j$  ( $F_{ij}$ ) are obtained from the normal ( $F_{ij}^n = k_n * \mathbf{u}_{ij}^n$ ) and tangential ( $F_{ij}^s = k_s * \mathbf{u}_{ij}^s$ ) components.

## 2. Dynamic bonds structure and effective re-meshing algorithm.

If during simulation moving ice-breaking ships process the initial 2d bond structure is “lose” the Delaunay properties, then we force recalculate bond’s structure. The Delaunay lemma give as the way to recognize this “loses” effectively due to control only local Delaunay property (figure 4). It give as possibility to move this control on GPU level. The cost of above solution is additional global memory to store cells and neighborhood.

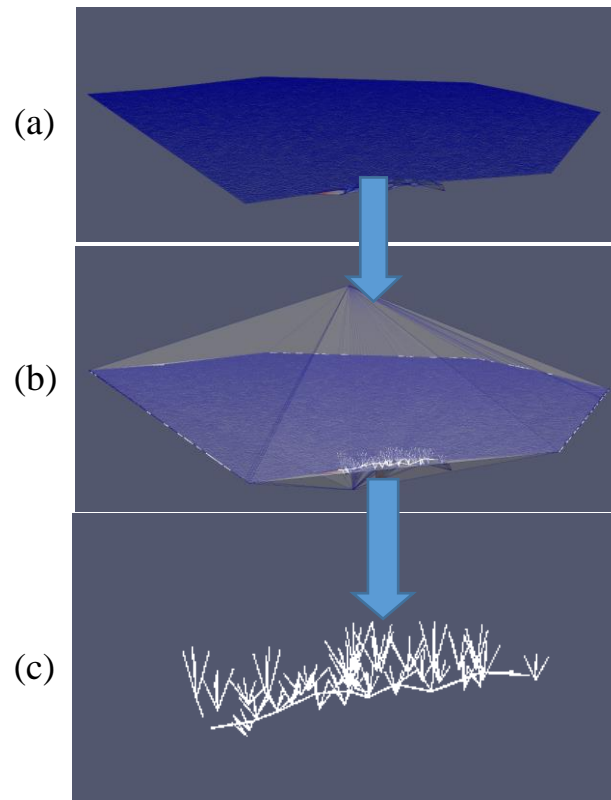


**Figure 4. Local Delaunay property control**

If this re-meshing will be perform on CPU then we need periodically reloading new bond structure between CPU and GPU memory and it can destroy all GPGPU advantages. To avoid this we propose divide bond structure on two parts static and dynamic.

We have propose the following algorithm to calculate above “dynamic 3d bond structure”. We will perform three dimensional Delaunay triangulation (DT) over “extended simplicial complex”. This “extended” complex includes initial CDT triangulation and two additions “bounding” points. One of them place below and other place under of ice field to provide 3d convex hull included elements of initial 2D bond structure. Than we remove from resulting DT the all edges that already presented in initial structure of bonds and edges adjusted with two “extended” bounding points. The scope of residual edges will be the required dynamic bond structure. The complexity of three dimensional Delaunay triangulation is  $N*\log(N)$ . Therefore, we receive main benefit of our approach:

$O(N*\log(N))$  instead  $O(N^2)$ .



**Figure 4. Dynamic 3D bond stucture calculation algorithm**

The figure 4 illustrate described above algorithm. On subfigure “a” we see the current stage of our “one layer ice” model. On subfigure “b” we see three dimensional Delaunay triangulation over “extended” complex includes initial CDT triangulation and two additions “bounding” points. On subfigure “c” we see the new detected dynamic bonds structure.

During bond DEM calculation pipeline, we will use both bond schemes and “static” and “dynamic”. Therefore, size of “dynamic structure” are critical for proposed approach. We will be investigate this value experimentally.

### 3. Numeric simulation

#### 3.1 Ice cakes and floe-ice fractures by spherical body.

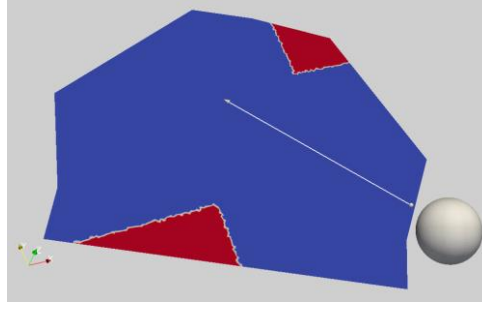
In this section we study the interaction between an ice-breaking ship and separate ice floes. The simulated system consists of a digital model of a theoretical ship bow advancing with a constant speed in one direction towards the modeled ice floe. Thus, the numerical simulation is of a Single Degree of Freedom (SDF) motion. This simulations are described by two elements: the ship bow and the modeled ice floe. The ship bow is considered as a solid with imposed motion and represent be analytical sphere body, whereas the ice floe is composed by an arrangement of bonded Voronoy particles.

In Table 1 the computational parameters for the ice material, the computational parameters for the ship bow and the numerical computational parameters are listed.

**Table 1. Material’s property and ship bow geometry**

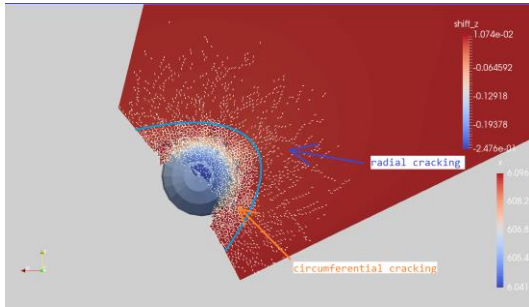
Definitions	Values	Units
Ice cover size	150 x 300	m
Ice thickness	0.3	m
Sphere radius	25	m
Sphere velocity	0.5	m/s
Sphere/water elevation	0.5	m
Density of ice	920	kg/m <sup>3</sup>
Young Modulus of ice	1e+9	Pa
Poisson ratio of ice	0.33	
Ice-ice (static) friction	0.05	
Ice-bow (static) friction	0.25	
Young Modulus of ship bow	20e+9	Pa
Time step	1.0e-5	s
Simulation time	70	s
Calculation time	2	hour

Motion scheme and boundary conditions present on figure 5. The white ray show us the direction of ship movement. The red areas define the boundary condition on ice floe with zero velocity.

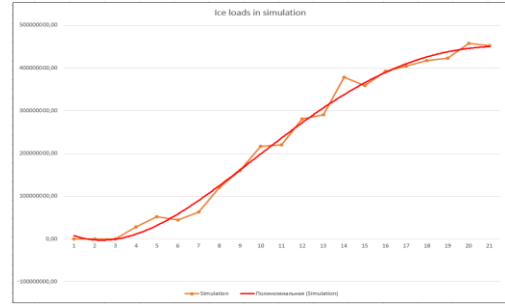


**Figure 5. Boundary conditions**

The simulation process reproduce as “radial” as “circumferential” cracks (picture 6a) and also demonstrate the suitable ice loads on the spherical ship bow (picture 6b).



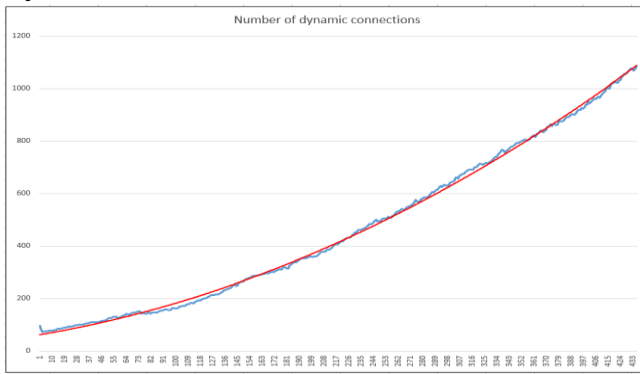
(a)



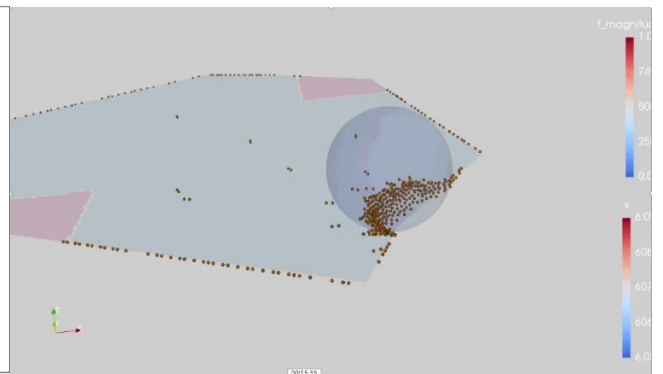
(b)

**Figure 6. Crack propagation process**

However, the main our goal was investigate the increasing of size of “dynamic structure”. This increasing presented on subpicture 7a. On subpicture 7b present the placement of dynamic bonds. We see that rate of increasing of “dynamic size” is enough low. Especially in comparison with size of “static” bond’s structure, that is near 50000 bonds. We see that maximum number of dynamic bonds is less then 3% of number of static bonds.



(a)



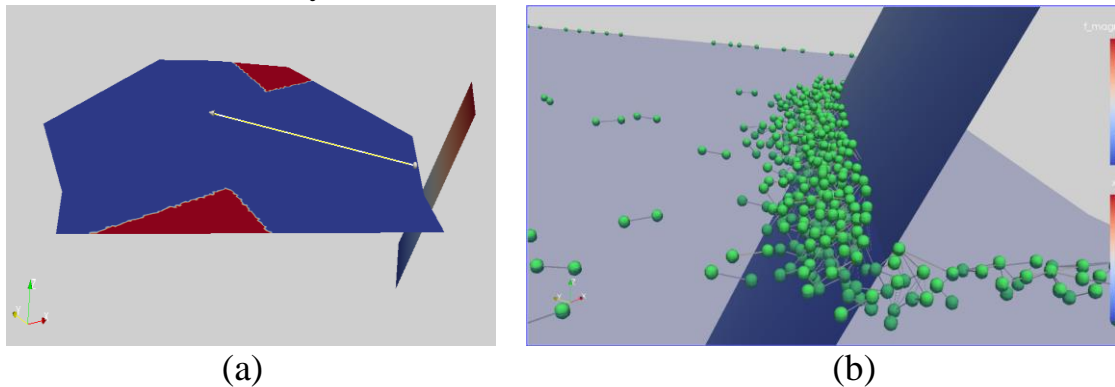
(b)

**Figure 7. Dynamic structure size increase**

### 3.2 Inclined plane.

The next simulation is well-known problem - the horizontal ice load applied on the inclined plane. We changed movement scheme in comparison with classical approach. Plane moved instead ice floes. Ice floes is under

boundary conditions present on picture 8a. The white ray show us the direction of inclined plane movement. The red areas define the ice floes boundary condition with zero velocity.



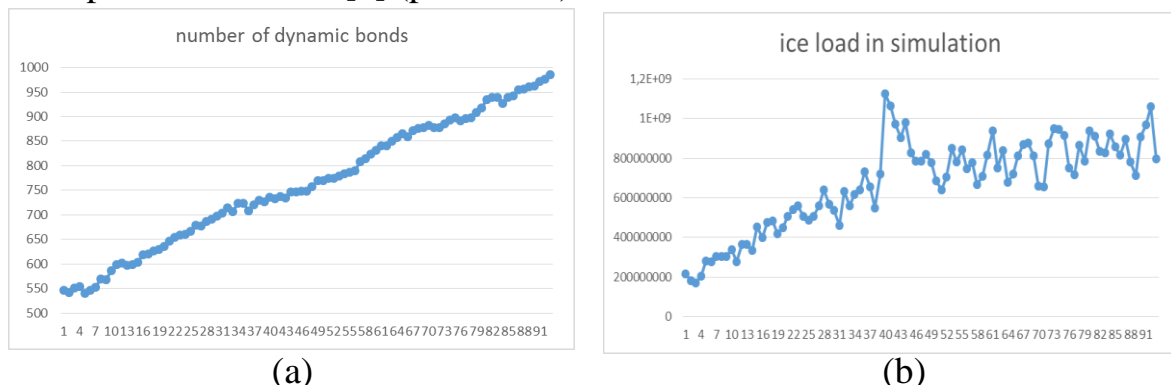
**Figure 8. Boundary conditions for the case of the horizontal ice load applied on the inclined plane**

In Table 2 the computational parameters for the ice material, the computational parameters for the inclined plane and the numerical computational parameters are listed.

**Table 2. Material's property and inclined plane geometry.**

Definitions	Values	Units
Ice cover size	150 x 300	m
Ice thickness	0.3	m
Plane width	20	m
Plane velocity	0.5	m/s
Density of ice	920	kg/m <sup>3</sup>
Young Modulus of ice	1e+9	Pa
Poisson ratio of ice	0.33	
Ice-ice (static) friction	0.05	
Ice-structure (static) friction	0.25	
Young Modulus of structure	20e+9	Pa
Time step	1.0e-5	s
Simulation time	70	s
Calculation time	2	hour

The simulation process reproduce the “typical” behavior of ice load for inclined plane simulation [5] (picture 9b).



**Figure 9. Number of dynamic bond and ice load in simulation**

However, the main our goal was investigate the increasing of size of

“dynamic structure”. This increasing presented on subpicture 9a. On subpicture 8b present the placement of dynamic bonds. We see that rate of increasing of “dynamic size” is enough low. Especially in comparison with size of “static” bond’s structure, that is near 50000 bonds. We see that maximum number of dynamic bonds is less then 2% of number of static bonds/

## Conclusion

We try here very briefly describe the idea of “dynamic bonds” for BDEM approach. As example of BDEM we use here RMIB. The applicability of above idea is the case when global part of simulated structure is more less stable and sufficient movements of particles take place in local part of simulated structure. In this case, we propose to use BDEM approach that is well GPGPU applicable. But in any case some bonds will be changed during simulation process. To avoid extensive CPU  $\Leftrightarrow$  GPU intercommunication we propose separate bonds on “stable” and “dynamics” parts. The another features of our approach is use Delaunay triangulation instead contact detection algorithms. Of course described approach is rather than universal, bat in some case they can give us the way for real simulation of complex problems.

## References

1. Jou, O.; Celigueta, M.A.; Latorre, S.; Arrufat, F.; Oñate, E. A bonded discrete element method for modeling ship–ice interactions in broken and unbroken sea ice fields. *Comput. Part. Mech.* 2019, 6, 739–765.
2. H. Gao, P. Klein, Numerical simulation of crack growth in an iso-tropic solid with randomized internal cohesive bonds, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 46 (1998) 187–218.
3. Z. Zhang, X. Ge, A new quasi-continuum constitutive model for crack growth in an isotropic solid, *European Journal of Mechanics* 24 (2005) 243–252.
4. G.F. Zhao, J. Zhao, J.N. Fang, Development of Micro-Macro Continuum-Discontinuum Coupled Numerical Method, *Ecole Poly-technique Fédérale de Lausanne, Lausanne* (2010).
5. Ji, S.; Li, Z.; Li, C.; Shang, J. Discrete element modeling of ice loads on ship and offshore structures. *Acta Oceanol. Sin.* 2013, 188, 45–54.

# ASYMMETRIC SCATTERING EFFECT OF SOLITARY WAVE IN A TWO-SECTION COMPOSITE GRANULAR CHAIN

**Decai Huang**

School of physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, China

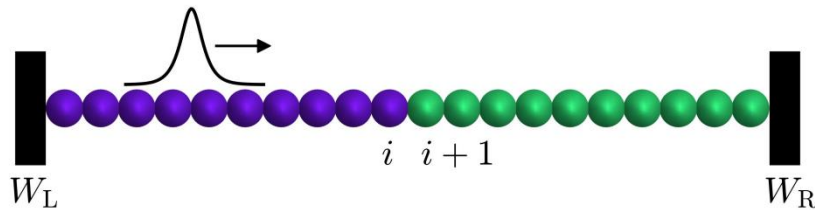
## Introduction

Granular materials, consisting of discrete grains, are commonly encountered in agricultural and industrial activities. These materials exhibit various unique phenomena such as dilute-dense granular flow and segregation of binary mixtures. These phenomena have been extensively observed in grain storage, pharmaceutical mixing, mineral exploitation, and mechanical processing. The ordered granular chain (GC) is a fundamental component used to control and manipulate the propagation of mechanical waves in numerous applications. This includes energy management, signal processing, shock mitigation, and even the design of mechanical logic elements. Understanding the dynamics of nonlinear wave propagation, especially nonlinear scattering at mismatched interfaces, within an ordered granular chain is crucial for theoretical investigations and engineering applications in the field of acoustic metamaterials.

## 1. Simulation Model

Fig. 1 shows the sketch of a one-dimensional composite GC with two sections. A line of spherical grains  $N=N_L+N_R$  with identical diameter  $d=5$  mm is arranged between two fixed walls, i.e.,  $W_L$  and  $W_R$ . In the simulation, the precompression is achieved by adjusting the distance between the left and the right walls. The interaction force without dissipation between two adjacent grains is only considered in the normal direction. Hertz model is used to describe the nonlinear interaction,

$$F_i^H = k_n[\delta_0 + (u_{i-1} - u_i)]_+^{3/2}, \quad (1)$$



**Fig. 1 Sketch of a two-section composite granular chain**

In the simulation, the discrete element method is adopted to describe the motion of each grain. The position and velocity of each grain are updated by integrating Newton's second law of motion. The Verlet-velocity algorithm is used in each time step. According to Eq.(1), grain  $i$  moves under the following equation,

$$m \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = k_n [\delta_0 + (u_{i-1} - u_i)]_+^{3/2} - k_n [\delta_0 + (u_i - u_{i+1})]_+^{3/2}. \quad (2)$$

In Table 1, the parameters of granular materials in the left-section GC used in the simulations are listed in Table 1.

**Table 1** The parameters of the granular materials

Quantity	Symbol	Value
Diameter (mm)	$d$	5
Density for grain (g/cm <sup>3</sup> )	$\rho$	7.9
Young's modulus (GPa)	$E$	193
Poisson's ratio	$\nu$	0.25
Simulation time-step (s)	$dt$	$10^{-9}$

## 2. Theoretical Arguments

For a strongly precompressed GC,  $(u_{i-1} - u_{i+1})/\delta_0 < 1$ . Nesterenko employs a continuum approximation with  $L > d$ , where  $L$  is the characteristic spatial size of the perturbation to make Eq.2 into a classical KdV equation, and the corresponding SW velocity is analytically derived:

$$V_S = c_0 \left( 1 + \frac{d\xi_{\max}}{12\delta_0} \right), \quad (3)$$

The other analysis is conducted for the weakly precompressed GC with  $(u_{i-1} - u_{i+1})/(\delta_0) > 1$ . It begins at  $\delta_0 \sim u_{i-1} - u_{i+1}$  as an initial condition. The SW velocity is written as,

$$V_{S0} = \frac{2}{\sqrt{5}} c_{\text{mat}} \xi_{\max}^{1/4}, \quad (4)$$

When the ISW passes through a mismatched interface,  $x=0$ , the grains around the interface must be involved simultaneously because the SW has a certain width. In our simulation, the deformation induced by ISW is rather smaller contrasted with the initial precompression,  $\delta_0$  for a small amplitude of ISW. Thus, the ISW can be considered traveling across a precompressed two-section composite GC with different material parameters. Mass density and elastic coefficient are regarded to remain constant. In particular, Eqs.(3)(4) indicate that mass density and elastic coefficient have the same effects on the



characteristic wave velocities  $c_0$  and  $c_{\text{mat}}$ . Thus, we can make the following arguments on the asymmetric scattering effect taken from the mismatched mass density and elastic coefficient by using classical acoustic theory in a linear medium.

The characteristic wave velocity ratio of the  $c_0^{\text{R}}$  of the right section to  $c_0^{\text{L}}$  of the left section is introduced,

$$\gamma_{c_0} = c_0^{\text{R}}/c_0^{\text{L}} = \alpha_{\rho}^{-1/2} \alpha_{k_n}^{1/3}, \quad (4)$$

in which the initial force equilibrium condition is used,  $k_n^{\text{L}}(\delta_0^{\text{L}})^{3/2} = k_n^{\text{R}}(\delta_0^{\text{R}})^{3/2}$ .

The acoustic impedance ratio can be defined as:

$$\gamma_{R_G} = R_G^{\text{R}}/R_G^{\text{L}} = \alpha_{\rho}^{1/2} \alpha_{k_n}^{1/3}. \quad (7)$$

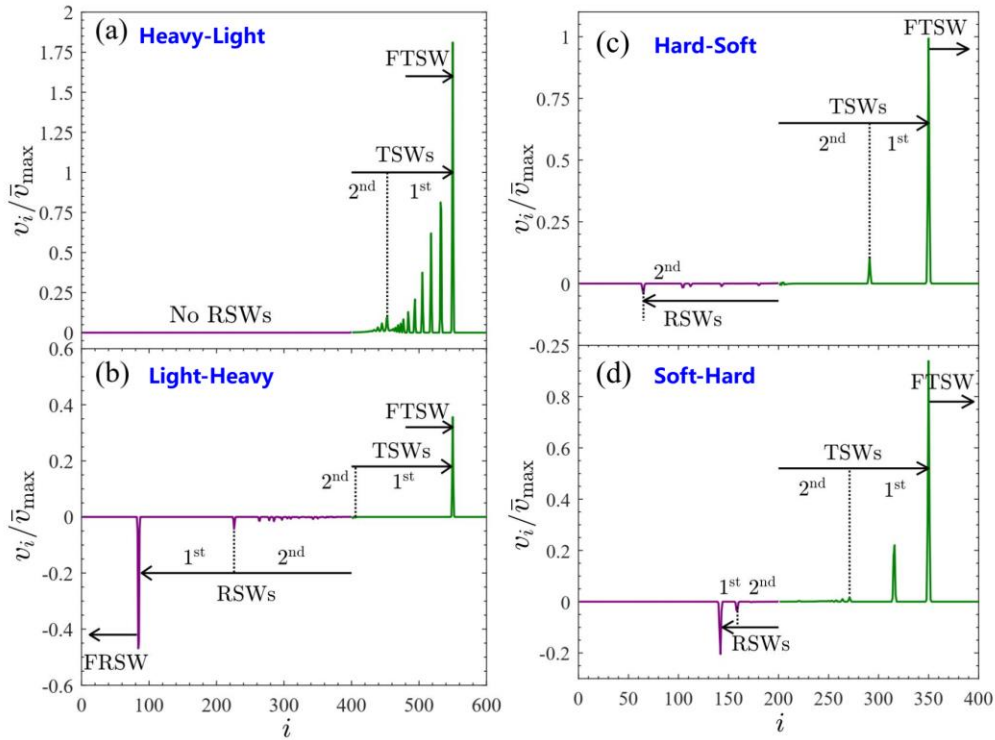
Introducing of the characteristic wave velocity ratio and the acoustic impedance ratio is useful for discussing the asymmetric scattering effect in the two-section composite GC with a mismatched interface. First, the mismatch of wave velocity can lead to the “fracture” and “squeeze” effects of the ISW at the interface for  $\gamma_{c_0} > 1$  and  $\gamma_{c_0} < 1$ , respectively. At the former condition, the single-speak ISW decomposes into at least two parts because the leading front ISW first passing across the interface has a larger propagation velocity in the right-section GC than that the following part lagging in the left-section GC. Under the latter condition, the propagation velocity of the leading front ISW in the right-section GC is smaller than that of the following part in the left-section GC. The two parts would be squeezed and thus compressive TSWs and RSWs are generated on both sides of the interface of the two-section GC. Second, the mismatch of the acoustic impedance can also result in ISW breakdown. Compared with the “soft” right-section GC, the left-section GC can be considered as a “hard” one when  $\gamma_{R_G} < 1$ . In this case, the acoustic pressure of the transmitted wave  $P_{\text{Tr}}^{\text{R}}$  is higher than the incident wave  $P_{\text{In}}^{\text{L}}$ . This indicates the occurrence of the overshooting phenomenon when the grains in the RSWs keep the same phase as that in the ISW. The RSWs should be an expansive wave. Under the condition of  $\gamma_{R_G} > 1$ ,  $P_{\text{Tr}}^{\text{R}}/P_{\text{In}}^{\text{L}} < 1$ ,  $P_{\text{Re}}^{\text{L}}$  is lower than  $P_{\text{Re}}^{\text{R}}$ . The left-section GC is “soft”, making the RSWs and the TSWs being compressive\cite{Acousticbook01,Acousticbook02,Xu2017Phlow372.20130186

,Daraio2006PRL96.058002}. When  $\gamma_{R/G}=1$ , the reflection is completely suppressed and total transmission occurs.

### 3. Simulation results

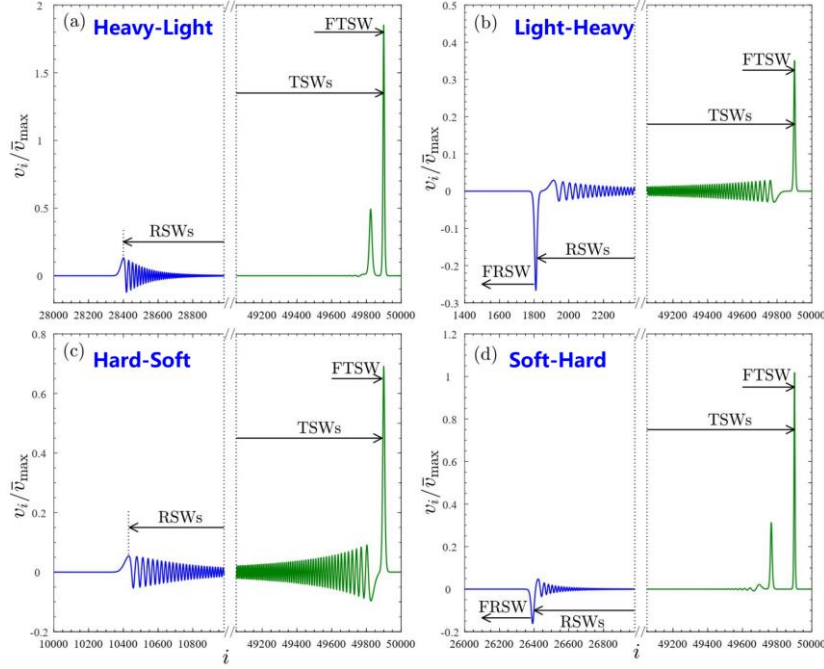
The precompression is set to  $\delta_0=0$ . In Fig.2(a), a heavy-light GC is used. The ratio of mass density is  $\alpha_{\rho}=\rho^{\rm R}/\rho^{\rm L}=0.2$ , i.e.,  $\gamma_{c_0}>1$  and  $\gamma_{R/G}<1$ . The mismatched interface is placed between grains 400 and 401. The mass-mismatch interface leads to occurrence of a wave fracture in the right-section GC, in which a series of multipulse-structure TSWs arises. In Fig.2(b), the light-heavy chain extends the nonlinear scattering effect to both sides of the interface. In the right-section GC, a single FTSW appears, which occupies most of the energy of TSWs. In the left-section GC, one single front wave of RSWs(FRSW), following a series of secondary waves.

The precompression is set to  $\delta_0=10^{-3}$ . In Fig.3(a), the fracture of the ISW occurs and the TSWs are a multipulse structure as expected. The mismatch of acoustic impedance i.e.,  $\gamma_{R/G}<1$ , results in the occurrence of the overshooting effect. A portion of initial potential energy in the left-section GC is released and enters into the right-section GC. A train of expansive oscillatory RSWs arises. Similar results are repeated for hard-soft chain,



**Fig. 2 Grain velocity as a function of grain number in mass-mismatch granular chain with precompression  $\delta_0/d=0$ . (a) Heavy-light chain**

$\alpha_{\rho}=0.2$ , (b) light-heavy chain  $\alpha_{\rho}=5$ . (c) Hard-soft chain  $\alpha_{k_n}=0.2$  (d) Soft-hard chain  $\alpha_{k_n}=5$ .



(a) Heavy-light chain  $\alpha_{\rho}=0.2$ , (b) light-heavy chain  $\alpha_{\rho}=5$ . (c) Hard-soft chain  $\alpha_{k_n}=0.2$  (d) Soft-hard chain  $\alpha_{k_n}=5$ .

**Fig. 3 Grain velocity as a function of grain number in elastic-mismatch granular chain with precompression  $\delta_0/d=10^{-3}$ .**

$\alpha_{k_n}=0.2$ , as shown in Fig. 3(c). For light-heavy chain  $\alpha_{\rho}=5$  and Soft-hard chain  $\alpha_{k_n}=5$ , the ISW is decomposed into an FTSW and a multipulse structure SWs, which can exist stably. For the RSWs, the soft characteristic of the left-section GC produces a compressive RSWs, composed of a stable FRSW and a train of oscillatory waves dying away.

## Conclusions

In this study, the asymmetric scattering effect of SW in a two-section composite GC is studied via numerical simulations. Building upon Nesterenko's work on solitary waves in monodisperse granular chains and using continuous acoustic wave theory in linear medium, we argue the intrinsic materials properties, i.e., mass density and elastic coefficient, dominate the asymmetric scattering effect of the mismatched interface. The numerical simulations are then conducted on granular chain.

The Nesterenko work on the characteristics of SW in monodisperse GC is briefly revisit at the uncompressed and compressed conditions. According to

continuous acoustic wave theory in a linear medium, the mismatched acoustic velocity and the impedance at the interface are used to explain the asymmetric scattering effect of the two-section GC. When the SW is incident from the section with a small acoustic velocity, the fracture effect occurs, and the TSWs are generated in a multipulse structure. On the contrary, the squeeze effect occurs at the mismatched interface with large acoustic velocity, in which the transmitted and reflected waves being compressive can be generated. However, the mismatched interface with high acoustic impedance leads to the occurrence of the overshooting effect, in which the RSWs appear as an expansive wave.

The simulation results confirm that the mismatched acoustic velocity and the impedance at the interface, which are intrinsically determined by the mass density and elastic coefficient, dominate the nonlinear asymmetric scattering effect. When  $\gamma_{c_0} > 1$ , i.e.,  $\alpha_{\rho} < 1$  and  $\alpha_{k_{\text{rm n}}} > 1$ , the fracture effect occurs for the TSWs in which an SW train is observed. The squeeze effect occurs at the mismatched interface with  $\gamma_{c_0} < 1$ , i.e.,  $\alpha_{\rho} > 1$  and  $\alpha_{k_{\text{rm n}}} < 1$ . The overshooting effect is validated for  $\gamma_{R_{\text{rm G}}} < 1$ . The mismatched interface, which is a hard-soft one, leads to the generation of the expansive wave in the RSWs. For the unprecompressed GC, the separation gaps arise, and the amplitude of the RSWs are very tiny. The expansive waves, which cannot live long, when the precompression is loaded. For the soft-hard interface, i.e.,  $\gamma_{c_0} > 1$ , the RSWs propagate in the compressive form.

# **COMPUTER MODELING OF OIL RECOVERY BY THE LARGE-BLOCK AVERAGING METHOD**

**V.B. Taranchuk**

**Belarusian State University, Minsk, Belarus**

In numerical experiments to study the processes occurring during the operation of oil fields, as a rule, well operating modes, changes in oil saturation and reservoir pressure distributions, and the density of oil reserves are predicted. The forecast can be carried out on the basis of various descriptions, in particular, using statistical or hydrodynamic models.

Hydrodynamic models are based on strict laws of conservation of mechanics. This is their main advantage and the main difference from statistical models. Calculations based on hydrodynamic models require information about the distribution of reservoir parameters throughout the object (it is three-dimensional, the parameters change over time). It is important that the accuracy of the accepted model of underground hydromechanics is consistent with the inevitable inaccuracy and incompleteness of the initial information about the structure and properties of the reservoir system [1–3].

