ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.968.7
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-117-131

Поступила в редакцию 06.09.2022
Received 06.09.2022

А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С КВАДРАТИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Аннотация. Исследовано новое линейное интегро-дифференциальное уравнение порядка $n \geq 3$, заданное на замкнутой кривой, расположенной в комплексной плоскости. Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару. Характерной особенностью уравнения является наличие в его коэффициентах квадратичных функций специального вида. Уравнение сводится вначале к краевой задаче линейного сопряжения для аналитических функций. В случае ее разрешимости следует далее решать два линейных дифференциальных уравнения в областях комплексной плоскости с некоторыми дополнительными условиями на решение. Явно указаны все условия разрешимости исходного уравнения. При их выполнении искомое решение построено в замкнутой форме. Приведен пример.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярный интеграл, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение, определитель

Для цитирования. Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с квадратичными функциями в коэффициентах / А. П. Шилин // // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 2. – С. 117–131. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-117-131

Andrey P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH QUADRATIC FUNCTIONS IN COEFFICIENTS

Abstract. A new linear integro-differential equation of order $n \geq 3$, given on a closed curve located in the complex plane, is investigated. Integrals in the equation are understood in the sense of the finite part according to Hadamard. A characteristic feature of the equation is the presence of quadratic functions of a special kind in its coefficients. The equation is reduced first to the boundary value problem of linear conjugation for analytical functions. In the case of its solvability, two linear differential equations should be further solved in the domains of the complex plane with some additional conditions for the solution. All conditions for the solvability of the original equation are explicitly specified. When they are executed, the desired solution is constructed in a closed form. An example is given.

Keywords: integro-differential equation, hypersingular integral, Riemann boundary problem, linear differential equation, determinant

For citation. Shilin A. P. Hypersingular integro-differential equation with quadratic functions in coefficients. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 2, pp. 117–131 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-2-117-131

Введение. В настоящей работе будет продолжено исследование уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_k\varphi^{(k)}(t)+\frac{k!b_k}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}\right)=f(t),\quad t\in L,\quad n\in\mathbb{N},\tag{1}$$

с гиперсингулярными интегралами, понимаемыми в смысле конечной части по Адамару.

В уравнении (1) L – простая замкнутая гладкая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости, $f(t)$ – заданная комплексная H-непрерывная (т. е. удовлетворяющая условию Гельдера) функция, $\varphi(t)$ – искомая комплексная функция, H-непрерывная вместе со своими производными до порядка n. В случае постоянных коэффициентов a_k, b_k уравнение (1) введено в рассмотрение и решено в явном виде Э. И. Зверовичем [1]; решение основано на обобщенных формулах Сохоцкого, полученных в [2] и содержащих гиперсингулярные интегралы. Случаи переменных коэффициентов в уравнении (1), сохраняющие возможность точного аналитического решения уравнения, указаны в [3–5]. Число таких случаев для произвольного n едва ли может быть велико, однако именно они представляются наиболее интересными и важными для теории и возможных приложений. Далее дается явное решение уравнения (1) для нового случая переменных коэффициентов.

Постановка задачи. Общая схема решения. Зададим H-непрерывные функции $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $t \in L$. Зададим также комплексные числа μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, A_k, B_k, $k = \overline{0, n+2}$, $n \geq 3$, причем $A_k = B_k = 0$ при $k = 0,1,n+1,n+2$, $A_n = B_n = 1$, $\mu_1 \neq \mu_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Рассмотрим уравнение, в котором $t \in L$:

$$\sum_{k=0}^{n}\Big\{\Big[a(t)\Big(\big(A_k-(\mu_1+\mu_2)A_{k+1}+\mu_1\mu_2A_{k+2}\big)t^2+\big((\mu_1+\mu_2)A_{k+2}-2A_{k+1}\big)t+2A_{k+2}\Big)+$$