When creating hydrodynamic models, the concept of "reliable information" about reservoir parameters is usually replaced by the concept of "plausible information". The latter (plausible) is obtained at the stage of model adaptation, which is a way to distribute well measurement data and other available a priori information to the entire facility. As a rule, it is impossible to unambiguously determine the structure and properties of a reservoir system in the inter-well space; the obtained "plausible" parameters in general may not coincide with the real characteristics [3].

In the report, on the example of using the tools of the created computer constantly operating model of oil field development, it will be noted and discussed:

- features of the geometric description of the modeling object;
- accepted approximations in the description of filtration processes;
- algorithmic and computational methods for approximating the corresponding system of equations of underground hydrodynamics;
- the results obtained in the GeoBazaDannych software complex.

Theoretical, methodological issues and fundamentals; technical and algorithmic solutions; techniques and rules for data preparation; tools and instruments for conducting, visualizing, interpreting the results of computational experiments are described in [4]. At the same time, in particular, the difficult

issues of setting up models and techniques for achieving the required accuracy are noted – extremely time-consuming and lengthy calculations that require analysis by specialists of a large number of options when selecting "plausible" data to describe the reservoir system. The novelty of this work is the use of software tools for intellectual analysis, an illustration of effective solutions to model adaptation issues.

**Key positions.** Within the framework of the concept of the GeoBazaDannych system, when solving problems of mathematical modeling of objects of geology, underground hydrodynamics, a technique is being developed, following which the core and basis for building computer geological models is a digital description of the volume-limiting surfaces. In this case, the main stage is the construction of generalized surfaces describing the topology of the object, the sequence of occurrence of geological bodies, layers, that is, a kind of structural "bookcase" ([5]). For a three-dimensional geological object structured by layers, the approach of building a model in the "constructor" mode is used, when the model is assembled and edited in parts, which are individual geological elements. For layers, distributions of the studied parameters are included in the description. Such parameters are: reservoir type, capacity, porosity, permeability, oil saturation of the reservoir. The initial data for these descriptions, as a rule, are the values of the observed parameter at points with known geometric coordinates, at points that are placed irregularly on the area, for example [1], measurement data on seismic profiles, exploration wells.

When analyzing and predicting the operation of a concrete field (deposit), it is considered that the simulated object is composed of several layers (or only one); the layers can be separated, hydrodynamically interconnected, may have an impenetrable boundary along the perimeter, or a flowing one; wells can open all or only some layers [5, 6]. Filtration it is modeled separately in each oil stratum.

The distributions of the parameters of each layer take into account heterogeneities (variable in area "in plan"), namely: capacity, porosity, absolute permeability, oil saturation. It is accepted that defined flows/exchanges are possible along the perimeter and/or on sections of the roof, sole. At the initial moment of time, the distributions of oil saturation and reservoir pressure are considered to be known. Boundary conditions (described in detail in [4]) – impermeability conditions or the intensity of inflow or pressure of structured reservoir water are set along the perimeter; bottom-hole pressures are set at producing wells; conditions for the absence of oil and pressure or flow rate are set at injection wells. Separately, we note that in the GeoBazaDannych model,

processes in the wellbore are not considered – wells are set by sources, drains. It is believed that the processes in the layers are isothermal and thermodynamically equilibrium, two immiscible phases participate in filtration – water and oil.

In the GeoBazaDannych, for the purposes of designing and forecasting scenarios for the development of oil fields, a methodology has been created and implemented in the software package that allows, with a relatively rough division of the filtration area into separate block elements (may contain several wells), to calculate the main technological indicators. The technique makes it possible to assess the depletion of layers in blocks on average, and when divided into small elements (as in ordinary grid models) to describe filtration in detail. Combined options are possible when reservoir flooding is described in detail in the area of increased interest, and outside – in large blocks.

The use of the GeoBazaDannych model for reproducing and predicting oil recovery processes is possible at the stages of primary and secondary production, as well as when using advanced flooding methods.

The basic rules for separating simulated objects into blocks. The corresponding vertical partitioning and schematization are determined by the availability of the source data and the requirements for the model. According to the stratification, the oil deposit is represented as a set of  $N$  layers. Layers can coincide with real layers, represent individual layers as a set of layers (interlayers), or combine layers of similar structure into one layer. The flow area in the plan is divided into  $M$  subdomains (block elements), bounded by polylines/boundaries (depending on the geological conditions of the reservoir and its properties, on the well placement scheme). Each subdomain can contain an arbitrary number of wells (there may not be any wells in the subdomain). Wells can be located at the tops, on the sides, or inside subdomains.

The division into blocks, uniform for all layers, is carried out taking into account the geological conditions of the reservoir and its properties, and depends on the well placement system. When dividing an object (fields, deposits) into blocks, the following factors are taken into account:

- the lithological structure of the object;
- the variability of reservoir properties in the selected subdomains should be minimal, i.e. reservoir properties in them are characterized by minimal heterogeneity;
- the layout of wells and the expected pattern of flooding, following the allocation rules to ensure minimal flows of liquid phases between blocks (for example, you need to split along the cutting rows of injection wells).

The architecture and composition of the GeoBazaDannych software complex are described in [4]. We note the subsystems for the implementation of splitting the filtration area into subdomains (block elements), calculating the dynamics of flooding:

- Gen\_MAPw generator and editor of thematic maps and digital fields is a multifunctional software package; in particular, it provides the following capabilities: creation and editing of vector images; supports calculation using several methods and algorithms of digital fields approximating volume distributions of geometric, geophysical and other characteristics of objects of ecology and geology, underground reservoirs, active layers of soils;

- Geo\_MDL software package – mathematical, algorithmic and software tools for building geological models of soil layers, multilayer strata; the complex can work in interactive and batch modes, its modules provide the user with means of analysis, visual representation, modeling of bounding surfaces and distributions of geophysical and other parameters in layers, territories;

- software and algorithmic support for the formation and maintenance of constantly operating hydrodynamic models of multiphase filtration in porous, fractured media with tools for adapting mathematical models on the history of oil recovery processes, calculating reservoir capacitance characteristics, forecasting and expertise of oil recovery measures.

The tools of intellectual adaptation are described in [7, 8]. The report will provide several representative examples of automatic block formation using clustering tools in cases where it is performed taking into account the distributions of effective capacity or the specific density of recoverable reserves.

## **References**

1. Aziz, H. Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem / H. Aziz, E. Settari – M.: Nedra, 1982. — 407 p.
2. Bulygin, V.Ya. Pravdopodobnoe modelirovanie / V.Ya. Bulygin. – Kazan: KGU, 1985. – 170 p.
3. Halimov, E.M. Detal'nye geologicheskie modeli i trehmernoe modelirovanie / E.M. Halimov // Neftegazovaya geologiya. Teoriya i praktika.– 2012. – № 3(7). – P. 1–10.
4. Taranchuk, V.B. Komp'yuternye modeli podzemnoi gidrodinamiki / V.B. Taranchuk. – Minsk : BGU, 2020. – 235 p.
5. Bulygin, D.V. Geologiya i imitaciya razrabotki zalejei nefti / D.V. Bulygin, V.Ya. Bulygin. – M.: Nedra, 1996. – 382 p.



6. Barvenov, S.A. Metodika, instrumentarii adaptacii matematicheskikh modelei processov podzemnoi gidrodinamiki / S.A. Barvenov, M.F Kibash, V.B. Taranchuk // Vybranyya navukovyya pracy BDU, t. “Matematika”. – Minsk, 2001. – P. 34–65.

7. Taranchuk, V.B. Features and examples of clustering in the system GeoBazaDannych / V.B. Taranchuk // AIP Conference Proceedings 2497, 030025 (2023): Volume 2497, Issue 1, 2023, – P. 1-9. doi: <https://doi.org/10.1063/5.0103603>.

8. Taranchuk, V.B. Examples of Integration of Intelligent Computing Modules and the System GeoBazaDannych / V.B. Taranchuk // Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2024) : Research Papers Collection / BSUIR. – Minsk, 2024. – Issue 8. – P. 189–194.

# **SHIELD TUNNEL EXCAVATION ANALYSIS WITH/ PIPE SHED SUPPORT**

**Honghua Zhao, Yunpeng Ji**

**Dalian University of Technology, Dalian, China**

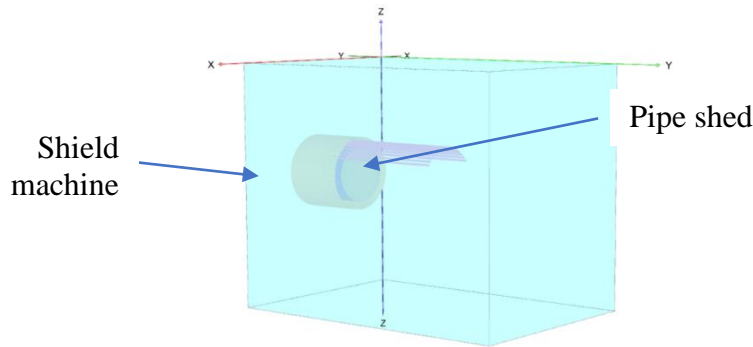
## **Introduction**

Pipe shed pre-support is to carry out pre-reinforcement to the surrounding rock before tunnel excavation, and its mechanism is to set up an arch-shell-like structure along the tunnel cross section in the stratum in front of tunnel excavation, form a pre-support system, reinforce the excavation face and the surrounding rock in front, guarantee that tunnel construction can be carried out in a relatively safe and stable environment. Pipe shed support has played an important role in improving the strength of soil, effectively controlling surface settlement and vault settlement, can ensure tunnel excavation construction safety, also has the characteristics of low cost, convenient construction, long support distance and high benefit, is commonly used advance pre-support method.

Scholars have carried out a lot of research on the mechanism of action and mechanical models of pipe sheds according to the stress characteristics of pipe sheds [1-4]. Wang et al. [5-6] analyzed the control effect of pipe shed parameters on the settlement of tunnel vault by establishing a theoretical calculation model of the pre-support deformation of the pipe shed. Wang et al. [7] established an analysis model of pipe shed under a single cyclic excavation footage based on Pasternak's elastic foundation theory, and analyzed the mechanical response of pipe shed for the main technical parameters such as hoop spacing and pipe diameter. Wu et al. [8] used the two-parameter foundation beam model to analyze the support effects of two kinds of advanced pipe sheds with different pipe diameters according to the stress mechanism of the tunnel advance pipe shed. Chen et al. [9] analyzed the variation law of the spacing of the pipe shed and the position of the pipe shed, as well as the influence of the diameter of the pipe shed and soil parameters on the spacing of the pipe shed. Gou et al. [10] monitored the deformation of the pipe shed, analyzed the stress characteristics of the pipe shed during tunnel excavation according to the results, discussed the action mechanism of the pipe shed, and established the corresponding stress model of the pipe shed. The motivation of this study is to investigate the soil deformation of shield tunnel excavation with large pipe shed under advancing and insufficient support conditions through finite element numerical simulation.

## 1. Finite element model

To investigate the soil deformation with advancing of shield tunnel and insufficient support, a series of FEM model was established for the analysis. The embedment depth is set as  $C/D=1.0$ , considering with pipe support and no pipe support. The shield tunnel moves backwards to simulate insufficient support. The simulation conditions are listed in Table 1. The length of the model is 35m, the width of the model is 24m, and the height of the model is 32.5m. The model is shown in Fig.1.



**Fig.1 The shield tunnel model with pipe shed support**

The shield tunnel has an outside radius of  $D=7\text{m}$ , the interior radius is  $6\text{m}$ . The distance between the arch and the ground surface is  $7\text{m}$  or  $10.5\text{m}$ , that is embedment ratio  $C/D=1.0, 1.5$ . The bottom of the model is all fixed. The top surface of the model is free. The four side surfaces are constrained in  $x$  and  $y$  directions. The shield tunnel model with  $C/D=1.0$  consists of 103455 element and 148234 nodes, while the model  $C/D=1.5$  consists of 93264 element and 134475 nodes.

In this study, the soil adopts the Mohr-Coulomb model as its constitutive model, using solid element to model soil. The interface between the soil and shield machine is modelled with interface element. Pipe roof is modelled with beam element, located within  $0.5\text{ m}$  above the tunnel arch, with a length of  $20\text{m}$ , the hoop spacing of  $0.5\text{m}$ , the diameter of  $0.2\text{m}$  and the thickness of  $8\text{mm}$ . The material types are all elastic, and the elastic modulus is  $2.1 \times 10^8 \text{kN/m}^2$ .

## 2. Soil and shield tunnel parameters

Only sand is considered in the model. Its properties are listed in Table 1.

(a) Table 1 Parameters of Sand Soil

Soil	$\gamma$ ( $\text{kN/m}^3$ )	$E$ (MPa)	$\nu$	$\varphi$
Sand	17.5	40	0.3	25

The mechanical parameters of the shield machine and pipe roof are listed in Table 2. The outside radius the pipe is 0.2m and the interior radius of the pipe is 8 mm. The shield machine has a diameter of 7m, and a thickness of 0.5m.

(b)Tab. 2 Mechanical parameters of shield machine and pipe roof

	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	$E$ (MPa)	$D$ (m)	$d$ (m)
Pipe roof	78.50	$210 \times 10^3$	0.2	0.008
Shield machine	120	$23 \times 10^3$	7	0.5

For the advancing of the shield tunnel machine, total excavation distance is 2m.

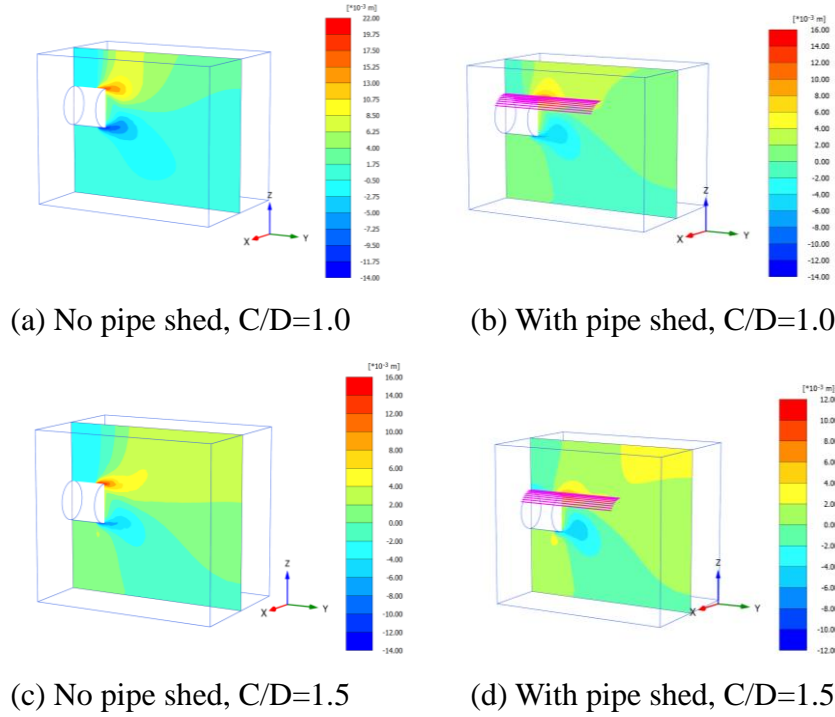
For the withdraw of the shield tunnel machine, the supporting pressure is initially evenly applied along the longitudinal direction of the tunnel on the excavation face, and the supporting pressure is the Rankine active earth pressure  $F_{u0}$  when the in-situ stress is balanced, then gradually reducing the supporting pressure to simulate insufficient support.

### 3. Simulation results and analysis

The simulation is done on the shield tunnel excavation considering advancing insufficient support conditions, considering different pipe shed support and embedment length. The obtained results are presented below.

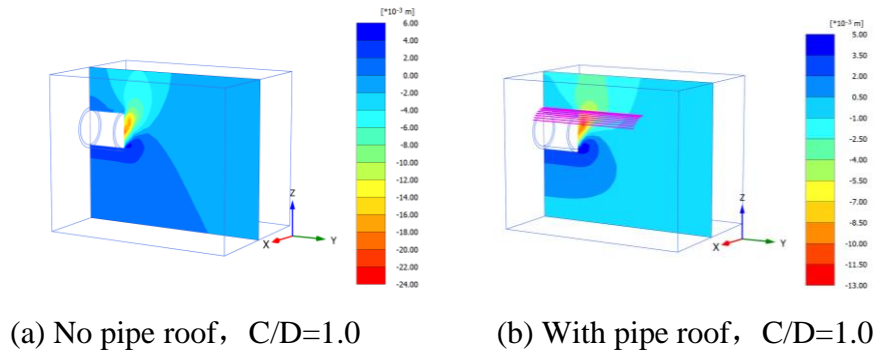
#### *Vertical displacement*

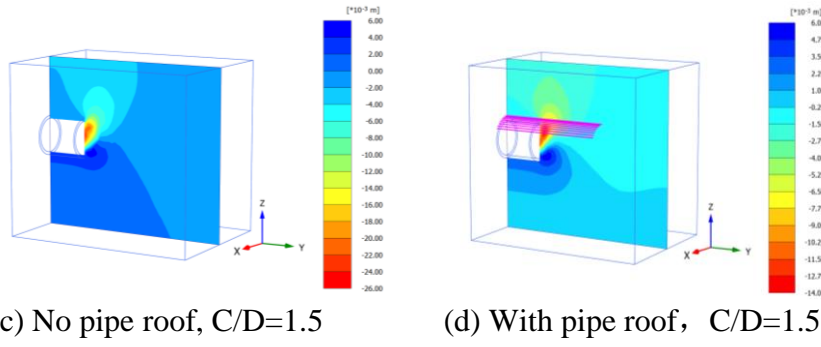
The vertical displacements during tunnel advancing are showed in Fig. 2 along the central axial plane. Comparing the displacement with pipe shed and without pipe shed, it is clear that the maximum vertical displacement is smaller for those with pipe shed. Both the maximum uplift and the maximum settlement occur at the vault and the bottom of the shield tunnel without pipe shed. While with pipe shed support, the maximum uplift also occurs at the vault top, but with a larger area of a high uplift displacement, while a narrower area close to the tunnel surface on top of the vault without pipe shed. That means that the pipe shed resisted the soil uplifting load from shield machine advancing and mobilized more soil mass to take the load. With deep embedment depth, the soil displacement were reduced a bit due to overburden effect.



**Fig.1 Numerical simulation results of axial section vertical displacement during tunnel excavation: (a)  $C/D=1.0$ , no pipe shed, (b)  $C/D=1.0$ , pipe shed, (c)  $C/D=1.5$ , no pipe shed, (d)  $C/D=1.5$ , pipe shed**

For the insufficient support case, the vertical displacements on the central axial plane are shown on Fig. 3. Without pipe shed support, the soil flows towards the tunnel face and the maximum displacement value is 24mm, while with the pipe shed support, the soil settlement greatly reduced to 13mm. The settling of the soil was prevented by the pipe shed and the deformed soil zone is smaller in front the shield tunnel face. The uplift zone and the maximum uplift value is also smaller with pipe shed compared with no pipe shed. Similar observation was for the shield tunnel with  $C/D=1.5$ . A bit higher value of settlement with  $C/D=1.5$  without pipe shed.

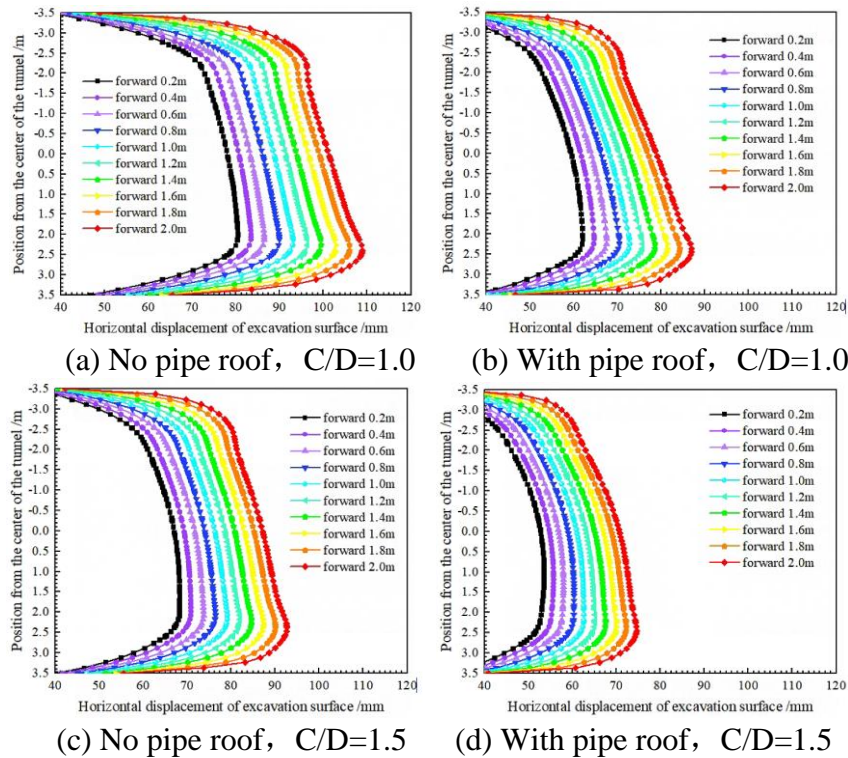




**Fig. 2 Numerical simulation results of axial section vertical displacement during tunnel retreat: (a)  $C/D=1.0$ , no pipe shed, (b)  $C/D=1.0$ , pipe shed, (c)  $C/D=1.5$ , no pipe shed, (d)  $C/D=1.5$ , pipe shed**

### *Horizontal displacement*

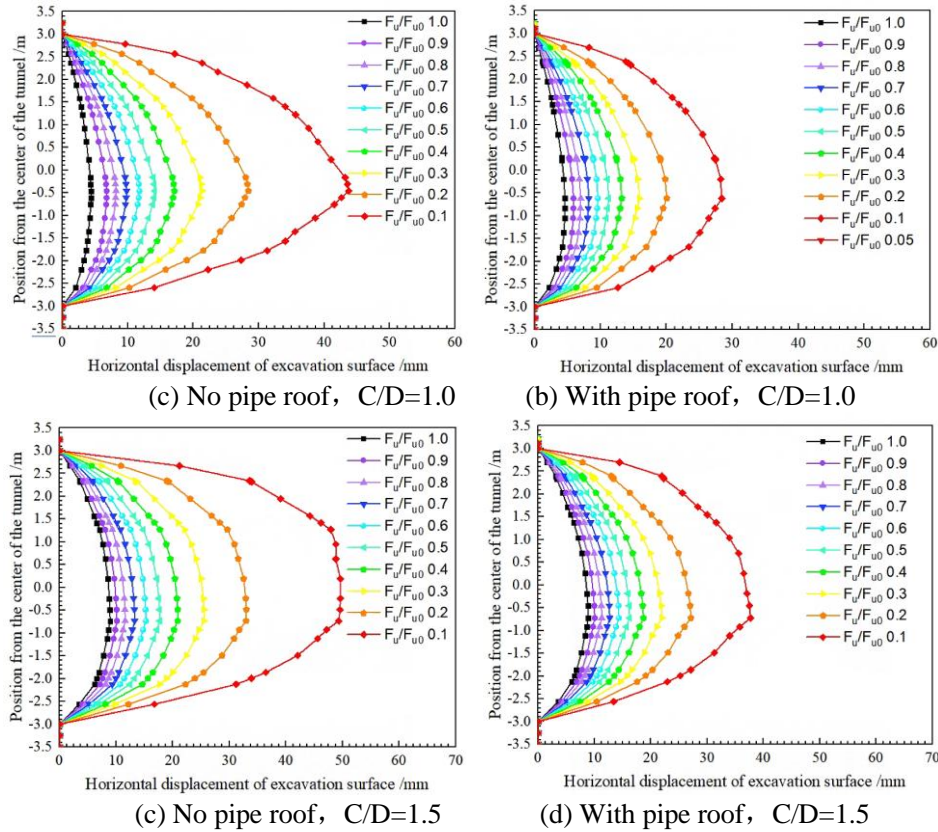
The horizontal displacements of the soil in front of the tunnel face are plotted in Fig. 4. The horizontal displacement is not uniform with larger value directly in front of tunnel face. With more excavation, the horizontal displacement becomes larger with the largest value occurs close to the bottom face of the shield tunnel. Obviously, the horizontal displacement with the pipe shed support is smaller than the one without pipe shed support. The pipe shed support also restricted the soil deformation horizontally. With deep embedment length, the horizontal displacement is reduced, which is more significant for the one with the pipe shed support.



**Fig.3 Numerical simulation results of axial section horizontal displacement during tunnel excavation: no pipe shed,  $C/D=1.0$ , (b) pipe shed,  $C/D=1.0$ , (c) no pipe shed,  $C/D=1.5$ , (d) pipe shed,  $C/D=1.5$**



During shield machine retreat, the horizontal displacement is plotted in Fig. 5. The deformation has a symmetry pattern along the central axis of the tunnel with a parabolic shape. The maximum horizontal displacement happens at the center of the tunnel face. With the pipe shed support, the horizontal displacement is greatly reduced. With deep embedment length, the displacement value is larger correspondingly.

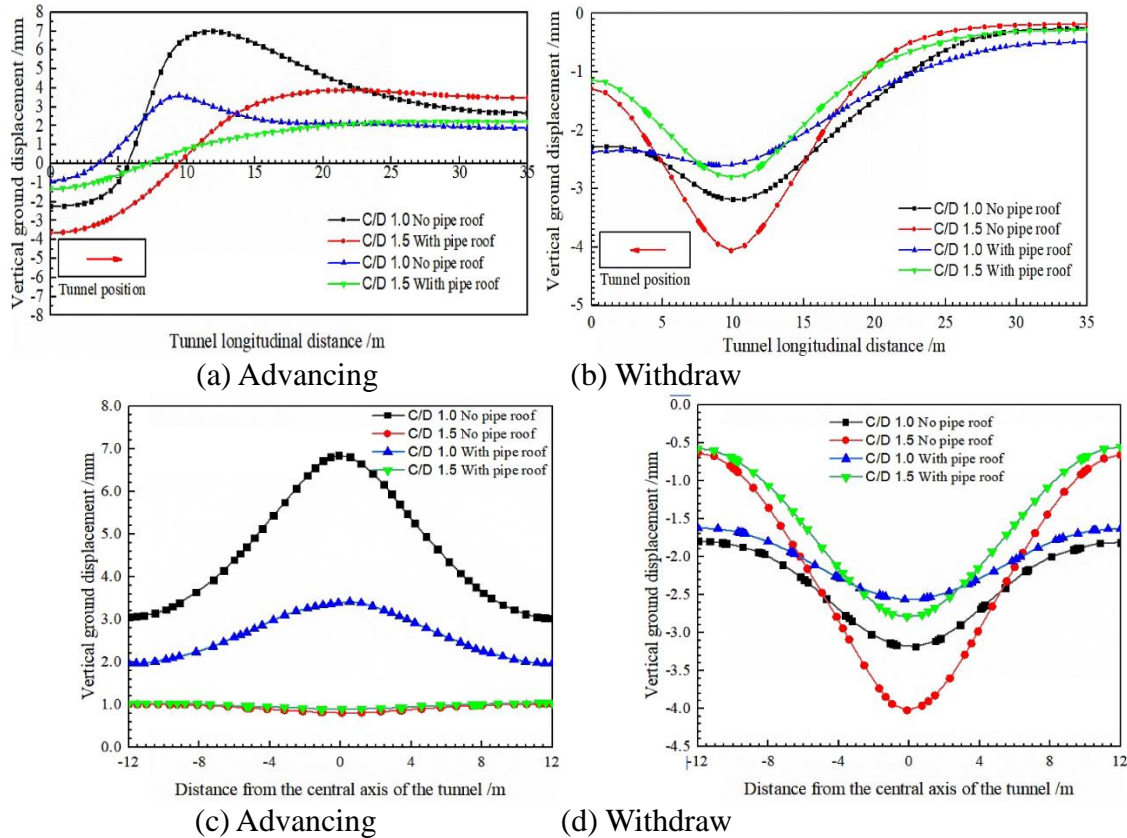


**Fig. 4 Numerical simulation results of axial section horizontal displacement during tunnel retreat: (a) no pipe shed,  $C/D=1.0$ , (b) pipe shed,  $C/D=1.0$ , (c) no pipe shed,  $C/D=1.5$ , (d) pipe shed,  $C/D=1.5$**

### *Ground settlement*

The ground surface settlement at central plane of the tunnel were analyzed to get to know the influences of shield excavation. The simulation results were plotted in Fig. 6. From the figure it can see that in the tunnel shield excavation process, after advancing 0.5m (one liner segment) the ground surface above the tunnel center presents the vertical displacement change of first settling down and then uplifting. The soil mass in front of the excavation is affected by the shield support thrust, resulting in the deformation of upward uplift caused by soil extrusion. While at the excavation section completed, the soil settles because of the remove of the shield support. With pipe shed support, the corresponding settlement and uplift are both less than those without pipe shed support. The

pipe shed supports prevented the uplifting and settlement of the soil in front of and at the back of the shield tunnel. With  $C/D=1.5$ , its settlement at the back of shield tunnel is larger than that with  $C/D=1.0$ , while its up lift is much less than that with  $C/D=1.5$ , which indicates that the deep embedment can inhibit the uplifting of the soil because of overburden.



**Fig.5 Results of longitudinal and lateral surface displacements for the tunnel: (a) Longitudinal surface displacements during tunnel excavation, (b) Longitudinal surface displacement during insufficient support, (c) Lateral surface displacements during tunnel excavation, (d) Lateral surface displacement during insufficient support**

During withdrawn of the shield tunnel, as shown in Fig.6 (b) and (d), settlement ground settlement occurs, the settlement of the ground surface with pipe shed is less than those without pipe shed. Without larger  $C/D$  value, the settlement is also larger, but the pipe shed displays more significant role for the deep embedment case.

As for the lateral surface displacements, during advancing, there is a significant uplift displacement without pipe shed with maximum value above the tunnel center face, but with pipe shed, the uplift value is much smaller and much evenly distributed. Larger  $C/D$  value induces larger value of uplift displacement without pipe shed, while with pipe shed, the two has the similar value. During withdraw, lateral ground settlement occurs with a symmetric



distribution pattern, maximum value at the top ground surface above the tunnel face center like an inverted bell. With the pipe shed, the ground settlement greatly reduced at the center and the edges of the tunnel. With  $C/D=1.5$ , the pipe shed plays more important role in controlling the ground settlement.

### **Conclusions**

By utilizing the finite element numerical simulation method to simulate the shield tunnel excavation considering pipe shed support during advancing and withdrawn, we can find that, the pipe shed plays an important role in preventing the uplift settlement and settlement of the soil. The settlement and uplift values reduced with pipe shed and also becomes more evenly distributed. The pipe shed plays a more significant role with deep embedment length.

### **References**

1. Zhou S. Principles of pipe roof applied to shallow-buried tunnels in soft ground[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(14): 2565-2570.
2. Song Z., Tian X., Zhou G., et al. Theoretical analysis of mechanical behavior of advanced pre-support of pipe-roof in tunnel[J]. China Journal of Highway and Transport, 2020, 33(4): 89-98.
3. Wang H., Jia J., Yu S. Mechanical behavior and parameter optimization of pipe roof reinforcement applied in tunnel[J]. China Journal of Highway and Transport, 2010, 23(4): 78-83.
4. Ding Z., Fu J., Liu X., et al. Study of mechanical model for pipe roof in talus tunnel considering spatial effect[J]. Journal of the China Railway Society, 2018, 40(7): 121-127.
5. Wang D., Yuan J., Wang J., et al. Deformation prediction and parameter sensitivity analysis of pipe roof in shallow soft rock tunnels considering construction process[J]. Modern Tunnelling Technology, 2019, 56(1): 79-86.
6. Wang D., Yuan J., Li J., et al. Deformation prediction of pipe roof in shallow soft portal section of tunnels considering construction feature[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(3): 716-724.
7. Wang W., Lei X., Li D. Prediction method for stress and deformation of pipe roofs and its engineering application [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(2): 352-359.
8. Wu S., Tang H., Luo H., et al. Analysis of field monitoring and mechanism of advanced support of pipe-roof for shallow-buried highway tunnel to underpass highway[J]. Highway Engineering, 2020, 45(3): 117-123.

9. Chen Z., He P., Yan D., et al. A method to calculate rational spacing between pipes in pipe roofs considering soil arching effects. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, 40(5): 1993-2000.
10. Gou D., Yang J., Zhang G. Deformation monitoring and mechanical behaviors of pipe-roof in shallow tunnels [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(6): 1258-1264.

# **POTENTIAL APPLICATIONS OF SBFEM ALGORITHM TO VISCOELASTIC PROBLEMS OF ROCK MECHANICS**

**Yiqian He<sup>1,2</sup>, Siarhei Lapatsin<sup>2,3</sup>**

**1. Dalian University of Technology, Dalian, China**

**2. Joint Institute of Dalian University of Technology and Belarusian State University**

**3. Belarusian State University, Minsk, Belarus**

Due to the time-dependent constitutive relationships, complex boundary conditions, geometry etc., analytical solutions of viscoelastic problems for real engineering systems are usually limited, and it is of much interest to develop efficient numerical approaches. This project is aimed to apply advanced numerical methods to solve complex geotechnical problems such as the problem of long-term strength and stability of underground structures, tunnels and mining excavations. Such problems are no doubt of interest in recent scientific publications [1,2] and references inside. Solving such problems is especially important for geomaterials and rock masses since they are highly heterogeneous and solving viscoelastic problems for heterogeneous materials is a non-trivial task.

The Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM) is a semi-analytical numerical method for solving linear partial differential equations, and particularly useful in situations involving stress singularities, and unbounded domains. It combines the advantages of the finite element and boundary element methods [3].

Previously a new Temporally-Piecewise Adaptive Algorithm Scaled Boundary Finite Element Method (TPAA-SBFEM) to solve viscoelastic problems was presented in [4]. The major merits include:

(1) By virtue of an adaptive piecewise algorithm in time domain, a coupled spatial-temporal viscoelastic problem can be decoupled into a series of recursive spatial problems, which are solved by SBFEM that is semi-analytical, and advantageous in dealing with the problems involving unbounded domains and stress singularity.

(2) A temporally piecewise self-adaptive computation is realized via the change of expansion powers, and the computing accuracy controlled by the error tolerance can be achieved via the adaptive computation for different sizes of time steps.

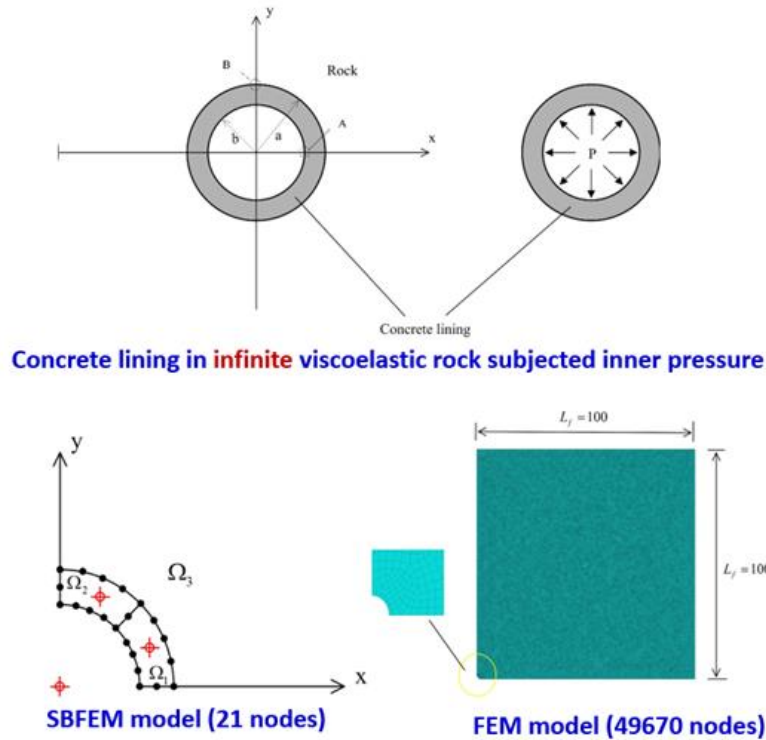
More recently, the TPAA-MsSBFEM was developed to make it more suitable for multiscale viscoelastic analysis [5]. The basic idea of TPAA-MsSBFEM is to reduce the solution scales by recourse of a bridge between

small-scale and large-scale via numerical base functions constructed by SBFEM, and the SBFEM with polygonal and quadtree elements provides the convenience to effectively deal with the heterogeneous material, conduct image-based analysis, and tackle with the stress singularity.

The proposed method can be widely used in geomechanics and rock mechanics to ensure safety and durability of underground structures and stability of rock masses. Namely, it can be used to compute viscoelastic stress-strain state of geotechnical systems. In this report, the following creep model is proposed for such calculations:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{C_3 + 1} C_1 \sigma_{eqv}^{C_2} t^{(C_3+1)} e^{-\frac{C_4}{T}} + C_5 \sigma_{eqv}^{C_6} t e^{-\frac{C_7}{T}} + \varepsilon_0,$$

This creep models allows to evaluate viscoelastic deformation of rock masses considering two creep stages, which makes long-term strength calculation possible. The time period of calculation can include from several month to decades. In addition to this in is proposed to use the complex limit state criterion to evaluate the rock mass stage at any time point [2].



**Fig. 1. Comparison of SBFEM and FEM for a single mining excavation problem**

Combination of the SBFEM with the proposed model allows to solve stability and durability problems for complicated geotechnical system with high accuracy since it allows to consider the unbounded domain of the rock mass (on the

opposite to classic FEM) and consider heterogeneous structure of the rock mass. For example, this method can be used to solve the durability problem of a single supported mining excavation, located in a heterogeneous rock mass as shown in Fig. 1.

### **References**

1. H. Wagner. Deep Mining: A Rock Engineering Challenge. Rock Mechanics and Rock Engineering. Vol. 52, pp. 1417-1446, 2019.
2. Zhuravkov M.A., Lapatsin S.N., Ji S. Complex limit state criterion for rock masses. Acta Mechanica Sinica. 39(1), 722194, 2023.
3. J.P. Wolf, Ch. Song, Finite-Element Modelling of Unbounded Media, John Wiley and Sons, Chichester, 1996
4. Yiqian He, Haitian Yang. Solving viscoelastic problems by combining SBFEM and a temporally piecewise adaptive algorithm. Mechanics of Time-Dependent Materials. 21(3): 481–497, 2017
5. Xiaoteng Wang, Haitian Yang, Yiqian He. A temporally piecewise adaptive multiscale scaled boundary finite element method to solve two-dimensional heterogeneous viscoelastic problems. Engineering Analysis with Boundary Elements. 155, 738-753, 2023.

# ANTI-PLANE SHEAR WAVES IN ULTRATHIN ELASTIC LAYER ATTACHED TO AN ELASTIC HALF-SPACE TAKING INTO ACCOUNT INTERFACE SLIP AND SURFACE EFFECTS

G.I. Mikhasev<sup>1</sup>, V.A. Eremeyev<sup>2</sup>, M.G. Botogova<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Harbin Institute of Technology, Harbin, China

<sup>2</sup>University of Cagliari, Cagliari, Italy

<sup>3</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus

The phenomenon of anti-plane shear surface waves is very useful for nondestructive damage evaluation of thin coatings, for estimation of surface properties, as well as for modelling of acoustic signal propagation in nanowires and nanofilms. It should be noted that anti-plane shear waves running along a free surface of an elastic body can be detected only under accounting for the surface microstructure. From the physical point of view, the surface elasticity models considering this microstructure describe coupled deformations of an elastic solid body with an elastic ultrathin membrane attached to the body surface. As for the mathematical point of view, an appropriate model predicting such waves includes the classic equation of motion and non-classic boundary conditions taking into account shear stresses and inertia on a free surface.

Nowadays, there are the two different models, Steigmann-Ogden and Gurtin-Murdoch [1] ones, which allow describing the wave motion in an elastic media and bodies considering the surface effects. The justification for the existence of such waves for an elastic half-space, based on a comparative analysis of dispersion relations within the framework of the two approaches "the Gurtin-Murdoch surface elasticity vis-a-vis the lattice dynamics" was given in paper [2]. In this paper, as well as in other contributions, studying anti-plane shear waves, solutions for the wave equations were found in the form of functions exponentially decaying from a free surface. Such modes of anti-plane waves were called the transversally exponential (TE) modes or the TE regime [3]. In [3], it was also revealed for the first time that for an elastic layer with although one free surface, in addition to the TE modes, the so-called TH modes of anti-plane waves are possible, which are characterized by a harmonic variation of amplitudes in the thickness direction of the layer. Later, these two modes were also observed in an elastic ultrathin plate perfectly attached to an elastic half-space [4] as well as in a two-layer elastic plate with rigid interface attachment [5].

The objective of this paper is to study the effect of interlayer slip on anti-plane shear waves in an elastic isotropic ultrathin layer (plate) of thickness  $h$ ,

not perfectly attached to an elastic half-space. Let  $Ox_1x_2x_3$  be the orthogonal Cartesian coordinate system with an origin at the interface and the  $Ox_1$  - axis coinciding with the direction of wave propagation, the  $Ox_2$  - axis determining the only non-zero components  $u_1$  and  $u_2$  in the plate and half-space, respectively. The equations of shear motion for the two parts of the continuum take the form of wave equations

$$\mu_j(u_{j,11} + u_{j,22}) = \rho_j \ddot{u}_j, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

where  $\mu_j$  are the shear moduli and  $\rho_j$  are the mass densities for the plate in the bulk and half-space, the subscripts  $j = 1$  and  $j = 2$  stand for the plate and half-space, respectively, the double dot means the second derivative with respect to time, and the subscript  $k$  following the comma denotes the differentiation with respect to the coordinate  $x_k$ .

The boundary condition on the free surface is given by the relation [1]:

$$\mu_1 u_{1,2} = \mu_s u_{1,22} - \rho_s \ddot{u}_1 \quad \text{at} \quad x_2 = h, \quad (2)$$

where  $\mu_s$  and  $\rho_s$  are the surface shear modulus and mass density for the nano-film coating the plate surface, respectively.

At the interface  $x_2 = 0$ , we assume a slip in the  $x_3$  - direction with the bonding stiffness  $k_s$ . Then the boundary conditions at the interface can be expressed by the following two equations:

$$\mu_1 u_{1,2} = \mu_2 u_{2,2}, \quad \mu_1 u_{1,2} = k_s(u_1 - u_2) \quad \text{at} \quad x_2 = 0. \quad (3)$$

Finally, for the half-space, we set the wave attenuation condition at infinity:

$$u_2 \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad x_2 \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

We arrived at the boundary-value problem (1)-(4). As follows from paper [4], it admits only two different solutions describing the propagation of anti-plane shear waves, which correspond to the TE-TE and TH-TE regimes of the amplitude variation in the  $x_2$  - direction. For the TE-TE regime, this solution reads

$$u_1 = e^{i(kx_1 - \omega t)} [a_1 e^{\alpha_1(x_2 - h)} + a_2 e^{-\alpha_1 x_2}], \quad u_2 = b e^{i(kx_1 - \omega t)} e^{\alpha_2 x_2}, \quad (5)$$

while for TH-TE modes, we assume

$$u_1 = e^{i(kx_1 - \omega t)} [a_1 \sin \lambda x_2 + a_2 \cos \lambda x_2] \quad (6)$$

with  $u_2$  found in the form of  $(5)_2$ .

The substitution of the above ansatz into the governing equation (1), with the boundary conditions (2)-(4) taken into account, results in the required

dispersion equations related to TE-TE and TH-TE regimes. For instance, for the TH-TE regime, one obtains

$$\frac{|k|l_d(v^2 - v_s^2)}{\sqrt{v^2 - 1}} = \frac{k_s \alpha \mu_2 \cos \lambda h - \lambda (\alpha \mu_1 \mu_2 + k_s \mu_1) \sin \lambda h}{k_s \alpha \mu_2 \cos \lambda h + \lambda (\alpha \mu_1 \mu_2 + k_s \mu_1) \sin \lambda h}, \quad (7)$$

where

$$\lambda = |k| \sqrt{\frac{c^2}{c_{T1}^2} - 1}, \quad \alpha = |k| \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{T2}^2}}, \quad v = \frac{c}{c_{T1}}, \quad v_s = \frac{c_s}{c_{T1}},$$

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad c_{Tj} = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho_s}}, \quad l_d = \frac{\rho_s}{\rho_1}.$$

Considering both of the possible regimes of anti-plane shear waves, we plotted the dispersion curves, i. e., the dimensionless velocity  $v$  versus the dimensionless wave number  $|k|l_d$ , for various relative characteristics of the layered continuum in the bulk to the surface counterparts under different values of the bonding stiffness  $k_s$ . The main outcomes of our study is the detail analysis of the influence of the interface slip on the dispersion curves for both regimes of anti-plane waves.

The provided analysis may be useful for nondestructive evaluation of materials at small scales and, particularly, for the detection of weak adhesion and delamination of layered materials.

## References

1. Gurtin, M. E. , Murdoch, A. I. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis.- 1975. - V. 57. – P. 291–323 .
2. Eremeyev VA, Sharma BL. Anti-plane surface waves in media with surface structure: Discrete vs. continuum model // International Journal of Engineering Science. - 2019. –V. 143. P. 33–38.
3. Mikhasev, G. I., Botogova, M. G., Eremeyev, V. A. Anti-plane waves in an elastic thin strip with surface energy. Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A. – 2022.-V. 380. – P. 20210373–15.
4. Mikhasev, G.I., Erbas, B., Eremeyev, V. A. Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space // International Journal of Engineering Science. - 2023. – V.184. –P. 103809.
5. Mikhasev, G., Erbaş, B., Jia, F. Anti-plane Waves in an Elastic Two-Layer Plate with Surface Effects // Proceedings of 2023 the 6th International Conference on Mechanical Engineering and Applied Composite Materials. MEACM 2023. Mechanisms and Machine Science (eds.: Yue, X., Yuan, K.). - Singapore: Springer. - 2024. – V. 156.- pp. 33-40.



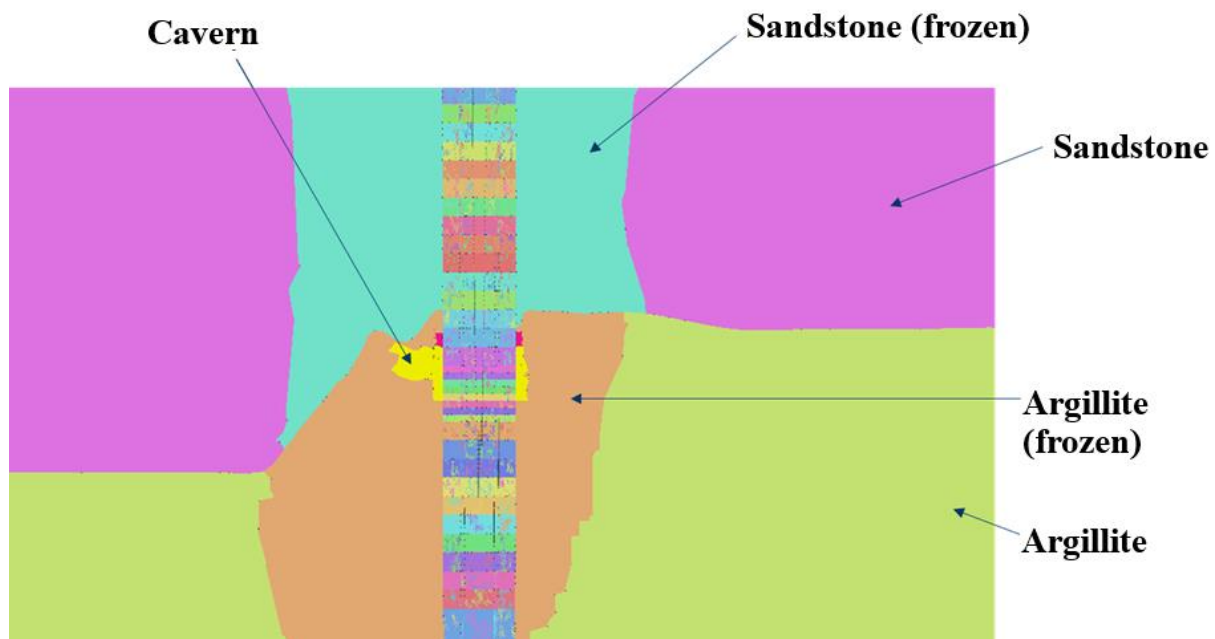
# NUMERICAL MODELING OF NON-UNIFORM LOADING ON SUPPORT STRUCTURES DURING SHAFT SINKING IN COMPLEX GEOTECHNICAL CONDITIONS

J. Kazlouski<sup>1,2</sup>, S.I. Bogdan<sup>2</sup>, M.A. Zhuravkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>ProTech Engineering, Saint Petersburg, Russia

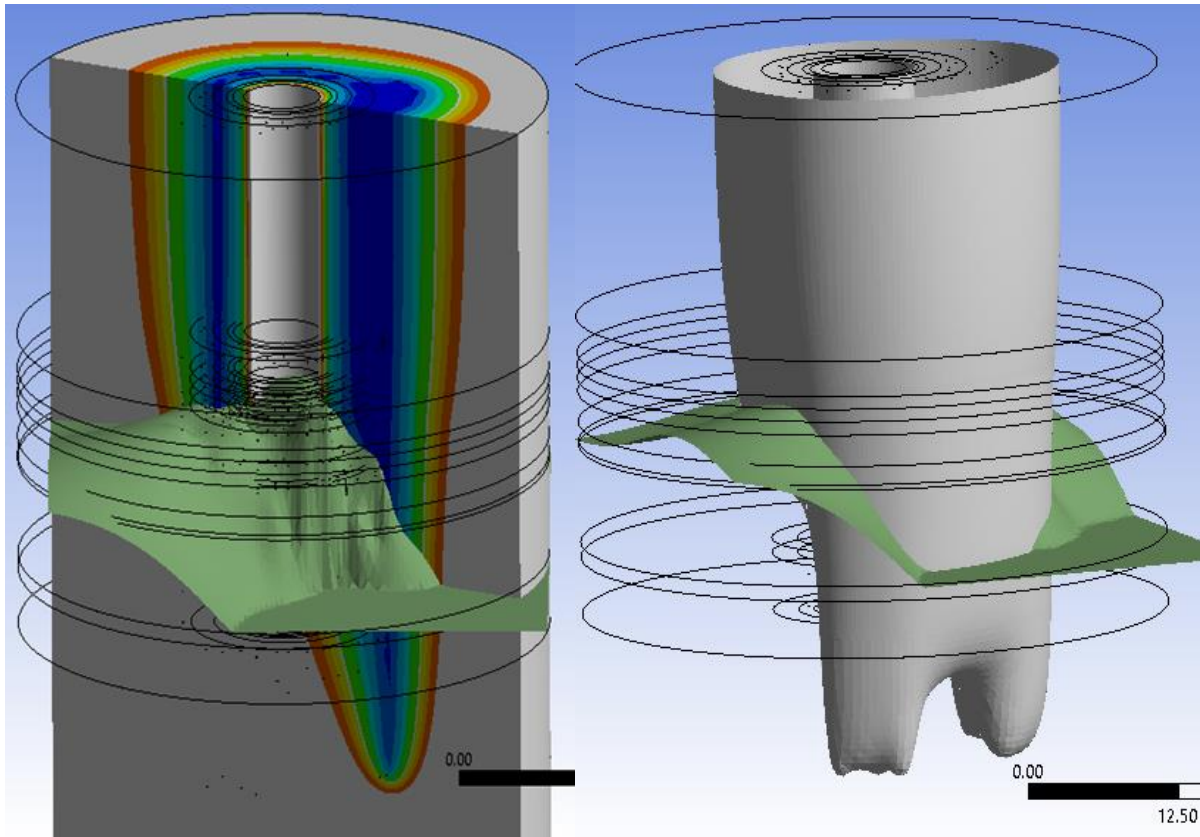
This study presents a comprehensive investigation of the shaft sinking process utilizing the ground freezing method, aimed at mitigating potential geomechanical risks in a challenging geotechnical setting. The research focuses on a site characterized by a complex geological structure, including a local disturbance near water-saturated rock layers within the excavation influence zone of the mine shaft (Fig. 1). The presence of geological complexities, such as folds and cavities, pose significant risks that require a careful approach to both the design and construction phases of the project.



**Fig 1. Schematic layout of the geotechnical situation around the mine shaft**

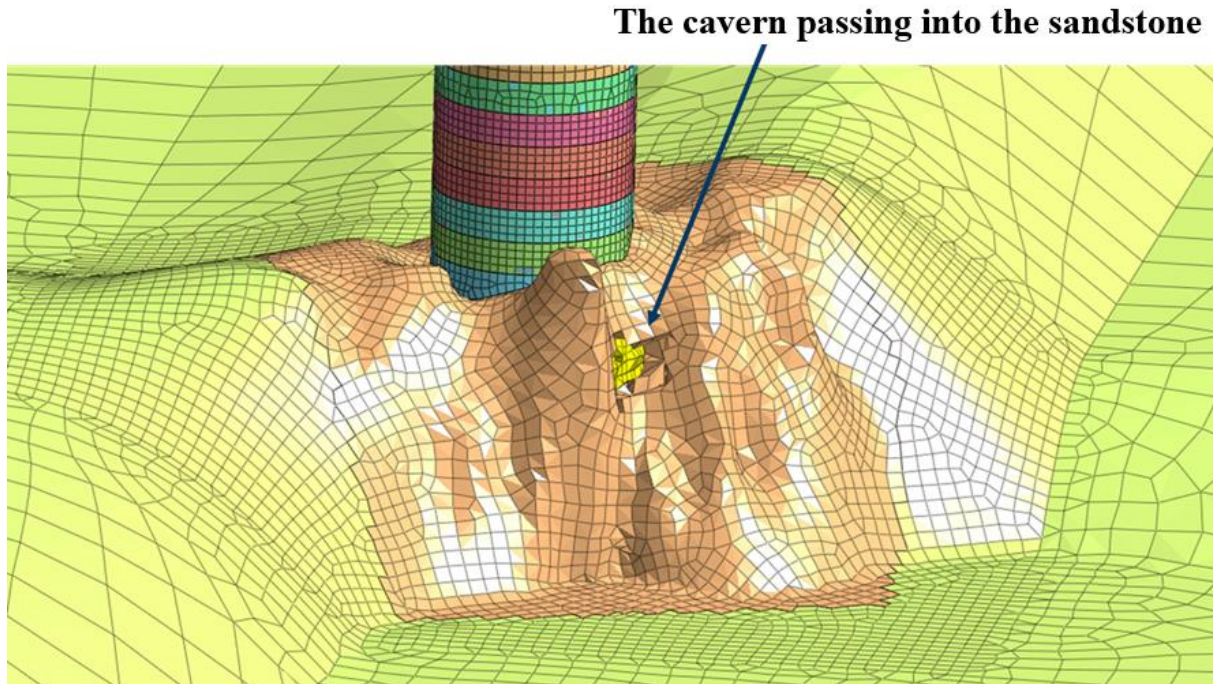
As an initial data, a comprehensive investigation of this geological zone was conducted using a series of exploratory borings and various geophysical methods to provide a detailed understanding of its structural characteristics. Using the collected data, we developed a modified three-dimensional model that formed the foundation for thermophysical forecasts that included detailed consideration of the freezing wells configuration (Fig. 2). These predictions

were extensively refined and calibrated against real-time monitoring data, achieving a high level of accuracy that formed the basis for further studies.



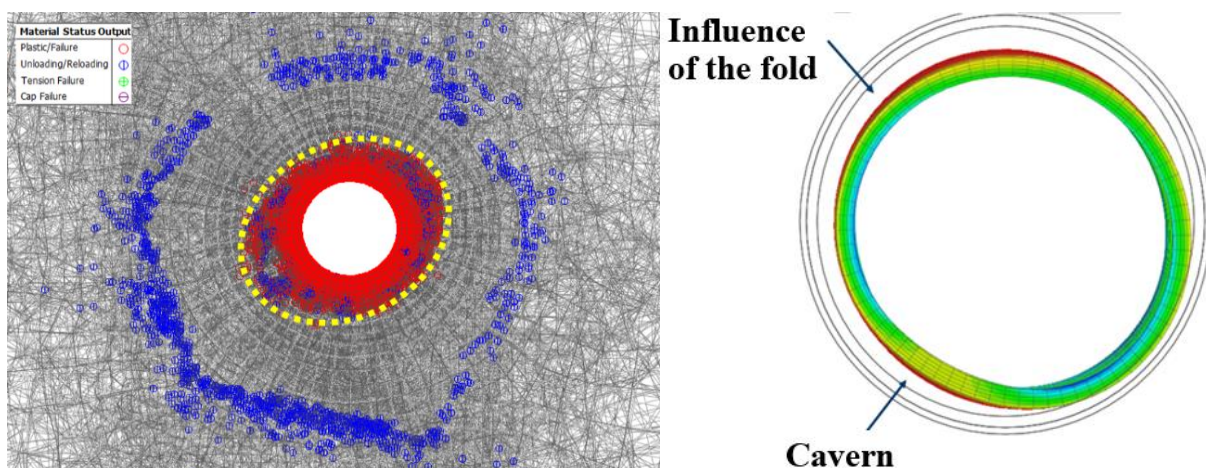
**Fig. 2. Temperature field inside the frozen zone (left) and its boundary surface for one of the stages (right)**

Central to this study is the analysis of the mechanical interaction between the shaft lining and the surrounding geological formations, especially under non-uniform loading conditions. The modelling process focused on the sequence of excavation phases and the time effects on rock stability (Fig. 3). This sensitive approach allowed for an in-depth study of the dynamic processes occurring in the geological environment during the excavation phase.



**Fig 3. Fragment of finite element mesh in the area of a cavern**

As the main practical value, the initial design solutions proposed by third-party organisations were reviewed, focusing on the reliability of the lining, the acceptable deformation limits of the surrounding rocks, and the identification of potential risks and negative scenarios caused by geomechanical processes in this zone. The results revealed specific mechanisms of interaction between the lining and the surrounding rocks (Fig. 4), which allowed the development of focused recommendations aimed at optimising design solutions to improve shaft stability in the face of complex geological challenges.



**Fig 4. Plastic zones in the rock at one of the intermediate stages (left) and deformed mesh of one of the cast-iron support rings (right, displacements scaled)**

In conclusion, the findings from this research highlight the critical need for a comprehensive strategy to address the multidisciplinary challenges associated with shaft sinking in geotechnically challenging environments, and the need to develop advanced input data for such numerical studies. Using a combination of field methods, re-interpretations of results from various operations and advanced thermophysical modelling, a robust underlying dataset for detailed mechanical analysis of lining-rock interaction has been provided. This framework not only improves our understanding of geomechanical processes, but also significantly reduces the risks associated with excavation, contributing to safer and more efficient mining operations.



# **NUMERICAL MODELLING OF LONG-TERM "ROCK-STRUCTURE" INTERACTION OF MINE SHAFT BEYOND DESIGN LIFE SPAN: A CASE STUDY**

**J. Kazlouski<sup>1,2</sup>, S.I. Bogdan<sup>2</sup>, M.A. Zhuravkov<sup>1</sup>**

**<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk, Belarus**

**<sup>2</sup>ProTech Engineering, Saint Petersburg, Russia**

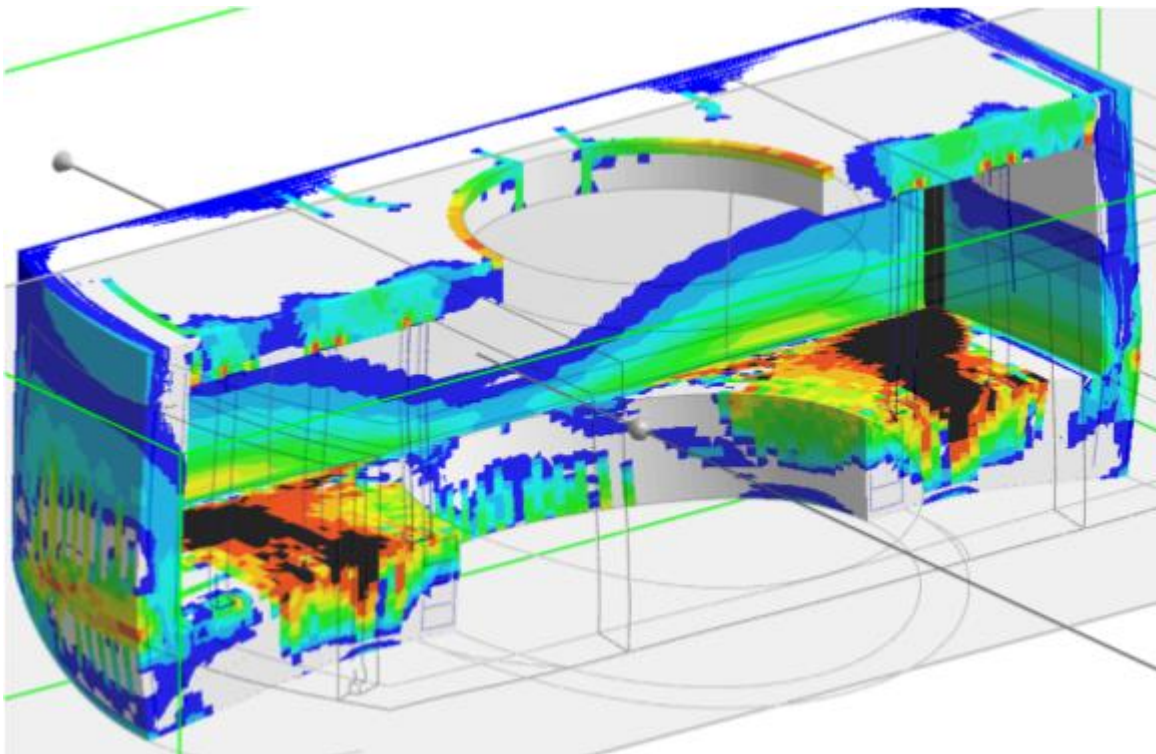
This paper investigates the long-term interaction between mine shaft structures and surrounding geological formations, with a specific focus on recesses within the shaft designed for equipment installation. The analysis is conducted in the context of challenging geological conditions, specifically salt and salt-bearing rock formations such as rock salt, sylvinite, carnallite, anhydrite with rock salt inclusions. The study aims to predict the stress-strain state of these structural elements as they approach and exceed their original design life span. By assessing their serviceability during the anticipated period of structural degradation, the analysis also evaluates the impact of various reconstruction methods on the integrity of adjacent structures in the mine complex.

Initially, a comprehensive modelling prediction of the interaction between the mine structures and the surrounding rock mass was made, taking into account both the design life and the long period of operation thereafter. The modelling approach included the Mohr-Coulomb and Rankine criteria for time-independent plasticity of rock, alongside the Double Power Law for creep behaviour. For the reinforced concrete components, the Concrete Damage Plasticity model was employed to represent the concrete behaviour, while the Von Mises model was used to simulate the steel reinforcement response. Discrete rebar was modelled as embedded one-dimensional elements, while rigid reinforcement structures like I-beams and external columns were represented using shell elements.

As soon as the loading exceeded the design specifications, several defects in the structures were identified during modelling. These included buckling of some components (Fig. 1), severe damage to reinforced concrete (Fig. 2), including cracks of more than 15 mm in critical areas of the equipment foundations.

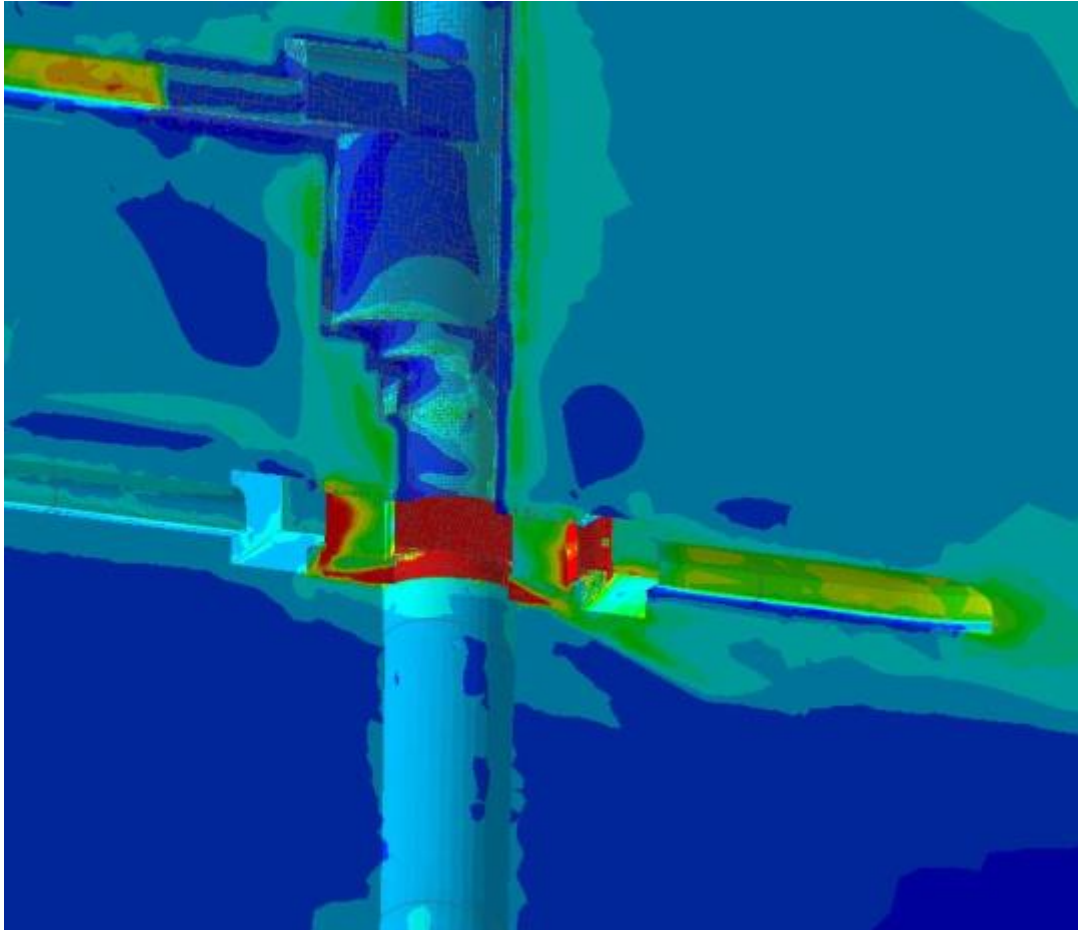


**Fig 1. Buckling of columns in shaft recesses under increased loads**



**Fig 2. Crack development in reinforced concrete structure**

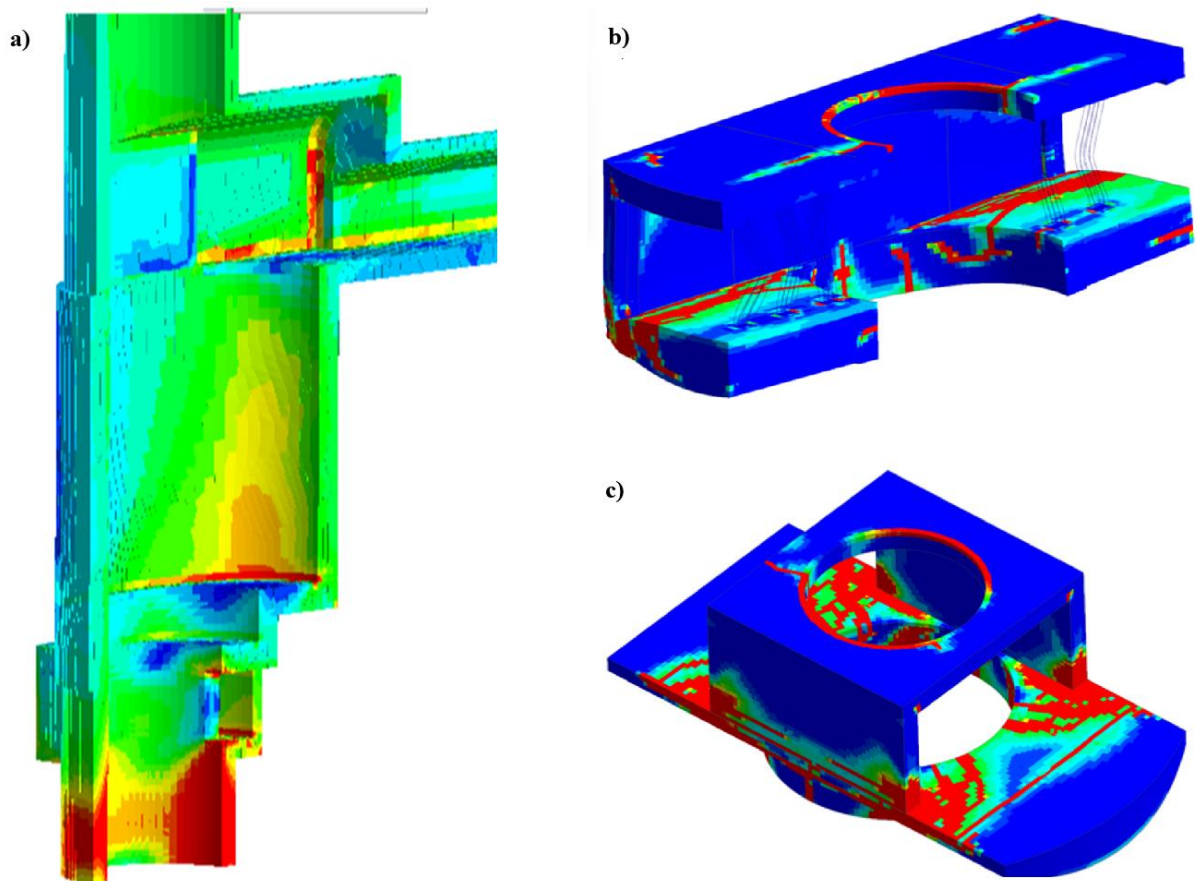
An extensive analysis of shaft reconstruction scenarios was carried out, which included various methods of partial demolition of the damaged structures and/or modification of the design schemes with additional reinforcement of the remaining parts, as well as excavation of the access workings (Fig. 3). These scenarios were aimed to address both immediate safety concerns and the long-term stability of the mine infrastructure.



**Fig. 3. Prediction of geomechanical processes and the influence of the reconstruction works on the shaft junction**

A detailed processing of the numerical modelling results was carried out to identify potential failure modes and assess the potential for instability under different conditions and their scenarios. The study analysed multiple failure mechanisms, taking into account factors such as progressive deformation, creep effects and long-term degradation of material properties. Particular attention was paid to the impact of these failure scenarios on the overall stability of the mine and the relationship with the upper level structures (Fig. 4).

Based on the analysis, recommendations have been formulated to identify the unacceptable repair strategies and operational solutions. A special emphasis should be placed on measures to change the monitoring scheme and frequency, which will not only prevent unacceptable deformation scenarios, but also optimise the implementation of proactive maintenance measures to extend the life of the mine shaft.



**Fig 4. Typical patterns of additional deformation fields (a), predicted limit state scenarios of modified design schemes of shaft recesses (b, c)**

The results of this study show experience in the successful application of advanced numerical modelling techniques to predict the long-term behaviour of rock-structure interaction. Furthermore, the proposed approach provides a framework for evaluating the effectiveness of different repair strategies to mitigate the risks associated with structural degradation beyond the design life of the mining infrastructure.

This study highlights the critical role of predictive modelling in the decision-making process, contributing to a more reliable assessment of structural integrity and the development of cost-effective solutions for extending the service life of mine shafts and associated underground structures.



# MACHINE LEARNING METHODS FOR PROBABILISTIC ASSESSMENT OF SOLID DAMAGE INDICATORS

**D. Marmysh**

**Belarusian State University, Minsk, Belarus**

**Joint Institute of Dalian University of Technology and Belarusian State University**

In the exploring of multicomponent systems in which a complex stress-strain state arises due to the interaction of various loading conditions, the concept of a body with a dangerous volume is a convenient and effective mathematical tool for the researcher. Damage analysis of a multicomponent system allows optimization of loading conditions.

Damage analysis is based on knowledge about the distribution of stress and strain fields in a solid  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z)$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, y, z)$  where  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $x, y, z \in \Omega$ . Further, based on the quantitative assessment of the stress-strain state, it is possible to carry out a quantitative analysis of damage according to the formulas [1]

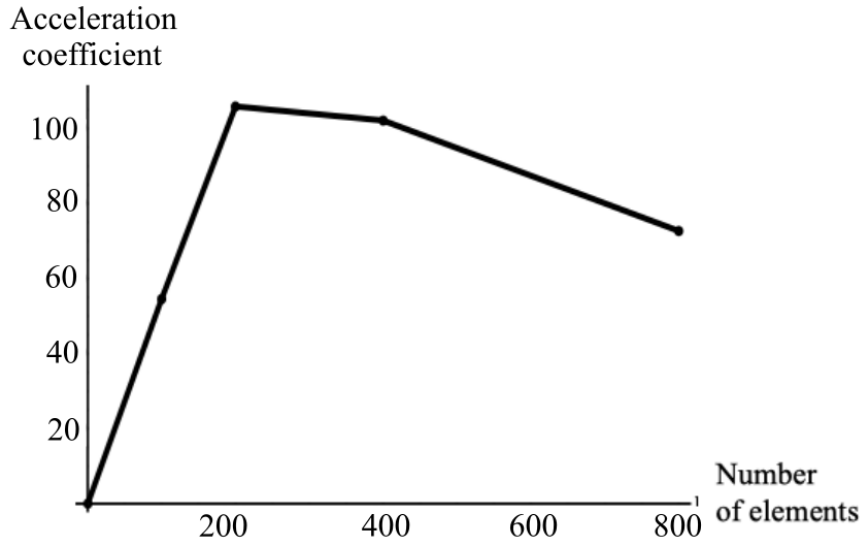
$$V = \int_{\Omega} dV, \Gamma \Delta \varepsilon \quad dV = \begin{cases} dx dy dz, & \sigma_{ij}(x, y, z) \geq \sigma_{\lim}, \\ 0, & \sigma_{ij}(x, y, z) < \sigma_{\lim}, \end{cases}$$

$$\Psi = \int_{\Omega} \varphi dV, \text{ where } \varphi = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\lim}}.$$

In the mathematical model of damage to a continuous medium, the limiting stress  $\sigma_{\lim}$  can be chosen or calculated based on the selected strength theory.

The representation of a solid continua in the form of a discrete model allows you to apply various approaches and apply High-performance computing (HPC) methods, e.g. parallel computing methods. HPC approaches can also be implemented algorithmically using special CUDA technology, which allows to speed up computing processes many times and reduce computer cost. For example, figure 1 shows the acceleration coefficient in potential distribution calculation for the half-space. This problem arises when discretizing a continuous distribution and approximating potential distribution by boundary elements. Figure 1 shows that with the use of CUDA technology, the computing speed can be increased by more than 100 times.

Parallelization of calculations can be applied due to the fact that when sampling a continuum model, quantitative indicators of damage to a single discrete element can be calculated independently of others. This simple fact allows you to use multithreading when performing computational procedures.



**Fig. 1. Acceleration coefficient in potential distribution calculation for the half-space**

The above formulas for damage indicators are an analytical model that allows you to accurately determine the quantitative characteristics and configuration of the damaged area. However, in real engineering applications, damage can be calculated with a certain degree of probability, so statistical methods and machine learning methods can be used to quantify it.

Monte Carlo methods are effectively used to calculate spatial integrals in complex geometry. Monte Carlo methods ensure the accuracy of the order  $C/\sqrt{N}$ , where  $N$  is the number of calculated nodes and, according to the law of large numbers, the numerical values of the damage integrals obtained by the Monte Carlo method converge to the exact value with an increase in the number of  $N$  [2].

Numerical approaches to assessing the damage to the medium are based on a preliminary calculation of the stress state in the selected node. If the operating voltage exceeds the limit, then the cumulative value of the dangerous volume increases by the value of the volume of the discrete cell according to simple summation formulas

$$V = K \cdot dV, \quad \Psi = dV \cdot \sum_{i=1}^K \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\lim}},$$

where  $K$  is the number of points at which the stress at point  $\sigma_{ij}$  exceed the limit  $\sigma_{\lim}$  ( $K < N$ ).

From a geometric point of view, the function  $\sigma_{\lim} = f_{\lim}(\mathbf{x})$  sets some surface bounding the area  $D \subset \mathbf{R}^m$ . From a physical point of view, the area of  $\Omega$  should be limited. Thus, when calculating the dangerous volume and integral

damage, it is initially necessary to determine whether the point in question belongs to the area of  $\Omega$  or not, i.e. to conduct a binary classification with one of two possible answers

$$\delta(A) = \begin{cases} 0, & A \notin \Omega, \\ 1, & A \in \Omega. \end{cases}$$

The problem of binary classification can be solved by various methods. One of the most effective methods of machine learning is the method based on logistic regression. The logistic regression model allows you to calculate the probability  $P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$  from 0 to 1 belonging to the damaged area. Probability  $P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$  is a continuous function, therefore, 0.5 is usually chosen as the threshold value, i.e.  $A \in \Omega$  if  $P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0.5$  [3, 4].

An approach based on the calculation of probability using the logit-model was applied to the calculation of the damage of an elastic half-plane under the action of two types of forces distributed over the surface  $q(x) = q_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}$  (model of a non-conformal contact case) and  $q(x) = q_0 / \sqrt{1 - x^2/a^2}$  (model for rigid stamp interaction). In both cases, the logit-model looks like

$$P(x_i, y_i, \boldsymbol{\alpha}) = [1 + \exp(-\alpha_0 - \alpha_1 x_i - \alpha_2 y_i)]^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

The quality of the logit model can be assessed based on ROC analysis [5]. In this case, a ROC curve is constructed in the axes of specificity ( $S_p$ ) and sensitivity ( $S_e$ ), which determine how the proportion of truly positive and truly negative cases identified by the model, respectively.

$$S_p = \frac{TN}{TN + FP}, \quad S_e = \frac{TP}{TP + FN},$$

where  $TN$  is the number of correctly classified negative responses;

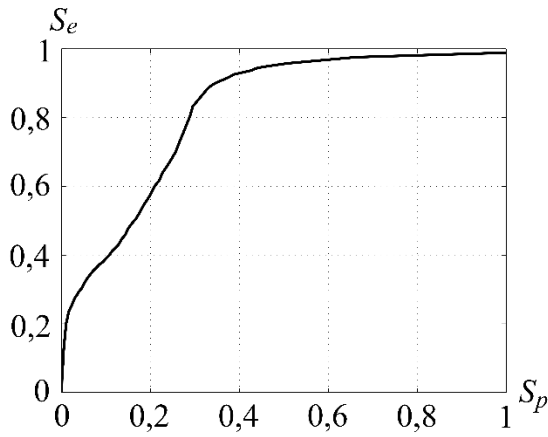
$TP$  is the number of correctly classified positive responses;

$FP$  is the number of negative responses classified as positive;

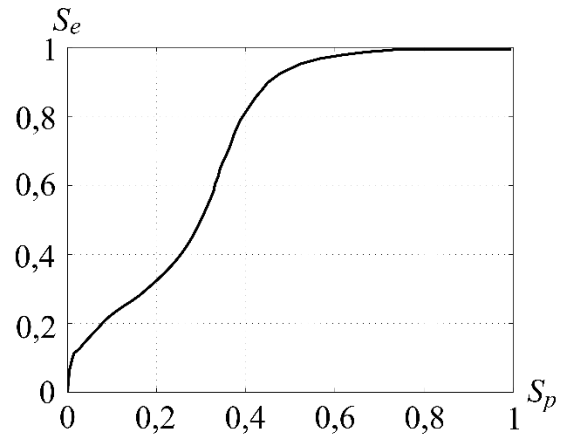
$FN$  is the number of negative responses classified as negative.

Figures 2 and 3 show the ROC curves for both cases of the normal pressure distribution along the boundary of the half-plane.

To quantify the quality of the classifier, the size of the AUC area located between the ROC curve and the  $S_p$  specificity axis is determined.

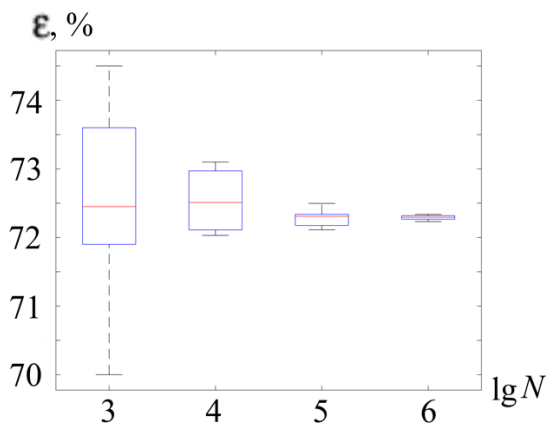


**Figure 2 – ROC-curve of damageability for non-conformal contact case**

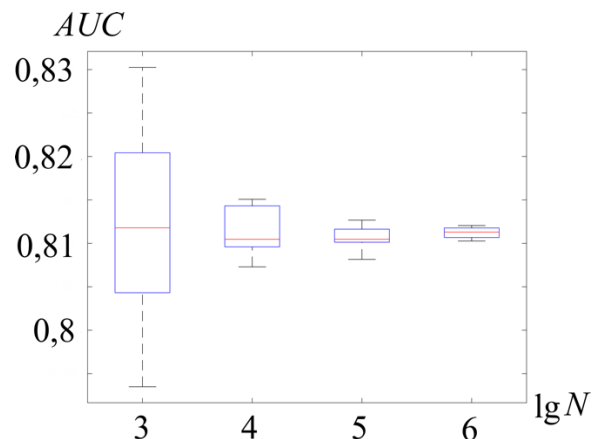


**Figure 3 – ROC-curve of damageability for rigid stamp interaction cases**

A set of training precedents for building a logistic regression model for assessing the damage to the environment was randomly generated from a uniform distribution over a two-dimensional area containing a dangerous volume. For a random sample of use cases, it is important to understand the stability of numerical algorithms in estimating the parameters of the logit-model and, accordingly, in terms of classification quality. Figures 4 and 5 show box diagrams for the accuracy of classification and the area under the ROC curve with a different number of training precedents, from which it is possible to determine the degree of dispersion and asymmetry in the assessment of these indicators.



**Fig. 4. Box plot for the binary classification accuracy**



**Fig. 5. Box plot for the area under ROC-curve AUC**

It can be seen from diagrams 4 and 5 that with an increase in the number of use cases for training the model, the spread in the assessment of classification accuracy ( $\epsilon$ ) and in the quality of the regression model ( $AUC$ ) is decreasing. For classification accuracy with a training sample size of 103, the difference

between the first and third quartile is 1.7%, for a sample size of 106 – 0.05%. For the AUC indicator, similar indicators are 0.017 and 0.0011, respectively. The decrease in the spread of indicators allows us to get the conclusion about the stability of numerical algorithms for estimating the parameters of the logistic regression model and the quality of binary classifiers.

### **References**

1. Sosnovskiy, L. A. Tribo-Fatigue. Wear-Fatigue Damage and its Prediction / L. A. Sosnovskiy // Series: Foundations of Engineering Mechanics, Springer, 2005. — 424 p.
2. Fishman G. S. Monte Carlo Concept, Algorithms and applications. Springer, 1996. 698 p
3. Hosmer, D. W. Applied logistic regression / D.W. Hosmer, S. Lemeshow. – 2nd edition. – Wiley: NY, 2000. – 375 p.
4. Niu, L. A review of the application of logistic regression in educational research: common issues, implications, and suggestions / L. Niu // Educational review. – 2020. – Vol. 72, iss. 1. – Pp. 41–67.
5. Zweig, M.H. ROC plots: a fundamental evaluation tool in clinical medicine / M.H. Zweig, G. Campbell // Clinical chemistry. – 1993. – Vol. 39, iss. 4. – Pp. 561–577.

# **APPLICATION OF CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK IN PREDICTING FORCED DISPLACEMENTS IN MONOLITHIC SELF-STRESSED SLABS ON THE BASE**

**A.E. Zheltkovich<sup>1,2</sup>, A.I. Verameichyk<sup>1</sup>, K.G. Parchotz<sup>1</sup>, Guo Xiaoxia<sup>3</sup>, Ren Yuhang<sup>3</sup>, Huang Zien<sup>4</sup>, Peiwen Shi<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>**Brest State Technical University, Brest, Belarus**

<sup>2</sup>**Joint Institute of Dalian University of Technology and Belarusian State University**

<sup>3</sup>**State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, China**

<sup>4</sup>**Belarussian National Technical University, Minsk, Belarus**

## **Problem statement**

The first step of CNN is to intelligently search for solutions to offset in the test slabs (the slab that tests the predictive ability of the neural network). However, there is no information about the displacements of the central hole area in the slab when training the neural network.

To this end, the solution obtained using the closed form of the strip slabs [1] was used to determine the displacement of the slab length on the characteristic points, and different geometric forms of the plate were formed in the next stage.

## **Basic assumptions**

In some cases, even during the design phase, the slab structure may have holes of different shapes on the outline (Fig. 1). For example, when installing floor slabs in production building workshops, nuclear power plant machinery workshops, other facilities, and existing facilities, the behavior of the slabs in the envelop hole area must be considered in advance.

Solving these problems by determining the state of displacement and stress-strain condition (SSC) is either very difficult or impossible.



**Figure 1. Design of slabs with different shapes [2, 3]**

## **Application of Convolutional Neural Networks in base slab design**

The advantage of neural network models is to detect nonlinear relationships between inputs and outputs without assuming any functional dependencies between them [4].

CNN combine three methods of image processing. This is to use a local receptor field for each neuron in the convolutional layer, forming a convolutional layer as a set of cards, where neurons have the same synaptic connections and there is a subsampling layer map, thereby improving the network's resistance to distortion [5, 6, 7, 8].

### ***1.Preparing training samples***

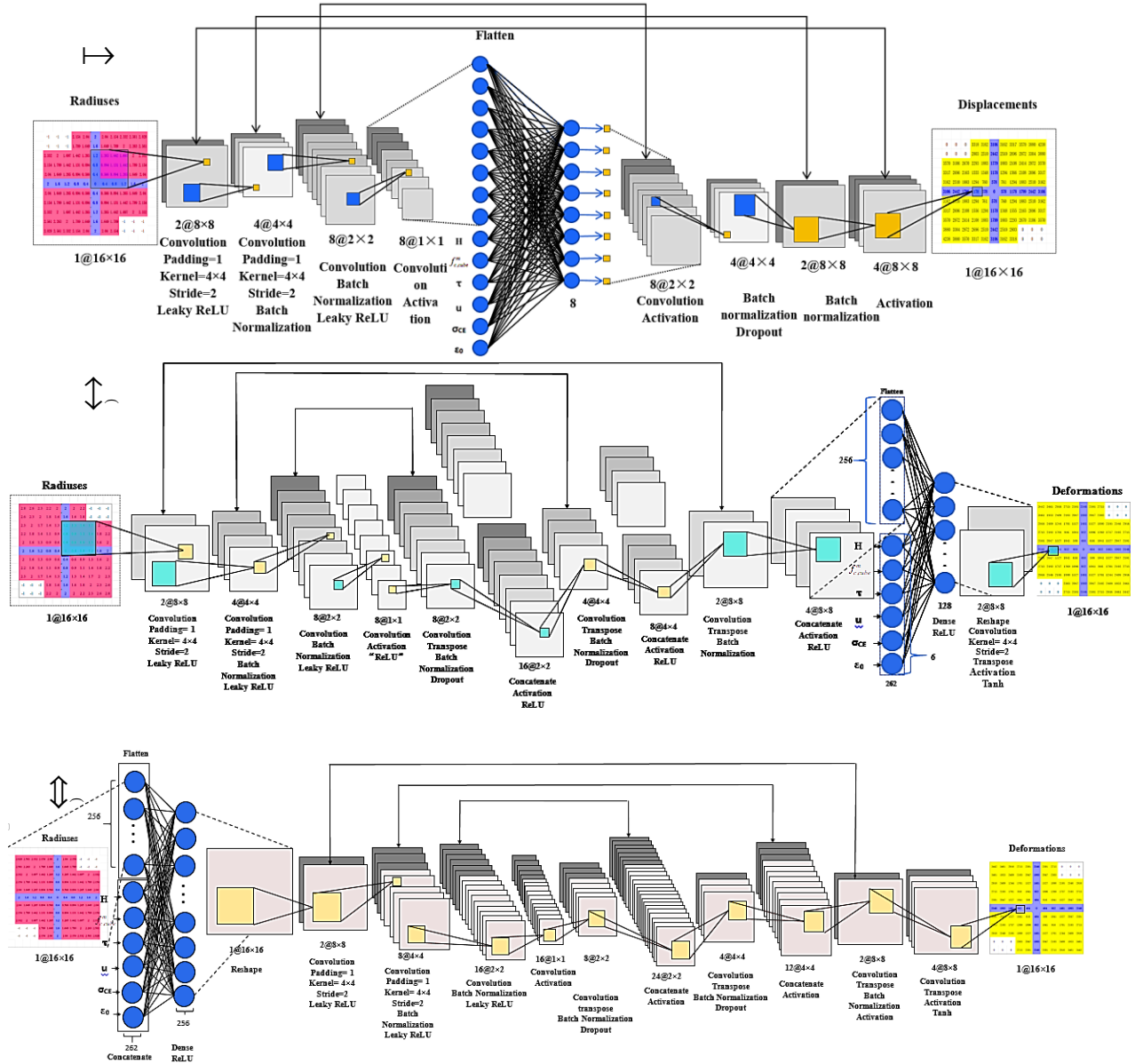
Two types of data were used: one was to "break" the grid node topology of the slab, and the other was the shape parameters of the perforated slab; The second type includes the geometric characteristics of the entire slab, the physical and mechanical properties of self-stressed concrete, and the characteristics of the contact layer in the slab-base system.

In order to obtain the parameters, the slab on base is marked on points (nodes) 11x11. Each node in the grid is defined with a distance value from the center of the slab and corresponding displacement. The displacement of grid nodes is used as the target output values of convolutional network. The data is recorded in matrix form. The data is stored in a separate directory with [.csv] files (each of the 14 directories contains 21 subdirectories containing coordinates and displacement files).

### ***2.Concatenation of CNN with a fully-connected neural network***

Technically speaking, this task is similar to image conversion. Therefore, we used the PIX to PIX architecture [9]. The PIX to PIX architecture consists of two units: an encoder and a decoder, with connections between them.

In this study each example has additional feature vectors. These characteristics are the connections between the displacement of each point in the strip plate with self-stressing concrete physical and mechanical properties established during physical experiments:  $H$ ,  $f_{c,cube}^m$ ,  $\tau_{1,R(t)}$ ,  $u_{1,R(t)}$ ,  $\sigma_{CE}$ ,  $\varepsilon_0$  (Fig. 3). Among them:  $H$  – slab height, [m];  $f_{c,cube}^m$  – average guaranteed compressive strength of normal weight concrete, [MPa];  $\tau_{1,R(t)}$  – shear stress (peak point in the graph, [MPa]) determined by method;  $u_{1,R(t)}$  – slab offset corresponding to the maximum tangential stress in contact with the slab and base, [m];  $\sigma_{CE}$  – self-stressing in concrete [MPa];  $\varepsilon_0$  – free expansion relative deformation of concrete determined by the method.



**Figure 3. Neural network with PIX to PIX architecture: a) Model I – Connection before decoder, b) Model II – Connection after decoder, c) Model III – Connection before encoder**

Due to the particularity of PIX to PIX, the two-dimensional CNN data (describing the geometric structure of the slab grid nodes) was increased to 16x16 (estimated 256 features) before submission for training. In this study, it was decided to encode holes using "0". Among all models, 1000 learning epochs were specified, 70% of the raw data (randomly) was selected as the baseline data for the training set, and 30% of the data was retained for model quality checks.

### 3. Mechanism of operation of ANN and filter



Each filter neuron is considered as an operator that changes the input data [9, 10]. The ANN input receives the values of the grid nodes, and the signal at the neuron output is determined as follows:

$$y_i = f_{act}(\sum x_i \cdot w_i + b), \quad (2)$$

Where  $x$  and  $y$  are the input and output signals of the neural network,  $w$  is the weight parameter of the synapse,  $b$  is the displacement, the neuron activation functions – LeakyReLu for the encoder and ReLu for the decoder, the activation of the last layer was carried out using the function Tanh.

#### **4.Normalization**

All data fed to the input and output of the convolutional neural network was normalized using batch normalization. The essence of this method is that some layers of the neural network receive data that is pre-processed and has zero mathematical expectation and unit variance [11].

#### **5.ANN performance quality criteria**

The loss function was defined as:

$$E = \frac{1}{n} \sum |Y_{target} - Y_{predicted}|, \quad (3)$$

where  $n$  is the number of examples,  $Y_{target}$  – the actual initial data,  $Y_{predicted}$  – the predicted values of the predicted parameter.

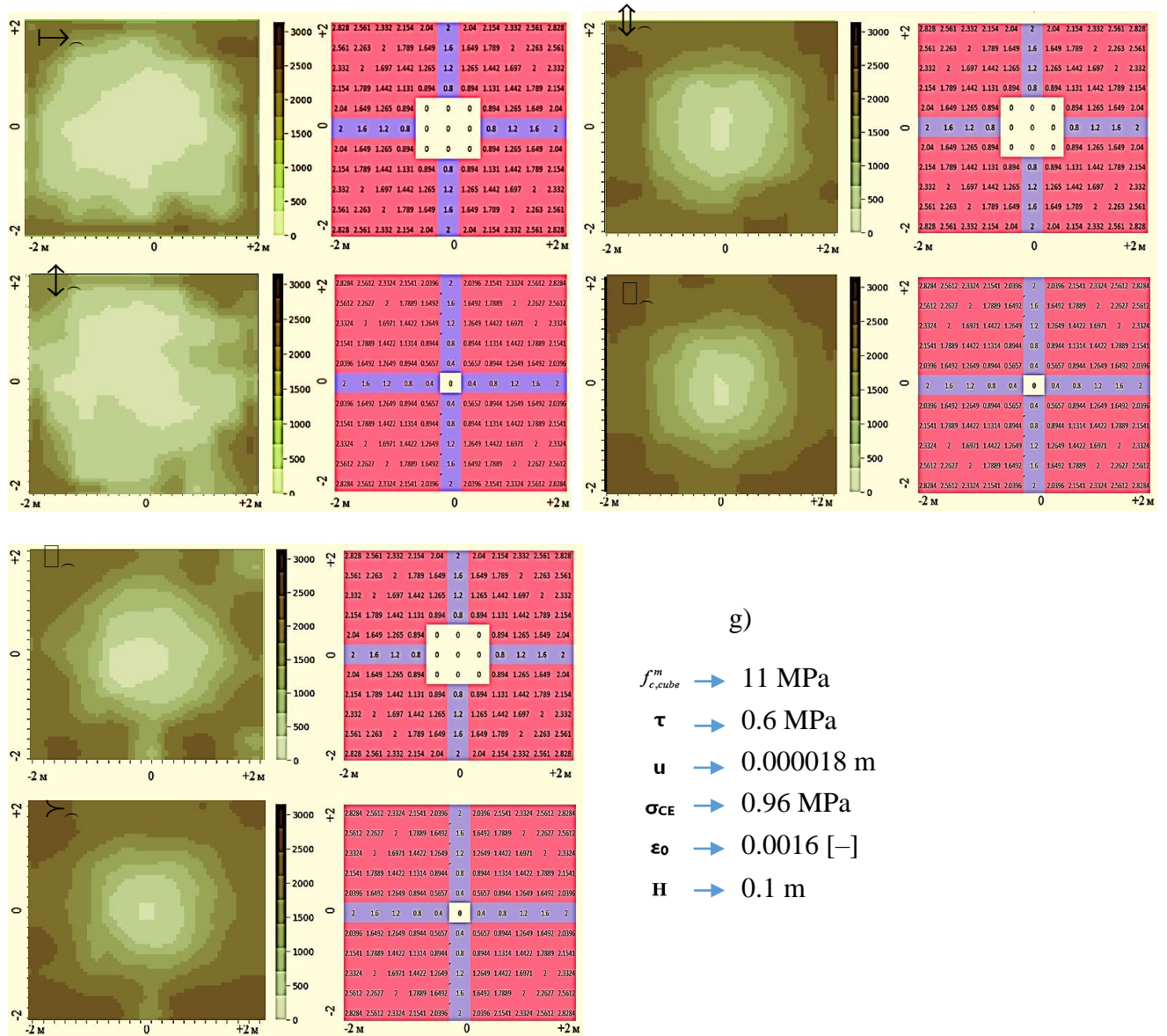
#### **6.Parametric optimization, gradient descent algorithm**

The stochastic optimization method "Adam" was used as an optimizer. Adam [12] is a first-order gradient algorithm for stochastic objective functions based on adaptive lower-order moment estimators [13].

The goal of parametric optimization is to find the minimum value of the loss function  $E$ . At each iteration, the algorithm updates the weight parameters. Thus, using the gradient information, the optimal path to achieve the global minimum on the loss hypersurface is determined.

#### **7.Results of displacements in slabs with central holes**

Physical-mechanical, geometric parameters of the slabs are depicted in fig 6a-g.



**Figure 6 – Displacements in slabs with central holes:**

- a) model I, central hole 0.8x0.8 m, b) hole 0.4x0.4 m; c) model II, central hole 0.8x0.8 m; d) hole 0.4x0.4 m; e) model III, central hole 0.8x0.8 m, f) hole 0.4x0.4 m; g) physical-mechanical, geometric parameters of slabs

## Conclusions

Three models are created to test the quality of prediction of slab displacements. The relative error for a full-body slab using model I was 47,87 %, the absolute error – 143,16 %; for model II – 5,2 % and 14,94 % respectively; for model III – 8,9 % and 17,8 % respectively.

We assume that model I has the worst predictive ability because of the way of concatenation after the encoder. In models II, and III concatenations were performed after the decoder, and before the encoder respectively and the predictive ability is significantly better. This is primarily due to the peculiarity

of connecting the two neural networks into a system. Such encoding seems to facilitate the training of the convolutional network, which is evident from the comparison of loss diagrams in models II and III. At the same time, model III appears to be the most adequate compared to the predictions of model II (despite the fact that model II has a smaller relative error in predicting displacements in the full-body slab), as it better predicts displacements near the larger center hole.

The developed neural network, trained on 189 samples, quite confidently predicts displacements in slabs with a central hole, using data from only peripheral cuts. If increase the training sample, the relative and absolute errors and losses can be reduced.

### **Funding**

The authors acknowledge the financial support from the International Cooperation Fund Project of DBII (NOS. ICR2305).

### **References**

1. Zheltkovich, A.E. Raschyot vynyuzhdennykh peremeshenij i napryazhenij ot usadki v monolitnykh betonnykh plitah, vzaimodejstvuyushih s osnovaniem / A. E. Zheltkovich, V. V. Tur // Stroitel'naya nauka i tekhnika. – 2011. – № 2 (35): – P. 120–125.
2. Design of slabs with different shapes. [Electronic resource]. – Access mode: [https://www.remontnik.ru/media/PortfolioImage/147/None\\_\\_20cbe666f8b9370b783a5f3887701bbc.jpg](https://www.remontnik.ru/media/PortfolioImage/147/None__20cbe666f8b9370b783a5f3887701bbc.jpg), – Date of access: 15.11.2022.
3. Design of slabs with different shapes. [Electronic resource]. – Access mode: [https://img.abc.lv/infopage/photos/b/6/driller-sia\\_b6jxy\\_041\\_2000x1500.jpg](https://img.abc.lv/infopage/photos/b/6/driller-sia_b6jxy_041_2000x1500.jpg) – Date of access: 15.11.2022.
4. S. Selcuk a, P. Tang. A metaheuristic-guided machine learning approach for concrete strength prediction with high mix design variability using ultrasonic pulse velocity data – Developments in the Built Environment, Volume 15, October 2023, 100220, P. 1-14.
5. Nejrosetevye tekhnologii obrabotki dannyh: ucheb. posobie / V. A. Golovko, V. V. Krasnoproshin. – Minsk: BGU, 2017 – 263 p. ISBN 978-985-566-467-4.
6. Backpropagation applied to handwritten zip code recognition / Y. Le Cun [et al.] // Neural computation. – 1989. – № 1(4). – P. 541–551.
7. Object recognition with gradient-based learning / Y. Le Cun [et al.] // In shape, contour and grouping in computer vision. – B. ; Heidelberg, 1999. – P. 319–345.

8. Gradient-based learning applied to document recognition / Y. Le Cun [et al.] // Proc. of the IEEE. – 1998. – № 86(11). – P. 2278–2324.

9. Full Connected Neural-Network for Simulation of Extantion in Self-Stressed Monolithic Slabs on Ground / A. E. Zheltkovich [et al.] // Promising Directions of Innovative Development of Construction Industry and Engineering Training (PDDC 2022): materials of XXII International Scientific and Methodological Seminar, Republic of Belarus, Brest, September 29–30, 2022 / Ministry of Education of the Republic Belarus, Brest State Technical University, Faculty of Civil Engineering ; Editorial: N. N. Shalobyta [et al.]. – Brest : BrSTU, 2022.

10. Molosh V. V., Zheltkovich A. E. [i dr.] / Primenenie polnosvyaznoj nejronnoj seti v raschyotah soprotivleniya srezu pri prodavlivanii ploskih zhelezobetonnyh plit perekrytij bez poperechnoj armatury // Perspektivnye napravleniya innovacionnogo razvitiya stroitelstva i podgotovki inzhenernyh kadrov : sbornik nauchnyh statej XXII Mezhdunarodnogo nauchno-metodicheskogo seminar, Brest, 29–30 sentyabrya 2022 g. / Ministerstvo obrazovaniya Respubliki Belarus, Brestskij gosudarstvennyj tehnikeskij universitet; redkol.: S. M. Semenyuk [i dr.]. – Brest: BrGTU, 2022. – P. 121–133:

11. Data normalization. [Electronic resource]. – Access mode: [https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Batch-normalization#cite\\_note-2](https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Batch-normalization#cite_note-2) – Date of access: 15.11.2023.

12. Adam: A Method for Stochastic Optimization” [Electronic resource]. – Access mode: <https://arxiv.org/abs/1412.6980>. – Date of access: 14.12.2023

13. First-order-gradient-based algorithm of stochastic objective functions, based on adaptive estimates of lower-order moments. [Electronic resource]. – Access mode: <https://medium.com/analytics-vidhya/a-complete-guide-to-adam-and-rmsprop-optimizer-75f4502d83be> – Date of access: 14.12.2023.

# STUDY OF THE IMPACT OF BACKFILL MATERIALS BEHAVIOR ON THE ROCK MASSIFS STRESS-STRAIN STATE DURING STRATIFIED DEPOSITS CHAMBER MINING

D.A. Petrachkov, M.A. Nikolaitchik, M.A. Zhuravkov

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Significant increase of the percentage of the extracted reserves during the mining works is possible due to the creation of the artificial pillars made from the hardening backfill material based on sludge [1]. At the same time, there is a small amount of published results of the wide-scale researches of the stress-strain state (SSS) of the rock massifs [2], that allow to determine optimal physical and mechanical properties of the backfilling material, that ensure bearing capacity of the geomechanical system under consideration. Meanwhile, when stability of the geomechanical system depends on the bearing capacity of the artificial pillars, the type and the physical properties of the used backfilling material become extremely important, in order to provide relatively simple and cheap production, transportation and placement, high level of fill in chambers on the one hand, and required strength and stiffness after consolidation in a desired time interval on another hand.

The considered scheme of mining (figure 1) suggests the filling of the chambers of first stage (chambers 1-5) with the consolidating backfill and further extraction of pillars.

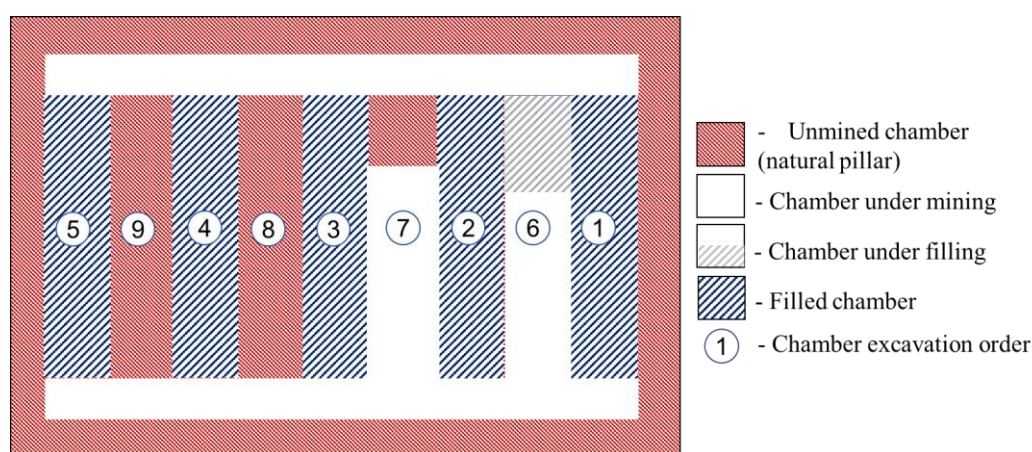


Figure 1. Technology of extraction with the technological scheme with consolidating backfill

During the mining of the one chamber the previous one is already filled. Between the chambers of first stage are located the natural pillars. After the last chamber of the first stage is filled, the natural pillars are also extracted and

filled. The chambers are located close up to each other. This way, it is possible to extract the maximum amount of mineral resources. The extraction occurs in the time stages, determined in advance, which corresponds to the particular time from the beginning of the mining works.

The aim of the research is to determine the behavior of the backfill material (in particular, physical properties variation during the time and under the load) that ensure optimal geomechanical state of the massif for the particular technological mining scheme.

Geological layers are considered as homogeneous isotropic elastoplastic materials. For elastoplastic materials the Mohr-Coulomb model is used. The backfill material is considered as homogeneous isotropic elastic material. Mechanical properties of the backfill material are determined based on the result of the study [3].

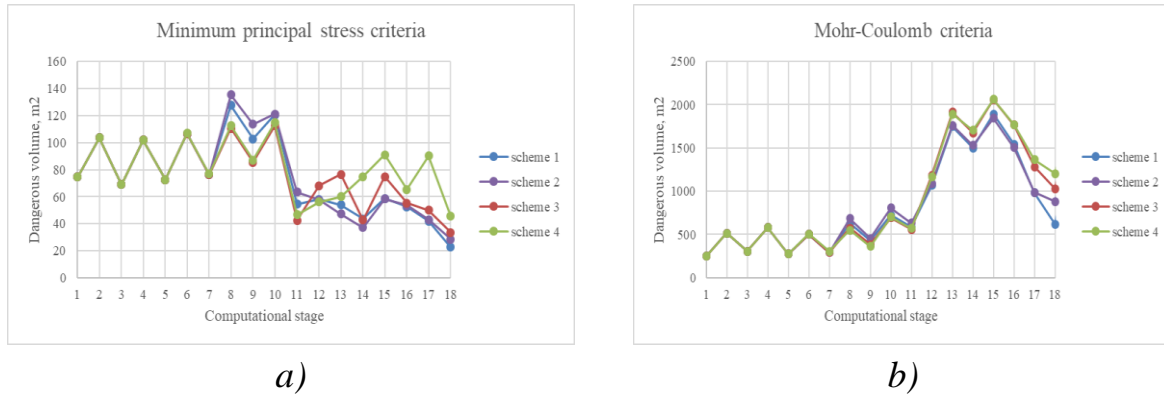
In order to study the impact of the different schemes of backfill behavior, the different models of backfill properties variation in time are under consideration (table 1).

**Table 1. Schemes of strength properties and deformation characteristics of the backfill material during the time**

Scheme №		<i>t</i> , days			
		0	15	30	
1	<i>E(t)</i> , MPa	<i>E</i> <sub>0</sub> = <i>E</i> =20	<i>E</i> <sub>1</sub> =50 <i>E</i> =1*10 <sup>3</sup>	<i>E</i> <sub>2</sub> =100 <i>E</i> = 2*10 <sup>3</sup>	
2		<i>E</i> <sub>0</sub> = <i>E</i> =20	<i>E</i> <sub>1</sub> =100 <i>E</i> =2*10 <sup>3</sup>	<i>E</i> <sub>2</sub> =100 <i>E</i> = 2*10 <sup>3</sup>	
3		<i>E</i> <sub>0</sub> = <i>E</i> =20	<i>E</i> <sub>1</sub> =10 <i>E</i> =0,2*10 <sup>3</sup>	<i>E</i> <sub>2</sub> =100 <i>E</i> = 2*10 <sup>3</sup>	
4		<i>t</i> , days			
		0	10	20	30
	<i>E</i> <sub>0</sub> = <i>E</i> =20	<i>E</i> <sub>1</sub> =4,6 <i>E</i> =92,5	<i>E</i> <sub>2</sub> =21 <i>E</i> =427	<i>E</i> <sub>3</sub> =100 <i>E</i> =2*10 <sup>3</sup>	

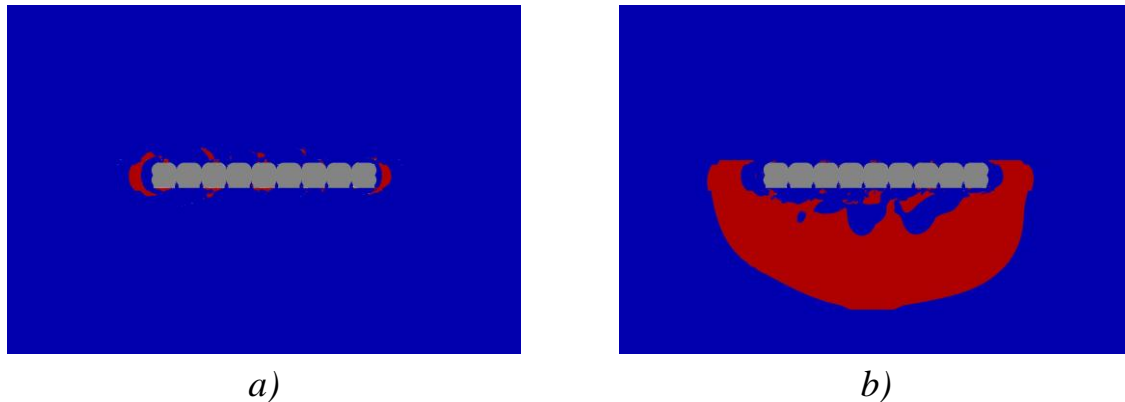
For the estimation of the effectivity of particular backfill behavior scheme the concept of dangerous volume is used. Dangerous volume is a volume where massif turns into the limit state according to one of the criteria. The comparison is made by the value of dangerous volumes. On figure 2 the results of the modeling on all stages of excavation and filling are shown in the form of dangerous volumes plots.

It will be noted, that maximum and minimum principal strain and maximum principal stress do not exceed the limit value or the value of dangerous volume is insignificant and do not affect the bearing capacity of the massif.



**Figure 2. Values of dangerous volumes of the limit state zones on the different computational steps by: a) minimum principal stress criteria; b) Coulomb-Mohr criteria**

The common view of zones of the limit state that has formed after the filling of all chambers (on the last computational step) is shown on the figure 3 (considering scheme №4).



**Figure 3. Common view of the limit state zones (with red) on the last computational step (scheme no. 4) by: a) minimum principal stress criteria; b) Coulomb-Mohr criteria**

Zones of possible crack growth mainly extend downwards from the worked-out space (Figure 3b). This fact is due to the peculiarities of the geological structure and strength properties of rocks.

In table 2, the numbers of schemes for possible mechanical state changes (consolidation) of the backfill material are marked in red, which show the most unfavorable state as a result of a comparative analysis of the geomechanical state in the vicinity of chambers.



**Table 2. Common view of the limit state zones (with red) on the last computational step (scheme no. 4) by: a) minimum principal stress criteria; b) Coulomb-Mohr criteria**

Stage № and description		Scheme №			
		1	2	3	4
1	Mining of chamber №1				
2	Mining of chamber №2				
3	Filling of chamber №1				
4	Mining of chamber №3				
5	Filling of chamber №2				
6	Mining of chamber №4				
7	Filling of chamber №3				
8	Mining of chamber №5				
9	Filling of chamber №4				
10	Mining of chamber №6				
11	Filling of chamber №5				
12	Mining of chamber №7				
13	Mining of chamber №8				
14	Filling of chamber №6				
15	Mining of chamber №9				
16	Filling of chamber №7				
17	Filling of chamber №8				
18	Filling of chamber №9				

**Conclusion.** From the point of view of the influence of the backfill material consolidation regime on the geomechanical state of the enclosing array in the vicinity of the worked space the following facts are established:

- at the stages before the pillar excavation, the schemes with the backfill material with greater compliance are more preferable;
- at the stages after the pillar excavation, more effective schemes are schemes with the backfill material with greater stiffness, in particular, scheme №2.

So, it was found that the most effective scheme for a chamber mining of stratified mineral deposits with the backfilling of the undermined space is a two-stage increasing of the backfill material stiffness. Before the mining of the pillars the backfill material stiffness is slowly increasing, and after beginning of the pillars mining backfill material should be as compacted as possible.



It should be noted that the optimal behavior and consolidation of the backfill material should be established for a specific technological scheme of mining and filling of the massif.

### **References**

1. Zhang, Z. X., Hou, D. F., Aladejare, A., Ozoji, T., & Qiao, Y. World mineral loss and possibility to increase ore recovery ratio in mining production. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 2021, 35(9), 670-691.
2. Rybak J., Khayrutdinov M. M., Kuziev D. A., Kongar-Syuryun C. B., Babyr N. V. Prediction of the geomechanical state of the rock mass when mining salt deposits with stowing. *Journal of Mining Institute*. 2022. Vol. 253. p. 61-70. [In Russ.] DOI: 10.31897/PMI.2022.2
3. Kovalski E. R., Gromtsev K. V., Petrov D. N. Modeling deformation of rib pillars during backfill. *MIAB. Mining informational and analytical bulletin*. 2020;(8):87-101. [In Russ.]. DOI: 10.25018/0236-1493-2020-8-0-87-101.
4. Zhuravkov M. A., Lopatin S. N. Geomechanics of the deep underground constructions. *Neftekhimiya. Materials of the IV International scientific and technical forum on the chemical technologies ana oil and gas treatment*. Minsk, Belarusian State University of Technologies, 22-24 November 2021, pp. 280-283. [In Russ.]

# МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕХНОГЕННОЙ ВИБРАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТА В ТЕХНИЧЕСКОЙ ЗОНЕ ПОДЗЕМНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ МАГИСТРАЛЕЙ

Василевич Ю.В., доктор физико-математических наук, профессор<sup>1</sup>  
Неумержицкая Е.Ю., кандидат физико-математических наук, доцент<sup>2</sup>  
Савицкая А.В., старший преподаватель<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск,  
Беларусь*

<sup>2</sup>*Государственное учреждение образования «Академия образования»  
vasilevich.bntu@mail.ru*

**Введение.** В связи со сложной картиной распространения упругих волн в окружающее грунтовое пространство, генерируемых динамическими источниками, функционирующими в подземных выработках, тоннелях метрополитена неглубокого заложения и некоторых других объектах, возникают трудности построения математической модели для описания реальных волновых процессов, существенно влияющих на прочностные характеристики зданий, сооружений, гигиеническую обстановку в них по уровням шума и вибрации, подверженных интенсивным вибрационным воздействиям. В данной работе изложена методика расчета затухания показателей уровня вибрации поверхности грунта на удалении от действующего тоннеля, а также дан расчет и анализ амплитуд виброскоростей поверхности грунта. Исследование основано на экспериментальных данных, полученных на основе натурных исследований по изучению динамических характеристик колебаний лотка, обделки тоннеля, поверхности грунта в технической зоне метрополитена при движении подвижного состава.

Вертикальная и горизонтальная составляющие виброскорости на поверхности грунта в третьоктавных (октавных) полосах частот  $i$  определяются по формуле

$$v(i) = \sqrt{v_R^2(i) + v_l^2(i)}, \quad (1)$$

где виброскорости  $v_R(i)$  в третьоктавной (октавной) полосе частот  $i$ , м/с, вызванная волной Релея и продольной волной  $v_l(i)$  определяются на основе уравнений [2]

$$v_R(i) = \sqrt{\frac{R_0}{H_0}} v_{\max}(i) e^{-\beta k_R x} e^{-\beta k_l H_0}, \quad (2)$$

$$v_l(i) = \sqrt{\frac{R_0}{\sqrt{x^2 + H_0^2}}} v_{\max}(i) e^{-\beta k_l \sqrt{x^2 + H_0^2}}. \quad (3)$$

Здесь  $R_0 = \min\left(\frac{D}{2}; \frac{c_l}{\omega}\right)$  – характерный размер, где  $D$  – ширина тоннеля;

$H_0$  – глубина, на которой находится лотковая часть обделки тоннеля, м;

$v_{\max}(i)$  – максимальная из вертикальной и горизонтальной составляющих виброскорости в третьоктавной (октавной) полосе частот  $i$  на лотковой части тоннеля;  $x$  – удаление от продольной оси тоннеля, м;

$\beta$  – коэффициент затухания в грунте;  $k_R = \frac{2\pi f}{0,92c_t}$  – волновое число

волны Рэлея, где  $c_t$  – скорость распространения поперечных волн;

$k_l = \frac{2\pi f}{c_l}$  – волновое число продольной волны в грунте.

Передаточная функция  $k_{soil}$  может быть вычислена по формуле или получена экспериментально

$$k_{soil} = \frac{v(i)}{v_{\max}(i)} \quad (4)$$

Эквивалентное корректированное значение рассчитывается по формуле

$$v_{w,eq} = \sqrt{\frac{1}{T_r} \sum_j T_{ej} (v_{w,\max,j})^2}, \quad (5)$$

где  $T_r$  – время оценки вибрационного воздействия;

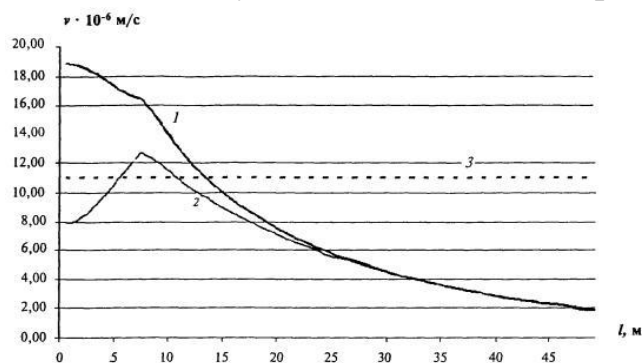
$T_{ej}$  – частичное время воздействия вибрации, соответствующее реализации  $j$ -го режима движения поездов;

$v_{w,\max,j}$  – максимальное корректированное значение виброскорости, характеризующее интенсивность вибрации за время  $T_{ej}$ .

Значения величин времени воздействия вибрации определяются согласно графику движения поездов рассматриваемой линии метрополитена.

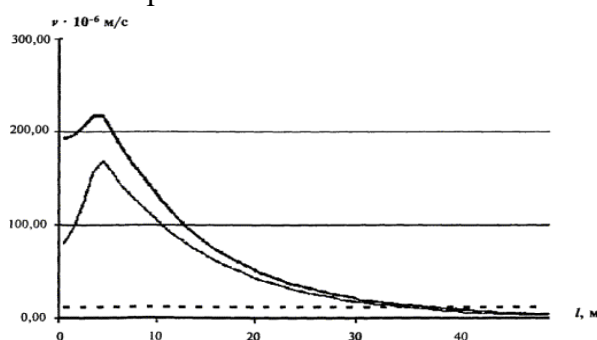
На основании [1, 2] определим амплитуды виброскорости на поверхности грунта, возбуждаемого движением поездов метрополитена в тоннеле с глубиной заложения 12 м от основания лотка до поверхности. Строение пути - типовое (деревянные шпалы, утопленные в бетон). Конструкция обделки тоннеля – цельно секционная железобетонная. Геологическая обстановка - суглинок туго пластичный с плотностью 1700 кг/м<sup>3</sup>, скоростями распространения продольных и поперечных волн соответственно 600 и 250 м/с и декрементом затухания во всем нормируемом диапазоне частот 0,1.

Зависимости максимальных величин вибрации в октавных диапазонах 16, 31,5 и 63 Гц от расстояния до стены тоннеля (в плане) приводятся соответственно на рисунках 1 -3. Все расчеты производятся для максимальных значений виброскорости. Нормативные значения виброскорости для жилых зданий указаны для ночного времени суток [3].



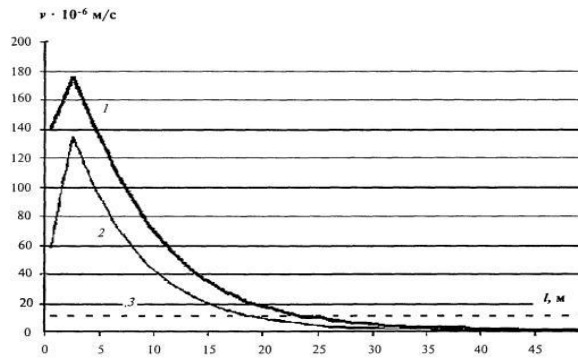
**Рисунок 1 - Зависимость максимальной величины вертикальной и горизонтальной составляющих виброскорости  $v$  от расстояния до тоннеля в октавном диапазоне 16 Гц**

1 - вертикальная составляющая; 2 - горизонтальная составляющая; 3 - нормативное значение



**Рисунок 2 - Зависимость максимальной величины вертикальной и горизонтальной составляющих виброскорости  $v$  от расстояния до тоннеля в октавном диапазоне 31,5 Гц**

1 - вертикальная составляющая; 2 - горизонтальная составляющая; 3 - нормативное значение



**Рисунок 3 - Зависимость максимальной величины вертикальной и горизонтальной составляющих виброскорости  $v$  от расстояния до тоннеля в октавном диапазоне 63 Гц.**

1 - вертикальная составляющая; 2 - горизонтальная составляющая; 3 - нормативное значение

Расчет затухания показателей уровня вибрации в грунте на удалении от тоннеля можно осуществить на основе расчета и анализа амплитуд виброскоростей поверхности грунта. Поскольку основными вибрациями, которые необходимо учитывать при виброзащите верхнего строения пути и фундаментов зданий, расположенных в технической зоне метрополитена неглубокого заложения при движении подвижного состава, рассмотрим решение поставленной задачи в октавных полосах со среднегеометрическими частотами 31,5 и 63 Гц.

Для расчета затухания показателей уровня вибрации на поверхности грунта в октавной полосе со среднегеометрической частотой 31,5 Гц

воспользуемся рисунком 2, на котором проиллюстрированы графики зависимостей показателей виброскоростей поверхности грунта в технической зоне метрополитена неглубокого заложения от расстояния, отсчитываемого в плане от тоннеля.

На расстоянии  $\approx 5$  м от обделки тоннеля зафиксированы максимальные уровни виброскорости, которые для вертикальной  $v_v$  и горизонтальной  $v_h$  составляющих равны

$$v_v = 220 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}, \quad v_h = 170 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

$$\text{Для } 10 \text{ м имеем } v_v = 120 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}, \quad v_h = 100 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

Следовательно, в указанном диапазоне участка в плане максимальная вертикальная составляющая виброскорости уменьшилась в 1,8 раза или на 5дБ; горизонтальная компонента в 1,7 раза или 5дБ. Однако, на 10 м  $v_v = 120 \cdot 10^{-6}$  м/с, т.е. превышение нормативного значения составляет 12 раз или 21дБ.

Для участка 10 – 20 м наблюдается снижение показателей виброскорости для  $v_v$  от  $120 \cdot 10^{-6}$  м/с до  $4,9 \cdot 10^{-5}$  м/с. Для 20 м превышение предельно допустимого значения виброскорости равно 13 дБ, т.е. имеет место уменьшения показателей уровня вибрации от 21 дБ до 13 дБ по сравнению с предыдущим участком.

Для участка 20 – 30 м также наблюдается уменьшение показателей вибрации  $4,9 \cdot 10^{-5}$  м/с до предельно допустимой величины, достигаемой вертикальной так и горизонтальной составляющими виброскорости на расстоянии 35 м от тоннеля. За указанной отметкой по расстоянию амплитуда виброскорости становится меньше предельно допустимой величины и колебания затухают.

Рассчитаем коэффициенты затухания вертикальной  $k_v$  и горизонтальной  $k_r$  составляющих виброскорости на поверхности грунта в октавной полосе со среднегеометрической частотой 31,5 Гц.

На участке 5 – 10 м:

$$k_v = 120 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 220 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} \approx 0,5,$$

$$k_r = 100 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 170 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} \approx 0,6.$$

На участке 10 – 20 м:

$$k_v = 49 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 120 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} = 0,4,$$

$$k_r = 42 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 100 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} = 0,4.$$

На участке 20 – 30 м:

$$k_v = 19 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 49 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} = 0,4,$$

$$k_r = 19 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 42 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} = 0,45.$$

На участке 30 – 40 м:

$$k_v = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 19 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} = 0,8,$$

$$k_r = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} / 19 \cdot 10^{-6} \text{ м/с} = 0,8.$$

Аналогичные вычисления можно осуществить для других частот, необходимых для расчета параметров, с учетом изложенной методики.

**Заключение.** Изложена методика расчета техногенной вибрации поверхности грунта в технической зоне подземных транспортных магистралей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. "ВСН 211-91. Прогнозирование уровней вибрации грунта от движения метропоездов и расчет виброзащитных строительных устройств".
2. СП 23-105-2004 «Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена» (gostrf.com).
3. Санитарные нормы допустимых вибраций в жилых, административных и общественных помещениях зданий. – Мн; 2016.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД В ОБЛАСТЯХ ВЕДЕНИЯ МАСШТАБНЫХ ПОДЗЕМНЫХ ГОРНЫХ РАБОТ

**Н.М. Климкович, М.А. Николайчик, М.А. Журавков**  
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

**Введение.** При исследовании геомеханического состояния массивов горных пород с подземными сооружениями, довольно часто требуется определить его напряженно-деформированное состояние (НДС) в течении длительного промежутка времени. В таких задачах целесообразно рассматривать породный массив как вязкоупругую среду с использованием различных моделей ползучести.

В настоящее время, существует небольшое число прикладных пакетов численного моделирования, позволяющих рассматривать исследуемое тело в вязкоупругой постановке. Одними из таких программных пакетов являются Ansys Mechanical APDL и Abaqus. В них предложено множество различных моделей ползучести, некоторые из которых приведены в таблице 1 [1, 2].

**Таблица 1. Некоторые модели ползучести, приведенные в программных пакетах Ansys Mechanical APDL и Abaqus**

№ модели	Название модели	Уравнение	Программный комплекс
1	Strain Hardening	$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} \epsilon_{cr}^{C_3} e^{-C_4/T}, C_1 > 0$	Ansys Mechanical APDL
2	Time Hardening	$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} t^{C_3} e^{-C_4/T}, C_1 > 0$	
3	Exponential Form	$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 e^{\sigma/C_2} e^{-C_3/T}, C_1 > 0$	
4	Norton	$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} e^{-C_3/T}, C_1 > 0$	
5	Time Hardening	$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \sigma^{C_2} t^{C_3}, C_1 > 0, C_2 > 0, -1 < C_3 \leq 0$	Abaqus
6	Strain Hardening	$\dot{\epsilon}_{cr} = \left\{ C_1 \sigma^{C_2} [(C_3 + 1) \epsilon_{cr}]^{C_3} \right\}^{\frac{1}{C_3+1}}, C_1 > 0, C_2 > 0, -1 < C_3 \leq 0$	
7	Hyperbolic-sine	$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 [\sinh(C_2 \sigma)]^{C_3} e^{-\frac{H}{R(T-T^0)}}, C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 > 0$	

где  $\dot{\epsilon}_{cr}$  – скорость эквивалентной деформации ползучести,  $\sigma$  – эквивалентное напряжение по Мизесу,  $\epsilon_{cr}$  – эквивалентная деформация ползучести,  $T$  – температура,  $t$  – время,  $H$  – энергия активации,  $R$  –

универсальная газовая постоянная,  $T^0$  – температура абсолютного нуля,  $C_n$  – некоторые константы, определяемые опытным путем.

Приведенные модели ползучести хорошо подходят для исследования вязкоупругого поведения металлических конструкций в течении длительного промежутка времени. Однако, их использование для решения задач геомеханики приводит к наличию больших излишних деформаций ползучести, величина которых растет по мере увеличения рассматриваемой глубины.

Данное обстоятельство, прежде всего, связано с тем, что приведенные в таблице 1 модели ползучести никак не учитывают начальное (естественное) напряженное состояние, в котором находится нетронутые породные массы [3]. Одним из способов решения данной проблемы является применение следующей разработанной модели ползучести (1):

$$\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 \left( \frac{\sigma}{\sigma^0} \right)^{C_2}, C_1 > 0 \quad (1)$$

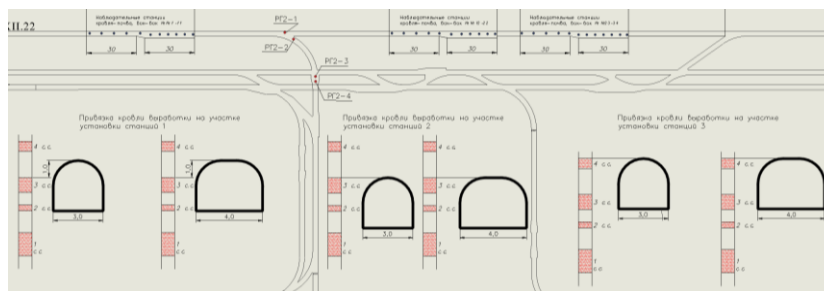
где  $\sigma^0$  – эквивалентное напряжение по Мизесу в ненарушенном породном массиве.

Разработанная модель позволяет учесть изменение НДС только в тех участках породного массива, которые подвержены влиянию горных работ. Так, на отдаленных от мест ведения горных работ участках породного массива, где  $\sigma \rightarrow \sigma_0$ , значение  $\dot{\epsilon}_{cr} \rightarrow C_1$ , которая, в свою очередь, является величиной порядка  $1 \times 10^{-11}$  1/с.

**Верификация разработанной модели.** Верификация предложенной модели проводилась при исследовании характера деформирования некоторых исследовательских выработок на Петриковском месторождении калийных солей. Исследуемые выработки имели ширину 3 и 4 м и располагались на трех исследовательских участках с разными привязками кровли выработок по отношению к переслаиванию каменной соли и сильвинита (рисунок 1). При проходке данных выработок в их кровле устанавливалась анкерная крепь. Горные работы велись на глубине 1025 м.

Алгоритм моделирования поведения породных масс в окрестности выработок состоял из трех расчетных шагов. Решение задач выполнялось на основе метода конечных элементов (МКЭ) в плоско-деформированной постановке [4].





**Рисунок 1 – Схема исследовательских участков и места установки наблюдательных станций**

На *первом этапе* моделирования определялось начальное напряженное массива, на *втором этапе* моделирования – НДС массива горных пород в момент проходки выработки, на *третьем этапе* моделирования – НДС массива горных пород спустя 190 суток после проходки выработки. На первых двух этапах массив горных пород рассматривался как упругая среда, на последнем – как вязкоупругая среда. Между слоями каменной соли и сильвинита, а также между породными слоями и анкерной крепью, принимались условия полного контакта.

Константы  $C_1$  и  $C_2$  определялись по результатам обработки данных натурных исследований. В результате получены следующие значения данные параметров:  $C_1 = 6 \cdot 10^{-12}$  для каменной соли и  $C_1 = 20 \cdot 10^{-12}$  для сильвинита; средние значения для параметра  $C_2 = 1$  для каменной соли и сильвинита.

Отметим, что вследствие того, что геомеханическое поведение породных масс в различных частях контура выработки (в кровле, боках и почве) различается друг от друга, расчет значения  $C_2$  при перемещении по контуру выработки выполняется согласно следующему алгоритму.

В окрестности каждой выработки выделяется область радиусом  $R = 1.5 \cdot b$ , где  $b$  – ширина выработки. Центр координат данной области находится в центре выработанного пространства. Внутри данной области константа  $C_2$  для модели ползучести (1) вычисляется следующим образом:

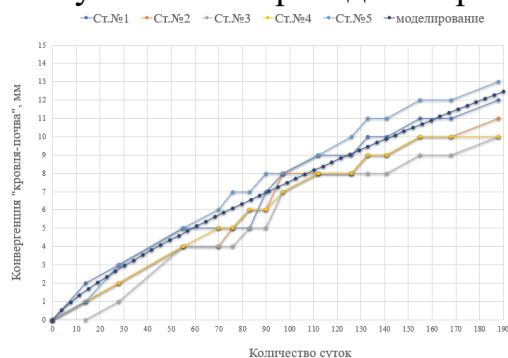
$$C_2 = 2 + 2|\sin(\varphi)|$$

где  $\varphi$  – полярный угол, отсчитываемой от горизонтальной оси.

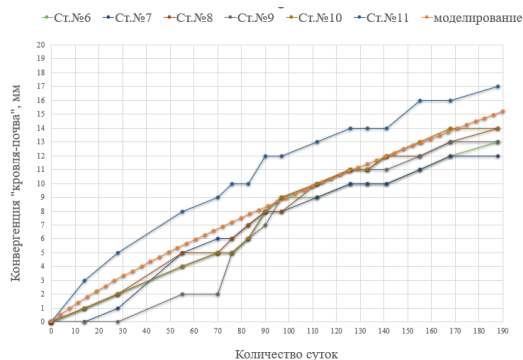
Так, значение константы  $C_2$  внутри данной области в зоне боковых поверхностей выработки приблизительно равнялось двум, а в зонах кровли и почвы выработки – четырем, вне данной области – единице.

Далее, на рисунке 2 приведены некоторые графики конвергенции (взаимного сближения) верхней и нижней точек («кровля-почва») выработок, а также их боков («бок-бок») в зависимости от времени

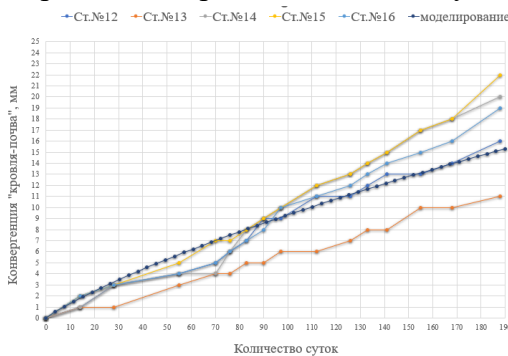
согласно данным наблюдательных станций (рисунок 1) и результатам моделирования на третьем этапе. В таблице 2 приведена минимальная разница между значениями конвергенций, полученных согласно результатам моделирования и данным наблюдательных станций, спустя 190 суток после проходки выработок.



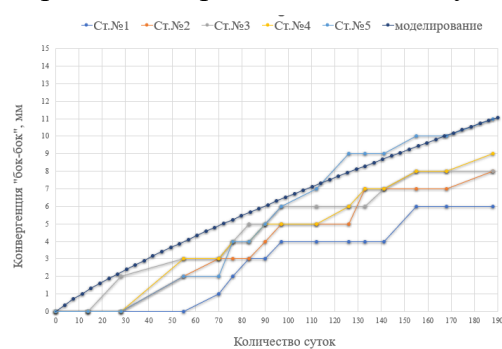
Конвергенция «кровля-почва» для выработки шириной 3 м на 1-ом участке



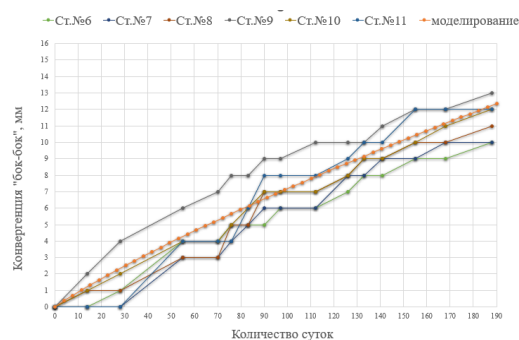
Конвергенция «кровля-почва» для выработки шириной 4 м на 1-ом участке



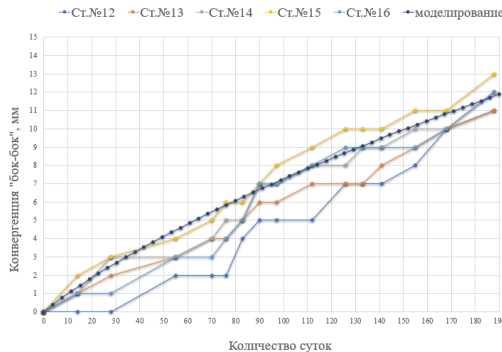
Конвергенция «кровля-почва» для выработки шириной 3 м на 2-ом участке



Конвергенция «бок-бок» для выработки шириной 3 м на 1-ом участке



Конвергенция «бок-бок» для выработки шириной 4 м на 1-ом участке



Конвергенция «бок-бок» для выработки шириной 3 м на 2-ом участке

**Рисунок 2. Конвергенции «кровля-почва» и «бок-бок» некоторых исследовательских выработок**

**Таблица 2. Минимальная разница между значениями конвергенций, полученных по результатам третьего этапа моделирования и данным наблюдательных станций**

№ исследовательского участка	Ширина выработки, м	Разница в конвергенции «кровля-почва»	Разница в конвергенции «бок-бок»
1	3	4%	1%
	4	9%	3%
2	3	4%	1%
	4	0%	4%
3	3	2%	2%
	4	3%	7%

Согласно данным таблицы 2, средняя величина минимальной разница между значениями конвергенций, полученными согласно результатам моделирования и данным наблюдательных станций, спустя 190 суток после проходки выработок, для предложенной модели составляет 3%. Абсолютное значение отклонения не превышает 7%.

**Закключение.** Таким образом, была разработана и верифицирована модель ползучести, учитывающая как начальное (естественное) напряженное состояние, в котором находятся нетронутые породные массы, так и различное геомеханическое поведение породных масс на контуре выработок. В ходе сравнительного анализа было показано, что алгоритм численного моделирования, использующий разработанную модель ползучести, имеет малую погрешность относительно данных натурных наблюдений, а значит, позволяет корректно определять НДС породного массива с подземными выработками.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Басов К. А. Справочник пользователя ANSYS //М.: ДМК-пресс. – 2005.
2. Helwany S. Applied soil mechanics with ABAQUS applications // John Wiley & Sons. – 2007.
3. Булычев Н. С. Механика подземных сооружений: учебник для Вузов.-2-е изд. //М.: Недра. – 1994. – Т. 2.
4. Журавков М.А., Николайчик М.А., Климкович Н.М. Оценка возможности уменьшения размеров охранных целиков при ведении очистных работ в окрестности шахтных стволов // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук – 2023. – Т. 10, № 2. – С. 22-32.

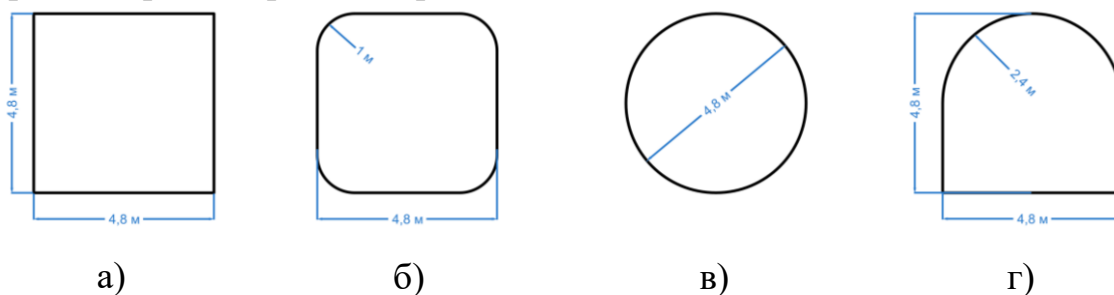
# РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЗОН РАЗРУШЕНИЯ И ТРЕЩИНОВАТОСТИ В ПОДРАБАТЫВАЕМОМ МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД

И.Н. Карпович, С.Н. Лопатин, М.А. Журавков

Беларусский государственный университет, Минск, Беларусь

**Введение.** Задачи механики горных пород и массивов, связанные с исследованием напряженно-деформированного состояния (НДС) массивов горных пород блочной структуры, относятся к одним из наиболее сложных. Они требуют применения специальных подходов и методов, разработки сложных алгоритмов для построения решений требуемой точности [1, 2, 3]. В данной работе разработаны алгоритмы механико-математического моделирования геомеханических процессов в массивах горных пород с подземными сооружениями с использованием сопряжения метода конечных (МКЭ) и метода блочных элементов (МБЭ). В частности, моделируется процесс разрушения и трещинообразования с последующим формированием блочных структур в массиве горных пород при ведении горных работ применительно к месторождениям соляных пород, имеющим слоистую структуру.

**Сопряженный алгоритм решения задачи.** Задача состоит в моделировании НДС массива соляных пород в окрестности одиночных выработок различного поперечного сечения с учетом формирования зон техногенной трещиноватости в их окрестности. Глубина залегания выработок рассматривается равной 1170 м.



а) – прямоугольное сечение, б) – прямоугольное сечение со скруглёнными углами,  
в) – круглое сечение, г) – арочное сечение

**Рисунок 1. Рассматриваемые поперечные сечения выработок**

В качестве материала в окрестности выработки выбрана каменная соль соответствующую Старобинскому месторождению [3].

Для расчёта начального НДС используются следующие граничные условия (ГУ):

- жёсткая заделка в основании модели.
- нормальное гидростатическое давление на верхней грани модели.

Данное граничное условие моделирует давление вышележащих слоев породной толщи. Значение гидростатического давления вычисляется по следующей формуле.

$$P = \rho gh \quad (1)$$

где  $\rho$  – средняя плотность породы,  $g$  – ускорение свободного падения,  $h$  – глубинная отметка верхней грани модели.

– боковое давление, обусловленное наличием гидростатического давления.

$$P = \rho gh_j \quad (2)$$

где  $\rho$  – средняя плотность породы,  $g$  – ускорение свободного падения,  $h_j$  – глубинная отметка, значение которой варьируется от 1080 м до 1200 м.

– задача решается в поле силы тяжести. То есть, учитывается собственный вес всех элементов рассматриваемой модели.

На следующем шаге, для расчётной схемы с учетом наличия выработки рассматриваются аналогичные ГУ. Однако, вместо задания бокового давления вводятся ограничения на нормальные перемещения. Таким образом, на этом этапе расчётов задача решалась в полных напряжениях и дополнительных перемещениях [4]. Начальное НДС для проходки массива зачитывается из предыдущих расчетов.



Рисунок 2. Оценка ПС массива в окрестности одиночных выработок по комплексному критерию ПС на глубине 1170 м; красный цвет – зоны ПС [3]

Для анализа областей предельного состояния в массивах горных пород было выбрано два критерия - критерии Лэйда и Гриффитса.

Критерий Гриффитса [3]:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 &\leq 8\sigma_{tens}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{ при } \sigma_1 + 3\sigma_3 > 0, \\ \sigma_3 &= \sigma_{tens} \text{ при } \sigma_1 + 3\sigma_3 < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Критерий Лэйда [3]:

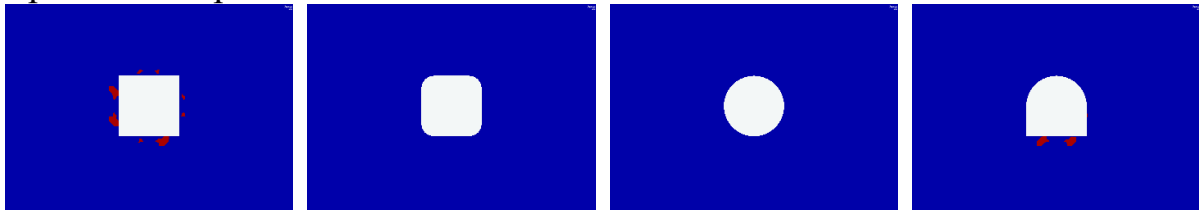
$$\left(\frac{I_1}{I_3} - 27\right) \left(\frac{I_1}{p_a}\right)^m \leq \eta_1, \quad (4)$$

$$I_1 = \overline{\sigma}_1 + \overline{\sigma}_2 + \overline{\sigma}_3, I_2 = \frac{(\overline{\sigma}_1 - \overline{\sigma}_2)^2 + (\overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_1)^2 + (\overline{\sigma}_3 - \overline{\sigma}_2)^2}{6}, I_3 = \overline{\sigma}_1 \overline{\sigma}_2 \overline{\sigma}_3,$$

$$\overline{\sigma}_1 = \sigma_1 + \alpha p_a, \quad \overline{\sigma}_2 = \sigma_2 + \alpha p_a, \quad \overline{\sigma}_3 = \sigma_3 + \alpha p_a,$$

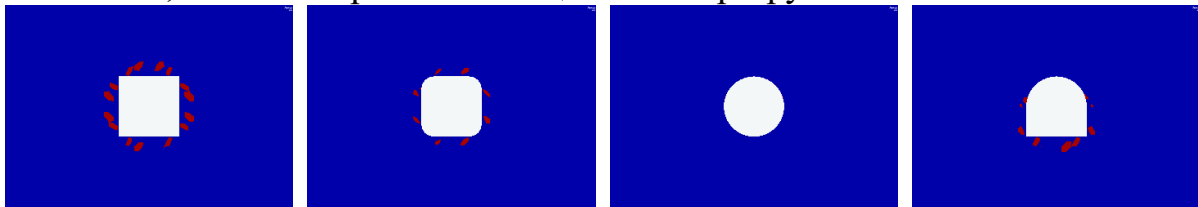
где,  $\sigma_{tens}$  – предел прочности при растяжении,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные значения тензора напряжений,  $I_1, I_2, I_3$  – инварианты тензора напряжений,  $\alpha, m, p$  – экспериментально определяемые параметры горных пород.

На рисунке 4 показаны результаты при использовании критерия Гриффитса. В теории Гриффитса рассматривается разрушение материала как процесс образования трещин. Согласно критерию Гриффитса предполагается, что разрушение при растяжении в хрупких материалах начинается в вершине трещины. Поэтому, при распространении данного критерия на исследование ПС породных массивов, следует учитывать, что на основе критерия Гриффитса можно определить главным образом зоны образования трещин в массиве.



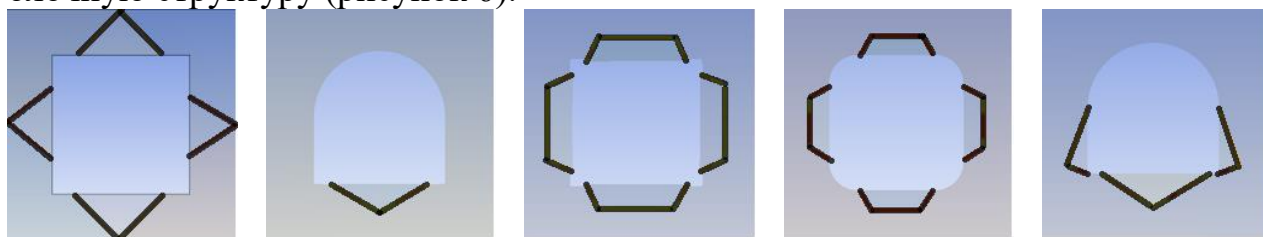
**Рисунок 4 – Схема формирования блочной структуры в соответствии с критерием Гриффита на глубине 1170 м**

На рисунке 5 показаны результаты при использовании критерия Лэйда. На больших глубинах по критерию Лэйда прогнозируется появление лишь небольших зон ПС в окрестности выработок всех рассматриваемых сечений, за исключением круглого. Таким образом, можно сделать вывод о том, что критерий Лэйда характеризует ПС массива горных пород не с точки зрения его перехода в новое структурное состояние, а с точки зрения потенциального разрушения.



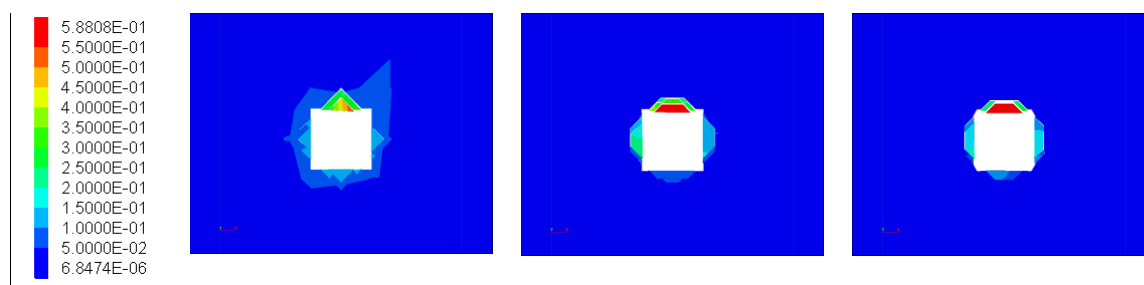
**Рисунок 5. Схема формирования блочной структуры в соответствии с критерием Лэйда на глубине 1170 м [3]**

Согласно данным критериям было выполнено разбиения массива на блочную структуру (рисунок 6).



5. **Рисунок 6 – Формирование блочной структуры в окрестности выработки в соответствии с критериями на глубине 1170 м**

С помощью программного комплекса Itasca 3DEC было выполнено моделирование массива блочной структуры методом дискретных элементов. На рисунке 7 показаны перемещения массива горных пород с учетом образовавшейся блочной структуры.



**Рисунок 7. Поведение массива блочной структуры при решении МДЭ**

*Выработка прямоугольного поперечного сечения и прямоугольного сечения со «скругленными» углами.* В окрестности выработок по их контуру формируются четыре блоковых структуры. Вывалы наблюдаются во всех четырех блоках. Верхний блок обрушается первым, за ним боковые. Одновременно с этим имеет место подъем нижнего блока. Вывал в верхнем блоке происходит на высоту порядка 0.6 метра. Боковые блоки смещаются в выработанное пространство на величину от 0.22 м до 0.45 м. Таким образом, для выработок прямоугольной формы поперечного сечения всегда формируется свод обрушения, в связи с чем происходит обрушение пород в кровле выработки.

*Выработка арочного поперечного сечения.* Согласно критерия Гриффитса формируется только один блок в почве выработки. При этом перемещения в блоке незначительные и только порядка 19% поверхности грани нижнего блока имеют отрыв, остальная часть блока не имеет отрыва от окружающего массива. В случае использования критерия Лэйда, вокруг выработки имеет место три блока: два боковых и один нижний. Боковой

блок имеет отрыв только верхней части поверхности, составляющей 9% от общей поверхности грани. Нижний блок незначительно смещается в область выработанного пространства. Выработка арочной формы поперечного сечения имеет самое малое количество блочных элементов вокруг выработки, которые отделяются от вмещающего массива горных пород.

**Заключение.** Анализ полученных результатов позволяет определять параметры формирования блочных структур в подработанном массиве, подверженному разрушению, а также выбрать наиболее подходящий критерий трещинообразования. Использование сопряженного алгоритма МКЭ-МБЭ и критериев Лэйда и Гриффитса позволяет моделировать и анализировать процессы трещинообразования и разрушения в массивах горных пород в окрестности подземных выработок. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и строительстве подземных сооружений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. М.А. Журавков, М. Д. Мартыненко Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных горных пород. Мн.: Университетское, 1995. 255с
2. Бабешко, В.А. О теории и приложениях метода блочного элемента / В.А. Бабешко В.А., О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко // Вестник Южного научного центра. 2013. Том 9. С. 9–19.
3. Чанышев, А.И. Математические модели блочных сред в задачах механики. Ч. 1. Деформация слоистой среды / А.И. Чанышев, Л.Л. Ефименко // ФТПРПИ. – 2003. – № 3. С. 72–84.
4. Лопатин С.Н. Предельное состояние массивов горных пород с подземными сооружениями: дис. к.ф.-м.н.: 01.02.04 / С.Н. Лопатин. – Минск, 2023. 181 с.
5. Senís, M. & Varona, P. 2008. 3DEC numerical modeling of the Tindaya Mountain Project. In Hart, Detournay & Cundall (eds) Continuum and Distinct Element Numerical Modeling in Geo-Engineering – 2008, Paper 07-07. Minneapolis: Itasca.
6. Журавков М.А., Коновалов О.Л., Богдан С.И., Прохоров П.А., Круподеров А.В. Компьютерное моделирование в геомеханике / Под общ. ред. М.А. Журавкова. Мн. БГУ, 2008. 443 с
7. Bandis, S.C. 2004. Numerical modelling of discrete materials in rock mechanics: developments and engineering applications. 1st Int. UDEC/3DEC Symp., Sep. 29-Oct. 1, 2004, Bochum, Germany.



# **ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТЕХНОГЕННО НАГРУЖЕННЫХ ТЕРРИТОРИЙ НА ОСНОВЕ ПРОГНОЗА НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ**

**А.А. Кологривко<sup>1</sup>, В.А. Кузьмич<sup>1</sup>, Д.А. Петрачков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

<sup>2</sup> Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Одним из способов поддержания производственных мощностей рудоуправлений ОАО «Беларуськалий» следует рассматривать технологическое развитие хвостовых хозяйств солеобогатительных фабрик, в состав которых входят солеотвалы и шламохранилища. Объекты рассматриваются в качестве геотехнических сооружений, эксплуатация которых ведется в условиях техногенно нагруженных территорий. Актуальную производственную тенденцию приобретает задача в части поддержания мощностей первого рудоуправления.

Так, ввиду расширения рудной базы рудоуправления и поддержания объемов его производства, при отсутствии системной возможности отвода площадей под солеотвал, возникает потребность в использовании территории шламохранилища №3, имеющего слабое (шламовое) основание (рисунок 1).

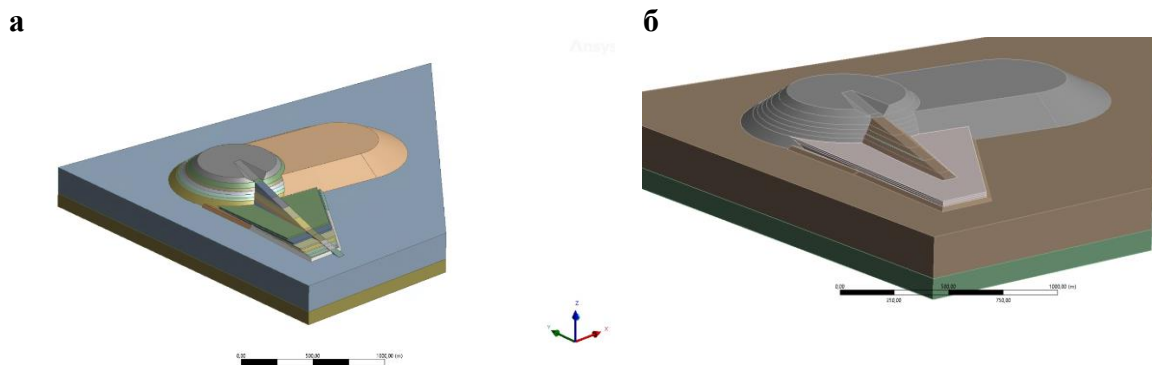
Площадь шламохранилища используется для формирования из галитовых отходов конвейерного уклона.



**Рисунок 1. Отработанное шламохранилище №3:**

**а – вид со стороны солеотвала; б – вид со стороны шламохранилища**

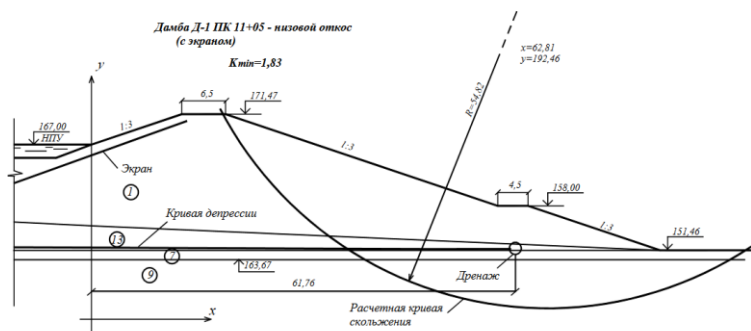
Построенная механико-математическая модель, описывающая ее напряженно-деформированное состояние, позволила выполнить численные эксперименты с оценкой общей ее прочности, в том числе в условиях ее подработки (рисунок 2).



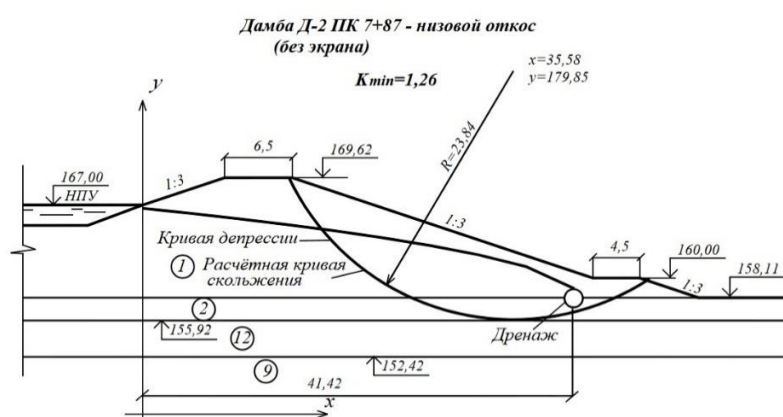
**Рисунок 2. Конечное положение исследуемой геосистемы:  
а – при гидронамыве пласт-плиты; б – при сухой отсыпке**

По результатам исследований напряженно-деформированного состояния установлено, что для возможности формирования геотехнического сооружения требуется формирование гидронамывом пласт-плиты, мощностью от 20-25 (в районе дамбы около солеотвала) и до 35-40 м (в районе дамбы противоположной солеотвалу) на слабом основании с последующим строительством конвейерного уклона сухой отсыпкой с максимальным его углом подъема  $6,8^\circ$ . Это позволит обеспечить выход на отметку солеотвала +315,0 м. Такое решение обеспечит дополнительно складирование около 200 млн. т галитовых отходов в течение 18 лет.

Важной составляющей исследований является надежность производства гидронамыва в условиях примыкания шламохранилища к солеотвалу. Так, в условиях длительной эксплуатации техногенно нагруженной территории шламохранилища (более 50 лет), в том числе в условиях влияния подработки I калийным горизонтом, требуется обеспечение устойчивости проектируемых участков дамб солеотвала высотой до 15 м и длиной 550 м, их верховых и низовых откосов. Рассматриваемые дамбы относятся к III классу гидротехнических сооружений с классом сложности геотехнического объекта К-2. Исследование устойчивости низовых и верховых откосов дамб, защитного слоя противofильтрационного экрана верховых откосов дамб для нормальных условий эксплуатации дамб шламохранилища и с учетом особых условий эксплуатации (подработка и повреждения противofильтрационного экрана) позволила получить следующие интерпретированные результаты. Некоторые расчетные схемы представлены на рисунке 3.



**Рисунок 3. Расчетная схема низового откоса проектируемого участка дамбы солеотвала с экраном, с дренажем**



**Рисунок 4. Расчетная схема низового откоса проектируемого участка дамбы солеотвала без экрана, с дренажем**

Анализ исследований позволяет считать, что принятые, конструкции поперечных сечений проектируемых участков ограждающих дамб солеотвала, для нормальных условий их эксплуатации (нормальная работа противодиффузионного экрана) и при выходе из строя противодиффузионного экрана, обеспечивают устойчивость их низовых откосов во всех рассматриваемых случаях.

Изложенное демонстрирует важность интерпретации исследований прогноза напряженно-деформированного состояния геотехнических сооружений в условиях эксплуатации техногенно нагруженных территорий.

# ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

Э.И. Старовойтов

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Необходимость оценки напряженно-деформированного состояния композитных элементов конструкций, работающих в условиях комплексных внешних воздействий, вызвана их широким применением в технике. Возникает необходимость создания математических моделей для описания их деформирования при различных нагрузках, включая радиационно-силовые. Влиянию нейтронного облучения на механические свойства материалов посвящены монографии [1–2]. Общие подходы к построению математических моделей многослойных конструкций при статических и динамических нагрузках изложены в монографиях [3–7]. Колебания неоднородных цилиндрических оболочек рассмотрены в статьях [8–10], трехслойных круговых пластин – в [11]. Деформирование трехслойных стержней и пластин в температурных полях исследовано в работах [13–17], в том числе связанных с упругим основанием.

**1. Постановка краевой задачи.** В несимметричной по толщине трехслойной круговой пластине тонкие внешние несущие слои, толщиной  $h_1 \neq h_2$ , подчиняющимися гипотезам Кирхгофа. В жестком достаточно толстом заполнителе ( $h_3=2c$ ) справедлива гипотеза Тимошенко. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат, которая связывается со срединной плоскостью заполнителя. Предполагается, что в начальный момент времени перпендикулярно внешней поверхности верхнего слоя  $z=c+h_1$  пластины воздействует осесимметричная распределенная по кругу силовая нагрузка  $q(r)$  и падает *нейтронный поток* плотностью  $\varphi_0 = \text{const}$ . В силу осесимметричности нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:  $u_\varphi^{(k)} = 0$  ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя), а прогиб пластины  $w(r, t)$  не зависит от координаты  $\varphi$ .

При малых деформациях в линейном приближении можно считать, что изменение объема материала в слоях  $\theta_{jk}$  прямо пропорционально интегральному нейтронному потоку  $I_k(z, t)$  [1]:

$$\theta_{jk} = B_k I_k(z, t), \quad I_k(z, t) = \varphi_k(z) t, \quad (1)$$

где  $\varphi_k$  – интенсивность потока, нейтрон/(м<sup>2</sup>·с), дошедшего за время  $t$  к поверхности с координатой  $z$  в  $k$ -ом слое;  $B_k$  – константа материала, получаемая из опыта, величина которой в зависимости от энергии

нейтронов и облучаемого материала может быть порядка  $10^{-28}$ – $10^{-23}$  м<sup>2</sup> / нейтрон.

Интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости, параллельной границе  $z = \text{const}$ , будет убывать по экспоненте [1].

Для описания связи напряжений с деформациями в слоях пластины используются физические уравнения состояния, учитывающие радиационное изменение объема (1),

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{\alpha}^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)},$$

$$\sigma^{(k)} = K_k (3\varepsilon^{(k)} - B_k I_k) \quad (k=1, 2, 3; \alpha=r, \varphi). \quad (2)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}, \varepsilon_{\alpha}^{(k)}$  – девиаторные,  $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования;  $s_{rz}^{(3)}, \varepsilon_{rz}^{(3)}$  – касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

Обобщенные внутренние усилия и моменты вводятся соотношениями

$$T_{\alpha} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} dz, \quad M_{\alpha} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha}^{(k)} z dz, \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz \quad (\alpha=r, \varphi), \quad (3)$$

где  $\sigma_{\alpha}^{(k)}, \sigma_{rz}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений.

Подставив в (3) выражения напряжений через деформации из (2), получим для внутренних усилий формулы, связывающие их с искомыми функциями  $u(r), \psi(r), w(r)$ . Обобщенный изгибающий момент будет

$$M_r = \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} +$$

$$+ \left[ c K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} +$$

$$\left[ c K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} -$$

$$- \left[ K_1^+ h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} -$$

$$- \left[ K_1^- h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} - \sum_{k=1}^3 K_k B_k \int_{h_k} I_k z dz. \quad (4)$$

Остальные обобщенные (3) усилия выражаются подобными формулами.

Пусть на рассматриваемую трехслойную пластину действует локальная поверхностная нагрузка  $q(r)$ , равномерно распределенная внутри кольца относительного радиуса  $a \leq r_0 \leq b$ :

$$q(r) = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)) \quad (q_0 = \text{const}),$$

где  $H_0(r)$  – функция Хэвисайда.

Система уравнений равновесия упругой трехслойной пластины в обобщенных усилиях приведена в [4]. Подставив в нее обобщенные усилия типа (4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия для определения искомых функций в рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3 \psi = 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \end{aligned} \quad (5)$$

где дифференциальные операторы  $L_2$  (оператор Бесселя),  $L_3$

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате; коэффициенты  $a_i$  выражаются через геометрические и упругие параметры слоев.

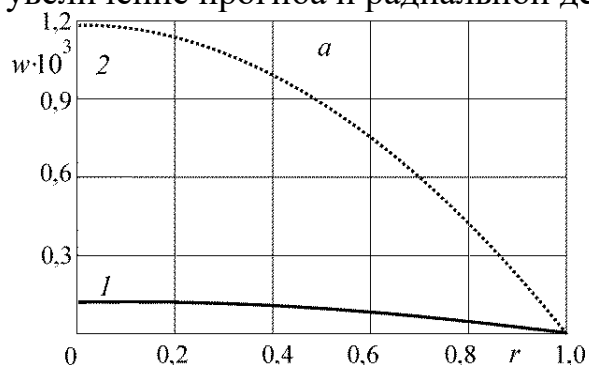
**2. Общее решение краевой задачи.** Общее аналитическое решение системы уравнений (5) будет следующим:

$$\begin{aligned} w = & \frac{b_2}{b_3} \left[ \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln r + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \right. \\ & \times \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \Big] - \\ & - \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(a-r) \left[ \frac{a^2}{r} - r + 2a (K_1(\beta a) I_1(\beta r) - I_1(\beta a) K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r} + \\ & + \frac{q_0}{b_3} \left( \frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left( \frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right) H_0(b-r) - \\ & - \frac{q_0}{b_3} \left( \frac{r^4 - 5a^4}{64} + \frac{a^2 r^2}{16} - \left( \frac{a^4}{16} + \frac{a^2 r^2}{8} \right) \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right) H_0(a-r) - \\ & - \frac{1}{4b_3} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Константы интегрирования  $C_1, C_2, \dots, C_8$  следуют из условий шарнирного опирания контура пластины и требований ограниченности решения (6) в ее центре.

*Численные результаты* получены для пластины единичного радиуса, материалы которой Д16Т–фторопласт–Д16Т. Принимались:  $B_1 =$

$B_2 = B_3 = 10^{23}$  м<sup>2</sup>/нейтрон, что обеспечивает объемную деформацию в слоях порядка 3–3,5 %. На рисунке 1 показано изменение вдоль радиуса прогиба  $w$  – (а) при интенсивностях нейтронных потоков (нейтрон / (м<sup>2</sup>с)): 1 –  $\varphi_1 = 10^{17}$ , 2 –  $\varphi_2 = 10^{18}$ . Силовая нагрузка отсутствует. Толщины слоев:  $h_1 = 0,02$ ;  $h_2 = 0,06$ ;  $h_3 = 0,4$ . Рост интенсивности потока на порядок вызывает примерно такое же увеличение прогиба и радиальной деформации.



**Рисунок 1. Прогиб  $w$  при нейтронном облучении**

**Выводы.** Полученное решение позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойных круговых пластин под действием локальных кольцевых нагрузок с учетом нейтронного облучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

### **Литература**

1. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Упругопластические деформации полых цилиндров / Москва, Изд-во МГУ, 1960, 224 с.
2. Платонов, П. А. Действие облучения на структуру и свойства металлов. Москва, Машиностроение, 1971, 40 с.
3. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
4. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p.
5. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
6. Старовойтов Э.И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376с.
7. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.

8. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, vol. 21, no. 2, pp. 162–169.
9. Leonenko D. V., Starovoitov E.I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367.
10. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol, 43, no. 2, pp. 145–152.
11. Леоненко Д.В., Маркова М.В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, 2023, т. 1, с. 49–63.
12. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, vol. 88, no. 4, pp. 1023-1029.
13. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // Механика машин, механизмов и материалов, 2013, т. 22, №., С. 31–35.
14. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций, 2018, т. 2, № 3, С. 392–406.
15. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 66–75.
16. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 152–157.
17. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Suleyman M. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads // Mechanics of Composite Materials. – 2007. Vol. 43, no. 1. – Pp. 75–84.



# ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА ПРИ МГНОВЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

Д.В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Трехслойные стержни, пластины и оболочки широко применяются в современных отраслях промышленности, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета [1]. Динамическое нагружение трехслойных стержней, в том числе и при терморadiационных воздействиях, исследовано в работах [2–4]. Здесь рассматриваются колебания трехслойного стержня, скрепленного с упругим основанием Винклера, возбужденные поверхностными мгновенными локальными и сосредоточенными нагрузками.

Стержень состоит из двух наружных несущих слоев и заполнителя. Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком сжимаемом заполнителе перемещения меняются линейно. К внешней поверхности первого несущего слоя приложены динамическая поверхностная импульсная нагрузка  $q(x, t)$ . На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция винклеровского основания  $q_r(x, t)$ . На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений.

Искомыми считаются прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв  $w_k(x, t)$  и  $u_k(x, t)$ , ( $k = 1, 2$ ), определяемые из системы движения:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 &= 0; \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_3 w_{1,x} - a_2 w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 &= 0; \\ a_{10} u_{1,x} - a_{17} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\ + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} &= q; \\ -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\ - a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_i$  и  $m_j$  – жесткостные и массовые коэффициенты стержня,  $\kappa_0$  – коэффициент постели упругого основания; запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате; две точки над перемещениями – вторую производную по времени.

Решение системы (1) проводится методом Бубнова –Галеркина. Для этого искомые перемещения  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  и нагрузку  $q(x, t)$  представляется в виде разложения в ряды:

$$u_1(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{1m}(x) T_{m1}(t), \quad u_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{2m} T_{m2}(t),$$

$$w_1(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{3m} T_{m3}(t), \quad w_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{4m} T_{m4}(t), \quad q(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{5m} q_m(t),$$

где  $q_m(t)$  – коэффициенты разложения нагрузки в ряд,  $\psi_{im}$  – базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи ( $i = 1 \dots 5$ ),  $T_{mi}(t)$  – функция времени.

Рассмотрены частные случаи импульсного воздействия: локальная равномерно-распределенная нагрузка, сосредоточенная сила и момент. Для каждого нагружения определены параметры разложения  $q_m(t)$ . Проведен численный анализ.

Таким образом, в работе поставлена и решена задача о вынужденных колебаниях трехслойного стержня, скреплённого с упругим основанием Винклера при действии импульсного локального нагружения. Численный анализ показал, что импульсная нагрузка и очень жесткое основание в совокупности могут оказывать серьезное влияние на напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня.

### Литература

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин Ю.Н. Новичков. – Москва: «Машиностроение», 1980. – 375 с.
2. Старовойтов, Э. И. Трехслойные стержни в терморadiационных полях / Э. И. Старовойтов, М. А. Журавков, Д. В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 276 с.
3. Старовойтов, Э.И. трехслойного стержня в температурном поле/ Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко. // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
4. Starovoitov, É.I. Dynamics of three-layer bars / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2006. – Vol. 41, no. 7. – Pp. 668–679.

# ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

А.В. Яровая

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Актуальность разработки новых математических моделей для исследования упругого деформирования композитных стержней, пластин и оболочек при термосиловых нагрузках, определяется их повсеместным распространением в машиностроении и строительстве. В монографиях [1–7] разрабатываются общие подходы к созданию механико-математических моделей деформирования слоистых упругих и неупругих элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. Приведены постановки соответствующих краевых задач, рассмотрены примеры решения и их численная апробация. Статьи [8–10] посвящены исследованию динамического поведения трехслойных цилиндрических оболочек и пластин. Деформирование трехслойных стержней в температурном поле исследовано в [11–14]. Изгибу трехслойных пластин, в том числе связанных с упругим основанием, посвящены работы [15–17].

Предлагаемая работа отличается учетом воздействия температуры на деформирование трехслойной пластины локальной кольцевой нагрузкой.

**1. Постановка краевой задачи.** Рассматривается трехслойная несимметричная по толщине круглая пластина (рисунок 1), нагруженная равномерно распределенной кольцевой нагрузкой постоянной интенсивности  $q_0$ :

$$q = q_0(H_0(b-r) - H_0(a-r)), \quad (1)$$

где  $H_0(r)$  функция Хэвисайда.

Все линейные перемещения, размеры и радиальная координата отнесены к радиусу пластины  $r_0$ . Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью заполнителя. Для тонких несущих слоев, толщины которых  $h_1 \neq h_2$ , принимаются гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом жестком заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r)$ . На внешнюю поверхность пластины падает тепловой поток, интенсивность которого  $q_t$ . Нижняя поверхность  $z = -c - h_2$  и контур  $r = 1$  теплоизолированные. Температурное поле  $T(z)$  в пластине определено в [1].

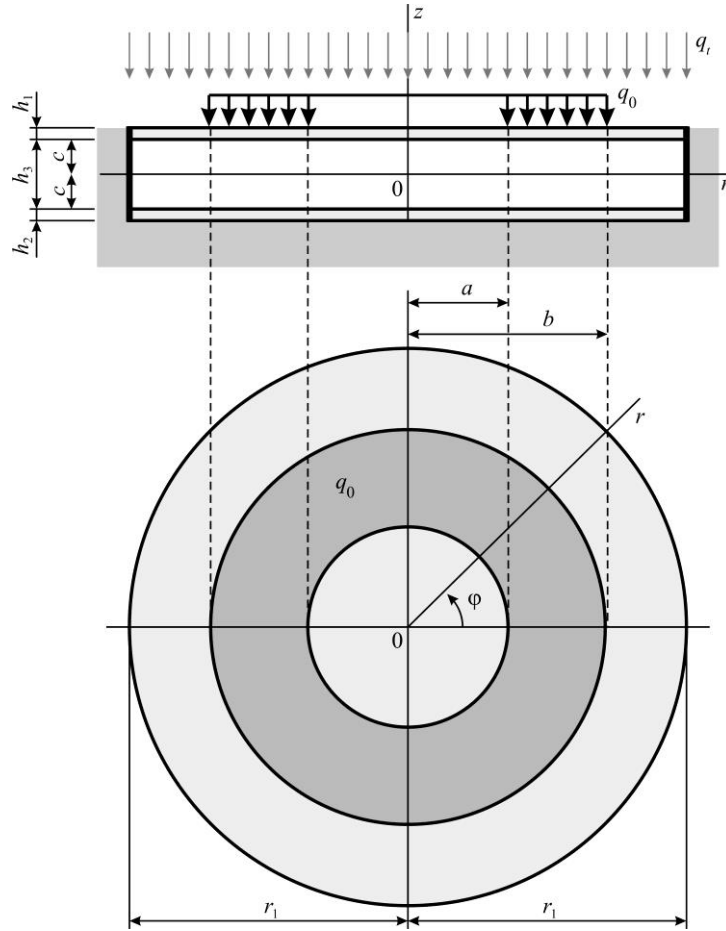


Рисунок 1. Схема нагружения пластины кольцевой нагрузкой

Нагрузка принята осесимметричной, поэтому окружные перемещения отсутствуют  $u_\varphi^{(k)} = 0$ , а искомые функции – радиальное перемещение срединной плоскости заполнителя  $u$ , относительный сдвиг  $\psi$  и прогиб пластины  $w$  зависят только от радиальной координаты и не зависят от  $\varphi$ . На контуре жесткая диафрагма препятствует относительному сдвигу слоев ( $\psi = 0$  при  $r = 1$ ).

Радиальные перемещения, в силу принятых гипотез, изменяются по толщине слоев линейно, деформации следуют из перемещений и соотношений Коши [2]. С Напряжения вычисляются с помощью закона Гука. Обобщенные внутренние усилия вводятся соотношениями:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz, \quad (2)$$

где  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ),  $\sigma_{rz}^{(3)}$  – напряжения в слоях пластины.

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины [1] в нашем случае кольцевой нагрузки (1) принимают вид

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = -p, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2c G_3 \psi = 0,$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) = q_0(H_0(b-r) - H_0(a-r)), \quad (3)$$

где запятая в индексе обозначает производную по следующей за ней координате;  $a_i$  – коэффициенты, определяемые через модули упругости и толщины слоев при температуре  $T$ ;  $L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Для замыкания краевой задачи к уравнениям (3) необходимо добавить условия ограниченности решения в центре пластины и граничные условия на контуре. При шарнирном опирании должны выполняться требования

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = 0, \quad \text{при } r = 1, \quad (4)$$

где  $M_r$  – обобщенный изгибающий момент, введенный в (2).

**2. Аналитическое решение краевой задачи.** Общее решение системы уравнений (3) при изотермическом упругом деформировании пластины кольцевой локальной нагрузкой известно [1]. В случае воздействия теплового потока прогиб принимает вид

$$\begin{aligned} w = & \frac{b_2}{b_3} \left\{ \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \right. \\ & \times \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] - \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} \times \\ & \times H_0(a-r) \left[ \frac{a^2 - r^2}{2} + a^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{2a}{\beta} (K_1(\beta a) I_0(\beta r) + I_1(\beta a) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \Bigg\} + \\ & + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_0(H_0(b-r) - H_0(a-r))) dr - \frac{C_1}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4, \end{aligned}$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_8$  – константы интегрирования;  $L_3^{-1}$  – интегральный оператор  $L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int_r^1 \int_r^1 \int_r^1 r f(r) dr dr dr$ .

При шарнирно опертом контуре константы интегрирования следуют из (4), при этом  $C_4, C_5, C_7$  содержат температуру в явном виде.

**3. Численные результаты** получены для пластины Д16-Т–фторопласт-4–Д16-Т. Интенсивность нагрузки  $q_0 = 1 \cdot \text{МПа}$ , толщины слоев –  $h_1 = 0,02$ ;  $h_2 = 0,06$ ;  $h_3 = 0,4$ . Параметры материалов приведены в [1]. Зависимость модулей упругости от температуры описывается формулой Белла [1]. На рисунке 2 а, б показано изменение относительного сдвига и прогиба пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при различных радиусах пятна локальной равномерно распределенной нагрузки ( $a = 0$ ): 1–

$b = 0,5$ ;  $2 - b = 0,75$ ; без штриха –  $T_1 = 293$  К, со штрихом –  $T_2 = 323$  К. С увеличением площади нагрузки экстремум на рисунке 3 *a* сдвигается к контуру пластины. При нагревании пластины прогибы и сдвиги увеличиваются пропорционально.

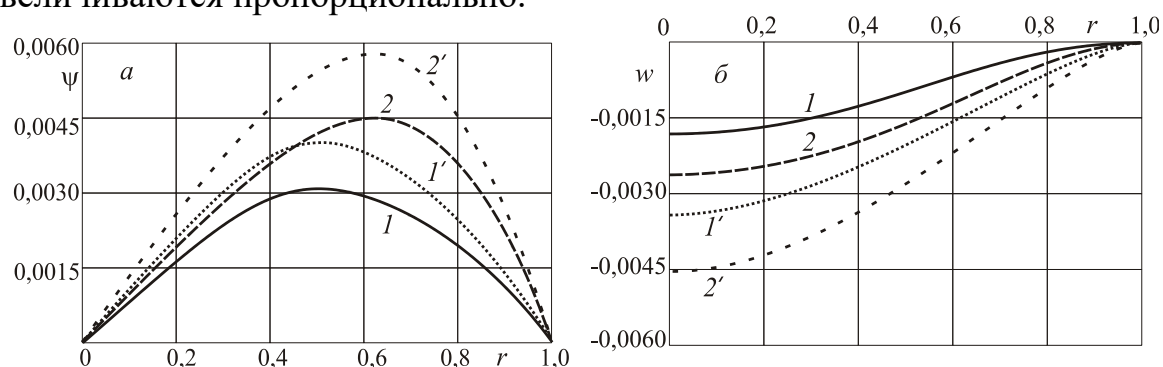


Рисунок 2. Перемещения при различных радиусах пятна нагрузки

**Заключение.** Предложенная методика позволяет строить аналитическое решение об изгибе трехслойных упругих пластин при локальных кольцевых нагрузках в нестационарном температурном поле. Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

### Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005, 576 с.
2. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / УО БелГУТ Гомель, 2013.
3. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
4. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p.
5. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376с.
6. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
7. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.
8. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем //

Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, Т. 21, №. 2. С. 162–169.

9. Leonenko D. V., Starovoitov E.I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads // International Applied Mechanics. 2016. Vol. 52, no. 4, pp. 359–367.

10. Gorshkov A.G. Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Vibrations of a Circular Linear-Viscoelastic Three-Layered Plate // Strength of materials, 2001, vol. 33, no 3, pp. 270–276.

11. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, vol. 88, no. 4, pp. 1023-1029.

12. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // Механика машин, механизмов и материалов, 2013, т. 22, №., С. 31–35.

13. Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Вязкоупругопластический трехслойный стержень при термосиловых нагрузках // Изв. РАН, Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 109–116.

14. Яровая А.В. Термоупругопластический изгиб трехслойного стержня в условиях абляции // Материалы, технологии, инструменты, 2000, т. 5, № 3, с. 23-25.

15. Yarovaya, A.V. Thermoelastic bending of a sandwich plate on a deformable foundation // International Applied Mechanics, 2006, vol. 42, no. 2, pp. 206-213.

16. Yarovaya A.V Deformation of layered structural elements in a temperature-radiation field // Strength of Materials, 2004, vol. 36, no. 6, с. 630-635.

17. Яровая А.В. Перемещения в трехслойной ортотропной пластине с усиливающей накладкой // Механика. Исследования и инновации, 2017, т. 10, № 10, с. 224-232.



# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ

Е.А. Лачугина

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Возросший спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в машиностроении обуславливает необходимость разработки соответствующих математических моделей и методов расчета. Этой проблеме посвящены монографии [1–6]. Динамическое нагружение неоднородных цилиндрических оболочек исследовано в работах [7, 8]. Квазистатическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле рассмотрено в статьях [9, 10]. Решения отдельные краевых задач для слоистых пластин приведены в работах [11–14].

Уравнения движения круговой пятислойной симметричной пластины получены в [15–17]. Здесь рассматривается задача о собственных колебаниях пятислойной круговой пластины несимметричной по толщине.

**Постановка и решение краевой задачи.** Тонкие несущие слои пластины толщиной  $h_1, h_2, h_4$  выполнены из прочных материалов, для них справедливы гипотезы Кирхгофа. В более толстых заполнителях ( $h_3, h_5$ ) справедлива гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированных нормалей, которые поворачиваются на некоторые дополнительные углы  $\psi_i(r, t)$  – относительные сдвиги ( $i = 1, 2$ ). Цилиндрическая система координат связывается со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя, ось  $z$  направлена перпендикулярно вверх, к четвертому слою. Все геометрические размеры пластины отнесены к ее радиусу  $r_0$ .

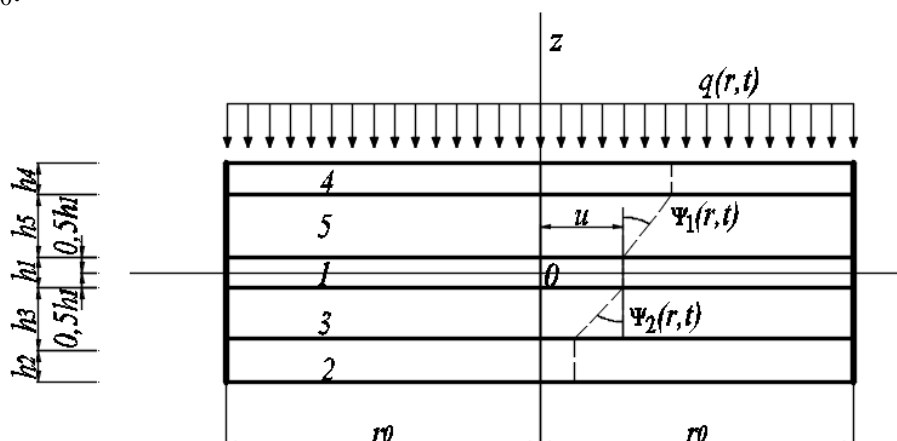


Рисунок 1. Расчётная схема пятислойной круговой пластины

Система дифференциальных уравнений движения в перемещениях,

описывающая собственные колебания, получена при помощи вариационного принципа Лагранжа с учетом сил инерции поперечных колебаний:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \psi_1 - a_4 \psi_2) &= 0, \\ L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \psi_1) &= 0, \\ L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \psi_2) &= 0, \\ L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_{10} \psi_1 + a_{11} \psi_2) - M_0 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $M_0 \ddot{w}$  – инерционные силы;  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) r_0^2$ ; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате;  $a_i$  – коэффициенты, выражаемые через упругие и геометрические параметры слоев [17],  $L_2, L_3$  – линейные дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Начальные условия движения принимаем однородными:

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = \dot{w} = 0, \text{ при } t = 0. \quad (2)$$

Кинематические условия заделки контура пластины следующие:

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0, \text{ при } r = r_0. \quad (3)$$

После элементарных преобразований, связанных с выделением уравнения для прогиба пластины  $w$ , систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \\ \psi_1 &= b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ \psi_2 &= b_3 w_{,r} + C_5 r + C_6 / r, \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты  $b_i$  выражаются через  $a_i$ ;

$$M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_6 a_8 b_4}{b_4 b_7 - b_5 b_6}.$$

Так как искомое решение ограничено в начале координат, то для сплошных пластин необходимо обнулить константы интегрирования  $C_2 = C_4 = C_6 = 0$ . Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (5)$$

где  $v(r)$  – искомая координатная функция;  $\omega$  – частота собственных колебаний;  $A$  и  $B$  – константы, определяемые из начальных условий (2).

После подстановки выражения (5) в последнее уравнение системы (4)

получим уравнение для определения координатной функции  $v(r)$ :

$$L_3(v, r) - \beta^4 v = 0, \quad \beta^4 = M^4 \omega^2. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) известно:

$$v(\beta r) = C_7 J_0(\beta r) + C_8 I_0(\beta r) + C_9 Y_0(\beta r) + C_{10} K_0(\beta r). \quad (7)$$

где  $J_0, I_0, K_0, Y_0$  – функции Бесселя, Макдональда и Неймана.

Исходя из ограниченности перемещений в начале координат необходимо в (7) положить  $C_9 = C_{10} = 0$ . Подставив затем (7) в граничные условия (3), получим однородную систему алгебраических уравнений для определения констант интегрирования  $C_7, C_8$ . Из которой следует трансцендентное уравнение для собственных чисел  $\beta_n$ :

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0.$$

После вычисления  $\beta_n$  частоты собственных колебаний следуют из соотношения, введенного в (6):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}.$$

**2 Численные результаты.** За расчетную модель принята пластина, слои которой набраны из материалов кордиерит – пенополиуретан – титан – пенополиуретан – титан. Толщины несущих слоев и заполнителей, отнесенные к радиусу пластины  $r_0$ , следующие:  $h_4 = 0,02$ ,  $h_5 = 0,3$ ,  $h_1 = 0,04$ ,  $h_3 = 0,4$ ,  $h_2 = 0,03$ . Упругие характеристики этих материалов приведены в [1]. В табл. 1 приведены собственные числа и собственные частоты.

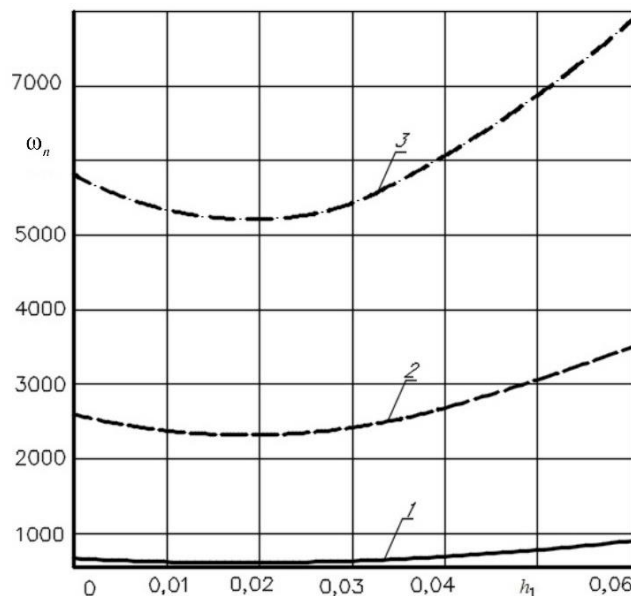
Таблица 1.

**Таблица 1. Собственные числа и собственные частоты пятислойной пластины**

Номер $n$	$\beta_n/\omega_n$	Номер $n$	$\beta_n/\omega_n$
0	3,196 / 689,720	8	28,279 / 53999,221
1	6,306 / 2685,143	9	31,378 / 66482,894
2	9,439 / 6016,049	10	34,561 / 80655,131
3	12,577 / 10681,040	11	37,702 / 95981,643
4	15,716 / 16677,980	12	40,844 / 112646,042
5	18,857 / 24010,688	13	43,985 / 130637,720
6	21,997 / 32672,797	14	47,126 / 149961,770
7	25,138 / 42669,823		

Рисунок 2 иллюстрирует зависимость первых трех частот собственных колебаний  $\omega_n$  от толщины внутреннего несущего слоя  $h_1$ : 1 –

$\omega_0$ ; 2 –  $\omega_1$ ; 3 –  $\omega_2$ . С увеличением номера собственных частот колебаний растет нелинейность их зависимости от величины  $h_1$ .



**Рисунок 2. Собственные частоты колебаний**

**Закключение.** Предложенная постановка начально-краевой задачи и ее решение позволяет исследовать собственные частоты и формы колебаний круговых пятислойных пластин, несимметричных по толщине.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

### Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005, 576 с.
2. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p. doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5
4. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
5. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376 с.
6. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.

7. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, vol. 21, No. 2, pp. 162–169.
8. Suvorov YeM, Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2012, vol. 76, no. 5, pp.511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.
9. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, vol. 88, No. 4, pp. 1023–1029.
10. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // Механика машин, механизмов и материалов, 2013, т. 22, №., С. 31–35.
11. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций, 2018, т. 2, № 3, С. 392–406.
12. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 66–75.
13. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 152–157.
14. Салицкий, В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 2023, вып. 38, с. 234 – 239.
15. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.
16. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины // Теоретическая и прикладная механика. Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227-233.
17. Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

# ЛОКАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ КРУГЛОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

В.С. Салицкий

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Необходимость разработки математических моделей деформирования слоистых элементов конструкций обусловлена их широким применением в машиностроении и строительстве. Методы расчета и постановки задач для слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–6]. Динамическое нагружение слоистых оболочек и пятислойных пластин исследовано в работах [7–11]. Квазистатическому деформированию трехслойных стержней и пластин посвящены публикации [12–16].

Решение задачи об изгибе пятислойной круговой пластины равномерно распределенной нагрузкой приведено в [17–19]. Здесь исследован изгиб пятислойной пластины локальной круговой нагрузкой.

**1 Постановка краевой задачи.** Рассматривается симметричная по толщине пятислойная круговая пластина, деформируемая равномерно распределенной по кругу относительного радиуса  $r \leq b$  нагрузкой (рисунок 1):

$$q(r) = q_0 H_0(b - r), \quad (1)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хэвисайда;  $q_0$  – интенсивность распределенной нагрузки.

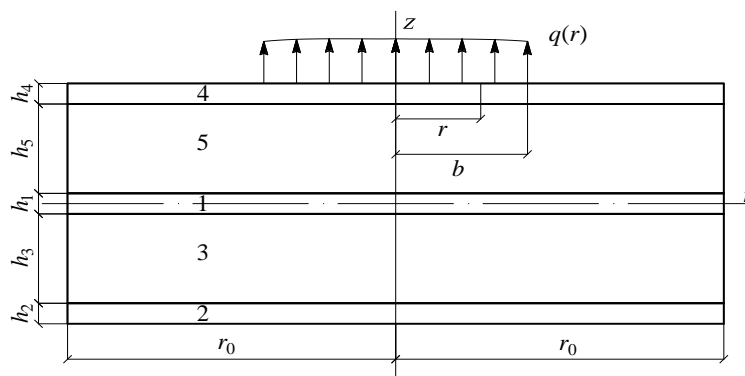


Рисунок 1. Расчётная схема пятислойной круговой пластины

В тонких несущих слоях толщиной  $h_1$ ,  $h_2 = h_4$  справедливы гипотезы Кирхгофа, в более толстых заполнителях ( $h_3 = h_5$ ) – гипотеза Тимошенко. Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя. Все геометрические размеры пластины отнесены к ее радиусу  $r_0$ . Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях получена в [18] при равномерно

распределенной нагрузке. В случае нагрузки (1) она принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q_0H_0(b-r), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $w$  – прогиб,  $\psi$  – относительный сдвиг в заполнителях; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; коэффициенты  $a_i$  выражаются через геометрические и упругие характеристики слоев;  $L_2, L_3$  – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

К системе уравнений (2) необходимо добавить граничные условия. Например, при заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (3)$$

**2 Решение краевой задачи.** После элементарных преобразований систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} L_2(\psi) - \beta^2\psi &= f, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q_0H_0(b-r), \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты и функция, входящие в первое уравнение

$$\beta^2 = \frac{2a_6h_3G_3}{(a_4a_6 - a_5^2)}, \quad \gamma_1 = \frac{a_5}{(a_4a_6 - a_5^2)},$$

$$f(r) = \frac{a_5}{r(a_4a_6 - a_5^2)} \left( \int q_0H_0(b-r)rdr + C_1 \right) = \frac{\gamma_1}{r} \left( \frac{q_0(r^2 - b^2)}{2} H_0(b-r) + C_1 \right).$$

Решение системы дифференциальных уравнений (4) будет

$$\psi = C_2I_1(\beta r) + C_3K_1(\beta r) + \psi_r,$$

$$w = \frac{a_5}{a_6} \int \psi dr + \frac{q_0}{a_6} \int L_3^{-1}(H_0(b-r))dr - \frac{C_1}{4a_6} r^2(\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4a_6} + C_6 \ln r + C_4, \quad (5)$$

где  $I_1(\beta r)$  – модифицированная функция Бесселя;  $K_1(\beta r)$  – функция Макдональда; интегралы берутся в пределах от 0 до  $r$ ;  $L_3^{-1}$  – интегральный оператор, обратный соответствующему дифференциальному оператору в (2).

Частное решение первого из уравнений системы (4)  $\psi_r$  будет

$$\psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[ \frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}. \quad (6)$$

Интегралы, входящие во второе уравнение системы (5) будут

$$\int L_3^{-1}(q) dr = q_0 \left( \frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln \left( \frac{r}{b} \right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r),$$

$$\int \psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times$$

$$\times \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right]. \quad (7)$$

После определения констант интегрирования  $C_1, \dots, C_6$  из условий (3), прогиб и сдвиг (5) для пластины, заделанной по контуру, с учетом соотношений (6), (7) принимает следующий конечный вид:

$$w = \frac{a_5}{a_6} \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left\{ \frac{I_0(\beta r)}{\beta I_1(\beta)} \left( \frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right) - \frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2\beta^2 I_1(\beta)} + \frac{b I_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)} - \frac{b I_1(\beta b) K_0(\beta r)}{\beta} - \right.$$

$$\left. - \frac{b^2}{2} \ln(r) \frac{H_0(b-r)}{2} \left[ \frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{q_0}{8a_6} \left\{ \left( \frac{r^4 - 5b^4}{8} - \frac{b^4}{2} \ln \left( \frac{r}{b} \right) - b^2 r^2 \ln \left( \frac{r}{b} \right) + \frac{b^2 r^2}{2} \right) H_0(b-r) + \right.$$

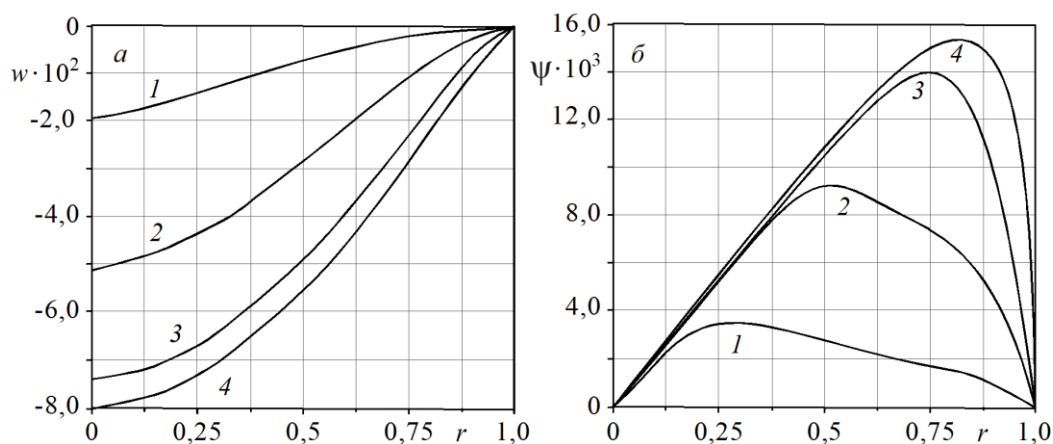
$$\left. + b^2 r^2 (\ln r - 1) + \frac{b^2}{4} r^2 (2 - b^2) + \frac{b^4}{2} \ln r + \frac{b^4}{4a_6} + \frac{b^2}{2a_6} \right\},$$

$$\psi = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} \left\{ \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} \left( \frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right) + b I_1(\beta b) K_1(\beta r) + \right.$$

$$\left. + \frac{H_0(b-r)}{2} \left[ \frac{b^2}{r} - r + 2b (K_1(\beta b) I_1(\beta r) - I_1(\beta b) K_1(\beta r)) \right] - \frac{b^2}{2r} \right\}.$$

**3 Численные результаты** получены для пластины, слои которой набраны из материалов Д16-Т – фторопласт – Д16-Т – фторопласт – Д16-Т. Толщины слоев  $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$ ,  $h_3 = h_5 = 0,1$ ; величина нагрузки  $q_0 = 10$  МПа. Рис. 2 а, б иллюстрирует изменение прогиба и относительного сдвига вдоль радиуса пластины при различных радиусах  $b$  пятна нагрузки: 1 –  $b = 0,25$ ; 2 –  $b = 0,5$ ; 3 –  $b = 0,75$ ; 4 –  $b = 1$ . При увеличении радиуса нагрузки перемещения растут нелинейно. При этом экстремум относительного сдвига (б) сдвигается к контуру пластины.





**Рисунок 2. Перемещения в пятислойной пластине**

**Закключение.** Предложенное в работе решение позволяет моделировать напряженно-деформированное состояния круговых пятислойных пластин при локальных поверхностных нагрузках.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

### **Литература**

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2005, 576 с.
2. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p.
4. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
5. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376 с.
6. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.
7. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, Т. 21, № 2. С. 162–169.
8. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol, 43, no. 2, pp. 145–152.

9. Leonenko D. V., Starovoitov E.I. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads // *International Applied Mechanics*. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367.
10. Лачугина Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями // *Механика. Исследования и инновации*, 2022, вып. 15, с. 212–219.
11. Лачугина Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины // *Теоретическая и прикладная механика*, Минск, БНТУ, 2023, вып. 38, с. 227-233.
12. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, vol. 88, No. 4, pp. 1023-1029.
13. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // *Механика машин, механизмов и материалов*, 2013, т. 22, №., С. 31–35.
14. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2018, т. 2, № 3, С. 392–406.
15. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. // *Механика. Исследования и инновации*, 2019, т. 12, № 12, с. 66–75.
16. Нестерович А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости // *Механика. Исследования и инновации*, 2019, т. 12, № 12, с. 152–157.
17. Салицкий В.С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях // *Мат. XXVII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова*, 2021, т. 1, с. 199–201.
18. Салицкий В.С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины // *Механика. Исследования и инновации*, 2022, т. 15, № 15, с. 209–213.
19. Салицкий В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины // *Теоретическая и прикладная механика*. Минск, 2023, вып. 38, с. 234 – 239.

# УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ БАЛКИ СИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ

К.В. Суслов

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

В настоящее время многослойные конструкции активно применяются в различных областях промышленности. Методы расчета и постановки краевых задач для трехслойных элементов конструкций исследованы в монографиях [1–5]. Деформирование трехслойных стержней и пластин рассмотрено в работах [6–12]. Пятислойные пластины исследованы в статьях [13–17]. Колебаниях пятислойной круговой пластины несимметричной по толщине.

**Постановка задачи.** Рассматривается упругая пятислойная балка, симметричная по толщине, состоящая из трех несущих слоев (внешние и центральный) и двух заполнителей. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в заполнителях – гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости нормали, которая поворачивается на дополнительный угол  $\psi(x)$ . Постановка начально-краевой задачи приведена в декартовой системе координат, связанной со срединной плоскостью центрального несущего слоя толщиной  $h_1$  (рисунок 1). Искомые функции являются прогиб стержня  $w(x)$  и относительный сдвиг  $\psi(x)$  в заполнителях. На торцах балки ( $x=0; l$ ) предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ( $\psi=0$ ).

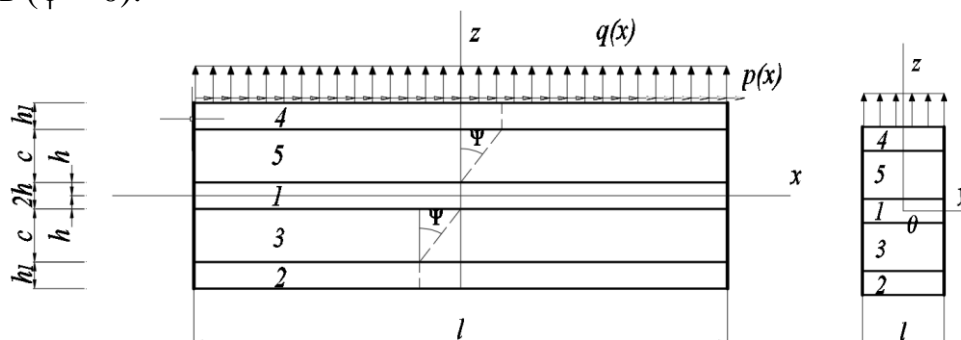


Рисунок 1. Расчётная схема пятислойной балки

Системы уравнений равновесия получены при использовании принципа возможных перемещений Лагранжа, при этом учитывалась работа касательных напряжений  $\tau_{xz}$  в заполнителях:

$$\begin{aligned} a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} - a_3 \psi &= 0, \\ a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q. \end{aligned}$$

где  $a_i$  – коэффициенты

$$a_1 = \left[ c^2 \left( \frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right]; \quad a_2 = \left[ \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right];$$
$$a_3 = \left[ 2G^{(3)} c \right]; \quad a_4 = \left[ \frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right]; \quad K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+;$$

$G_k, K_k$  – модули сдвига и объемного деформирования материала  $k$ -го слоя.

**Заключение.** Полученные уравнения равновесия позволяют исследовать изгиб симметричных по толщине пятислойных стержней.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

### Литература

1. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела // М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов – Минск: БГУ, 2021 – 535 с.
2. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body // М.А. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов // Э.И. Старовойтов – Гомель, БелГУТ, 2004, 376 с.
4. Старовойтов, Э. И. Механика материалов // Э.И. Старовойтов – Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.
5. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях // А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023 – 381 с.
6. Starovoitov, É.I. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / E.I. Starovoitov, Yu.M. Pleskachevskii, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovskii // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, №4. – P. 1023-1029.
7. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.
8. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.
9. Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – Вып. 16. – С. 111–116.

# ТЕРМОСИЛОВОЙ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю.В. Шафиева

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Разработке математических моделей деформирования трехслойных элементов конструкций в связи с их повсеместным распространением в машиностроении и строительстве, посвящен ряд публикаций. Постановки и методики решения краевых задач о деформировании слоистых элементов конструкций приведены в монографиях [1–6]. Исследование свободных и вынужденных колебаний трехслойных и неоднородных цилиндрических оболочек и пластин проведено в статьях [7–8]. Публикации [9–12] посвящены квазистатическому изотермическому и термосиловому нагружению трехслойных стержней и пластин с несжимаемым заполнителем.

Предлагаемая работа отличается от проведенных ранее исследований [13–18] учетом воздействия температурного поля на деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Рассматриваемая круговая трехслойная несимметричная по толщине пластина со сжимаемым заполнителем (рисунок 1) находится под действием распределенной нагрузки  $q = q(r)$  и теплового потока  $q_t$ . Цилиндрическая система координат связана со срединной плоскостью заполнителя. В тонких внешних несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В легком заполнителе нормаль остается прямолинейной, но поворачивается на дополнительный угол  $\psi(r, t)$ . Обжатие по толщине принимается линейным.

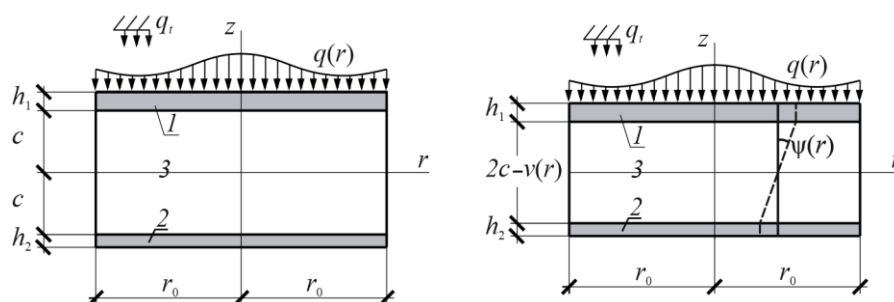


Рисунок 1. Расчетная схема пластины со сжимаемым заполнителем

На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя. Через  $w(r)$  и  $u(r)$  обозначены прогиб и радиальное перемещение срединной

плоскости заполнителя,  $v(r, t)$  – функция обжата заполнителя. Температурное поле  $T(z)$  изменяется по толщине пластины во времени  $t$  в соответствии с формулой [1]:

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

где  $\tau = at / H^2$ ;  $s = z / H$ ;  $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k / H$ ;  $H = h_1 + h_2 + h_3$ ,  $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k / H$ ;

$a = \lambda / C$ ; коэффициенты:  $\lambda_k$  – теплопроводности,  $C_k$  теплоемкости;  $\rho_k$  – плотность материала;  $k = 1, 2, 3$  – здесь и далее номер слоя;  $h_1 \neq h_2$  – толщины несущих слоев,  $h_3 = 2c$  – толщина заполнителя.

В силу осесимметричности нагрузки, окружные перемещения отсутствуют, а искомые величины –  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$ ,  $v(r)$  не зависят от координаты  $\phi$ . Радиальные перемещения  $u^{(k)}(r, z)$  и прогибы  $w^{(k)}(r, z)$  в  $k$ -ом слое выражаются через эти четыре искомые функции [16].

Для связи напряжений и деформаций используются термоупругие соотношения закона Гука в девиаторно-сферической форме:

$$s_{\alpha}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \left( \varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k \right),$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad s_z^{(3)} = 2G_3 \vartheta_z^{(3)}, \quad \sigma^{(3)} = 3K_3 \left( \varepsilon^{(3)} - \alpha_{03} T_3 \right), \quad (2)$$

где  $s_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\vartheta_{\alpha}^{(k)}$  – девиаторные ( $\alpha = r, \phi$ ) и  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – сферические части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k(T_k)$ ,  $K_k(T_k)$  – модули сдвига и объемного деформирования,  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения.

С помощью вариационного принципа Лагранжа и закона Гука (2) в [17–19] получена система уравнений равновесия:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} = 0,$$

$$L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) = 0,$$

$$L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) = -q,$$

$$L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{6} K_3^- \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) = -q,$$

где запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате;  $a_i$  – коэффициенты, выражаемые через упругие и геометрические параметры слоев,  $L_2, L_3$  – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left[ K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2); \quad K_k^- = K_k(T_k) - \frac{2}{3} G_k(T_k).$$

Краевая задача замыкается добавлением к уравнениям равновесия (3) граничных условий на контуре и условий ограниченности решения в центре пластины, например при шарнирном опирании контура

$$u = \psi = w = v = v_{,rr} = 0, \quad M_r = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0. \quad (4)$$

Из системы (3) для прогиба и функции обжатия следуют выражения:

$$w = \frac{a_2 a_6 - a_3 a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int u dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v - \frac{a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_3^{-1}(q) dr +$$

$$+ \frac{C_1 a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + C_{10} \frac{r^2}{4} + C_{11} \ln r + C_{12},$$

$$v = -\frac{C_7}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta} Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2} \left( \int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1(r) r dr dr - \right.$$

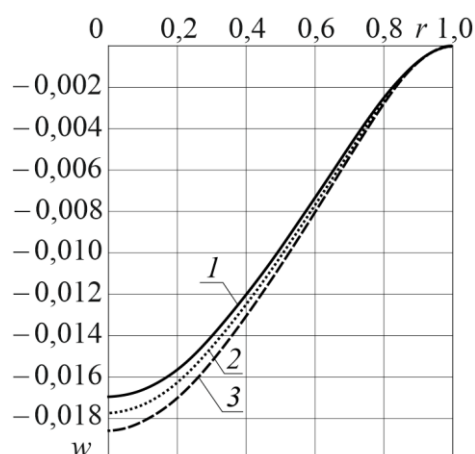
$$\left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1(r) r dr dr \right) + C_9,$$

где  $C_i$  – константы интегрирования.

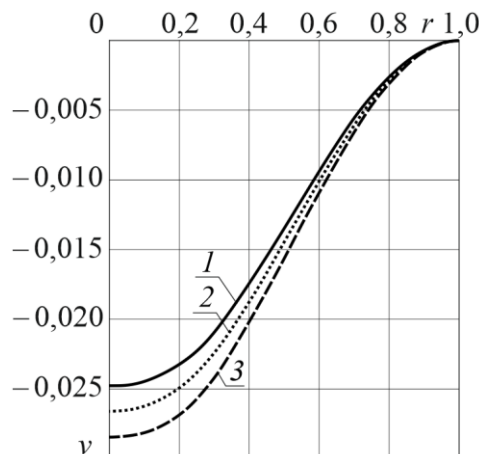
В случае шарнирного опирания контура константы определяются из граничных условий (4) и включают температуру (1) в явном виде. Зависимость параметров материалов от температуры рассчитывается по формуле Белла [1].

Численные результаты получены для пластины со слоями, выполненными из материалов Д16-Т-фторопласт-4–Д16-Т, механические характеристики которых приведены в [1]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу пластины,  $c = 0,23$ ,  $h_1 = 0,03$ ,  $h_2 = 0,03$ . Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q = 1$  МПа. Температура в пластине принималась усредненной.

На рис. 3. 4 показано изменение прогиба нижнего слоя  $w(r)$  и функции сжимаемости  $v(r)$  при различных температурах: 1 – 293 К, 2 – 353 К, 3 – 413 К. Рост температуры на 60 градусов приводит каждый раз к увеличению прогиба на 5,0 %, обжатия заполнителя – на 7,5%.



**Рисунок 2. Прогиб пластины**



**Рисунок 3. Функция обжатия**

**Заключение.** Приведенные постановка и аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние круговой несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым легким заполнителем в температурном поле.

*Работа выполнена при финансовой ГПНИ «Конвергенция-25».*

### Литература

1. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела / Минск, БГУ, 2021, 535 с.
2. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / УО БелГУТ Гомель, 2013.
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. Mechanics of Solid Deformable Body / Singapore, Springer, 2023, 317 p. doi.org/10.1007/978-981-19-8410-5
4. Абдусаттаров А., Старовойтов Э.И., Рузиева Н.Б. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023, 381 с.
5. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов / Гомель, БелГУТ, 2004, 376 с.
6. Старовойтов, Э. И. Механика материалов / Гомель, БелГУТ, 2011, 380 с.
7. Tarlakovskii DV, Fedotenkov GV. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, vol, 43, no. 2, pp. 145–152.
8. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем //



Механика композиционных материалов и конструкций. 2015, Т. 21, № 2, С. 162–169.

9. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, vol. 88, No. 4, pp. 1023–1029.

10. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // Механика машин, механизмов и материалов, 2013, т. 22, №., С. 31–35.

11. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака // Механика композиционных материалов и конструкций, 2018, т. 2, № 3, С. 392–406.

12. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости // Механика. Исследования и инновации, 2019, т. 12, № 12, с. 152–157.

13. Захарчук Ю.В. Перемещения в упругой круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем // Теоретическая и прикладная механика. Минск, БНТУ, 2020, вып. 34, с. 61–69.

14. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций, 2020, Т. 26, № 1, с. 58–73.

15. Starovoitov E.I., Zakharchuk Y.V., Kuznetsova E.L. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load // Journal of the Balkan Tribological Association, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 175–188.

16. Захарчук Ю.В. Упругое деформирование круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем осесимметричными нагрузками // Теоретическая и прикладная механика. Минск, БНТУ, 2022, вып. 36, с. 34–41.

17. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем // Механика машин, механизмов и материалов, 2019, т. 48, № 3, с. 26–33.

18. Захарчук Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем // Механика. Исследования и инновации, 2019, № 12, с. 66–75.

# УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛИНЕЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ

А.В. Черняк

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

При работе трехслойных конструкций, содержащих жесткие и прочные внешние несущие слои и менее жесткий срединный заполнитель, отмечаются хорошие прочностные и жесткостные показатели при минимуме их весовых характеристик. Поэтому очевидна потребность в разработке эффективных методов расчета НДС данного типа конструкций.

Деформирование и колебания трехслойных конструкций было исследовано в ряде работ. Так, например, монографии [1–4] посвящены разработке математических моделей статического и динамического деформирования трехслойных элементов конструкций со слоями постоянной толщины. В статьях [5–9] рассматривалось деформирование трехслойных стержней и оболочек при квазистатических нагрузках. Работы [10, 11] посвящены статике трехслойных пластин со слоями переменной толщины.

Здесь приведены уравнения равновесия для трехслойной круговой пластины с несущими слоями, линейно изменяющимися по толщине

$$h_1 = h_2 = h_0(1 - r/2r_0).$$

Задача решается в цилиндрической системе координат. Для тонких несущих слоев толщиной  $h_1 = h_2$  принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя  $h_3 = 2c$ , воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Перпендикулярно внешнему слою действует распределенная нагрузка  $q = q(r)$ . На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Искомыми перемещениями являются  $w$  – прогиб пластины,  $\psi$  – относительный сдвиг в заполнителе.

Система уравнений равновесия в обобщенных внутренних усилиях получена с использованием метода Лагранжа. Она имеет вид

$$a_4^+ \psi_{,rr} \left[ \frac{a_4^+}{r} - \frac{c^2 K_0^+ h_0}{r_0} \right] \psi_{,r} - \left[ \frac{a_4^+}{r} + \frac{c^2 K_0^- h_0}{r_0} \right] \frac{\psi}{r} - a_5^+ w_{,rrr} -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{a_5^+}{r} + \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{2r_0^2} - \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rr} + \\
& + \left[ \frac{a_5^+}{r} - \frac{ch_0^2 K_0^- r}{2r_0^2} + \frac{(ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^-}{r_0} \right] \frac{w_{,r}}{r} - 2cG_3 \psi = 0 \\
& a_5^+ \psi_{,rrr} + \left[ \frac{a_5^+}{r} - \frac{ch_0^2 K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] \psi_{,rr} - \\
& - \left[ \frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ + K_0^-) + \left( \frac{2ch_0^2 + 2c^2 h_0}{r_0 r} \right) \left( K_0^+ + \frac{K_0^-}{2} \right) \right] \psi_{,r} + \\
& + \left[ \frac{a_5^+}{r^2} - \frac{ch_0^2}{2r_0^2} (3K_0^+ - K_0^-) + \frac{3(2ch_0^2 + 2c^2 h_0) K_0^+}{2rr_0} \right] \frac{\psi}{r} - a_6^+ w_{,rrrr} - \\
& - \left[ \frac{2a_6^+}{r} - \frac{2h_0^3 K_0^+ r^2}{r_0^3} + \frac{(h_0^3 + ch_0^2) K_0^+ r}{r_0^2} - \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0} \right] w_{,rrr} + \\
& + \left[ \frac{a_6^+}{r^2} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left( \frac{5}{2} K_0^+ - K_0^- \right) - \left( \frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (2K_0^+ + K_0^-) + \right. \\
& + \left. \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) (K_0^+ + K_0^-)}{r_0 r} \right] w_{,rr} - \left[ \frac{a_6^+}{r^2} + \frac{h_0^3 r}{r_0^3} \left( 3K_0^+ - \frac{K_0^-}{2} \right) - \right. \\
& - \left. \left( \frac{h_0^3 + ch_0^2}{r_0^2} \right) (K_0^+ - K_0^-) + \frac{(h_0^3 + 2ch_0^2 + c^2 h_0) K_0^+}{r_0 r} \right] \frac{w_{,r}}{r} = -q.
\end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_i$  зависят от радиальной координаты  $r$  через толщину несущих слоев  $h_1$  и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
a_4^\pm &= c^2 \left( K_1^\pm h_1 + K_2^\pm h_2 + \frac{2}{3} K_3^\pm c \right), \\
a_5^\pm &= c \left( K_1^\pm h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^\pm h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^2 \right),
\end{aligned}$$

$$a_6^\pm = K_1^\pm h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^\pm h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^3,$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-.$$

Полученная система уравнений равновесия позволяет исследовать изгиб трехслойной пластины с линейно изменяющимися слоями.

### Литература

1. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела // М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов – Минск: БГУ, 2021 – 535 с.
2. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body // М.А. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
3. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях // А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023 – 381 с.
4. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – 21, № 2. – С. 162–169.
5. Starovoitov, É.I. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field / E.I. Starovoitov, Yu.M. Pleskachevskii, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovskii // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol. 88, N 4. – P. 1023-1029.
6. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.
7. Козел, А.Г. Сравнение решений задач изгиба трехслойных пластин на основаниях Винклера и Пастернака / А.Г. Козел // Механика машин, механизмов и материалов. 2021. № 1 (54). С. 30-37.
8. Нестерович А.В. Неосесимметричное нагружение трехслойной круговой пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 2020. – Вып. 35. – С. 266-272.
9. Яровая, А.В. Термоупругий изгиб трехслойной пластины на деформируемом основании / А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2006. – Т.42, № 2. – С.96–103

10. Черняк, А.В. Изгиб сэндвич-пластины с внешними слоями, линейно изменяющимися по толщине. / А.В. Черняк // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15 . – С. 235–240.

11. Черняк, А.В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины с переменными толщинами несущих слоев / А.В. Черняк // Проблемы безопасности на транспорте : матер. XII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж.д. : в 2 ч., Гомель, 24-25 ноября 2022 – Гомель : БелГУТ, 2022. – Ч. 2. – С. 269–271.

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Zhuravkov M.A.. About mechanical-mathematical models for computer systems of intelligent and smart analysis of geomechanical processes	5
2 Dongbao Yang, Lu Liu, Shunying Ji. Coupled SPH-DEM-FEM model for interaction between water, sea ice and marine structures	15
3 Konovalov O.L. Rmib method for modeling ship-ice interactions in broken and unbroken sea ice fields	22
4 Decai Huang. Asymmetric scattering effect of solitary wave in a two-section composite granular chain	31
5 Taranchuk V.B. Computer modeling of oil recovery by the large-block averaging method	37
6 Honghua Zhao, Yunpeng Ji. Shield tunnel excavation analysis with/pipe shed support	42
7 Yiqian He, Siarhei Lapatsin. Potential applications of sbfem algorithm to viscoelastic problems of rock mechanics	51
8 Mikhasev G.I., Eremeyev V.A., Botogova M.G.. Anti-plane shear waves in ultrathin elastic layer attached to an elastic half-space taking into account interface slip and surface effects	54
9 Kazlouski J., Bogdan S.I., Zhuravkov M.A.. Numerical modeling of non-uniform loading on support structures during shaft sinking in complex geotechnical conditions	57
10 Kazlouski J., Bogdan S.I., Zhuravkov M.A.. Numerical modelling of long-term "rock-structure" interaction of mine shaft beyond design life span: a case study	61
11 Marmysh D. Machine learning methods for probabilistic assessment of solid damage indicators	65
12 Zheltkovich A.E., Verameichyk A.I., Parchotz K.G., Guo Xiaoxia, Ren Yuhang, Huang Zien, Peiwen Shi. Application of convolutional neural network in predicting forced displacements in monolithic self-stressed slabs on the base	70
13 Petrachkov D.A., Nikolaitchik M.A., Zhuravkov M.A. Study of the impact of backfill materials behavior on the rock massifs stress-strain state during stratified deposits chamber mining	77
14 Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Савицкая А.В.	

Методика расчета техногенной вибрации поверхности грунта в технической зоне подземных транспортных магистралей	82
15 Климкович Н.М., Николайчик М.А., Журавков М.А.. Численное моделирование ползучести массивов горных пород в областях ведения масштабных подземных горных работ	87
16 Карпович И.Н., Лопатин С.Н., Журавков М.А. Разработка численных алгоритмов моделирования формирования зон разрушения и трещиноватости в подрабатываемом массиве горных пород	92
17 Кологривко А.А., Кузьмич В.А., Петрачков Д.А. Эксплуатация техногенно нагруженных территорий на основе прогноза напряженно-деформированного состояния геотехнических сооружений	97
18 Старовойтов Э.И.. Деформирование трехслойных пластин кольцевой нагрузкой в нейтронном потоке	100
19 Леоненко Д.В. Динамическое поведение трехслойного стержня на упругом основании винклера при мгновенном нагружении	105
20 Яровая А.В. Деформирование трехслойной пластины кольцевой нагрузкой в температурном поле	107
21 Лачугина Е.А. Свободные колебания пятислойной несимметричной по толщине пластины	112
22 Салицкий В.С. Локальное нагружение круглой пятислойной пластины	117
23 Суслов К.В. Уравнения равновесия пятислойной балки симметричной по толщине	122
24 Шафиева Ю.В. Термосиловой деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем	124
25 Черняк А.В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины с линейно изменяющимися несущими слоями	129