$$+b(t)\Big(\big(B_k-(\sigma_1+\sigma_2)B_{k+1}+\sigma_1\sigma_2B_{k+2}\big)t^2+\big((\sigma_1+\sigma_2)B_{k+2}-2B_{k+1}\big)t+2B_{k+2}\Big)\Big]\varphi^{(k)}(t)+$$

$$+\frac{k!}{\pi i}\Big[a(t)\Big(\big(A_k-(\mu_1+\mu_2)A_{k+1}+\mu_1\mu_2A_{k+2}\big)t^2+\big((\mu_1+\mu_2)A_{k+2}-2A_{k+1}\big)t+2A_{k+2}\Big)-$$

$$-b(t)\Big(\big(B_k-(\sigma_1+\sigma_2)B_{k+1}+\sigma_1\sigma_2B_{k+2}\big)t^2+\big((\sigma_1+\sigma_2)B_{k+2}-2B_{k+1}\big)t+2B_{k+2}\Big)\Big]\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}}\Big\}=f(t). \quad (2)$$

Обозначим $P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}A_{k+2}\lambda^k$, $Q(\nu)=\sum_{k=0}^{n-2}B_{k+2}\nu^k$. Будем предполагать, что корни $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n-2}$ уравнения $P(\lambda)=0$ и корни $\nu_1,\nu_2,...,\nu_{n-2}$ уравнения $Q(\nu)=0$ являются однократными, причем $P(\mu_j)\neq 0$, $Q(\sigma_j)\neq 0$, $j=1,2$. Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_\pm(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad z\in D_\pm,$$

где D_+ и D_- – соответственно внутренняя (будем считать $0 \in D_+$) и внешняя ($\infty \in D_-$) области комплексной плоскости по отношению к кривой L.

Очевидно, что уравнение (2) есть частный случай уравнения (1) с коэффициентами специальной структуры. Для коэффициентов подобной структуры в [5] указана схема решения, вытекающая из обобщенных формул Сохоцкого [2]. Согласно этой схеме вначале следует решить краевую задачу Римана

$$F_+(t)=\frac{b(t)}{a(t)}F_-(t)+\frac{f(t)}{2a(t)},\quad t\in L, \quad (3)$$

для аналитических функций

$$F_+(z)=\sum_{k=0}^{n}\Big(\big(A_k-(\mu_1+\mu_2)A_{k+1}+\mu_1\mu_2A_{k+2}\big)z^2+$$

$$+\big((\mu_1+\mu_2)A_{k+2}-2A_{k+1}\big)z+2A_{k+2}\Big)\Phi_+^{(k)}(z),\quad z\in D_+, \quad (4)$$

$$F_-(z)=\sum_{k=0}^{n}\Big(\big(B_k-(\sigma_1+\sigma_2)B_{k+1}+\sigma_1\sigma_2B_{k+2}\big)z^2+$$

$$+\big((\sigma_1+\sigma_2)B_{k+2}-2B_{k+1}\big)z+2B_{k+2}\Big)\Phi_-^{(k)}(z),\quad z\in D_-, \quad (5)$$

с H-непрерывными предельными значениями $F_\pm(t)$, $t\in L$. Если задача Римана (3) не имеет решений, то не имеет решений и уравнение (2). Если задача Римана окажется разрешимой, а ее решение будет найдено, то соотношения (4), (5) следует расценивать затем как линейные дифференциальные уравнения для нахождения аналитических функций $\Phi_\pm(z)$, $\Phi_-(\infty)=0$. Если и функции $\Phi_\pm(z)$ будут найдены, то решение уравнения (2) находится по формуле Сохоцкого

$$\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_-(t), \quad t\in L. \tag{6}$$

Поскольку интеграл типа Коши имеет на бесконечности нуль (вообще говоря, 1-го порядка), то из (5) легко увидеть, что функция $F_-(z)$ допускает на бесконечности полюс 1-го порядка. Решение задачи Римана (3) в классе функций, допускающих на бесконечности такой полюс, может быть записано на основании [6, гл. II] по формуле

$$F_\pm(z)=\mathrm{X}_\pm(z)\big(\Psi_\pm(z)+R(z)\big), \quad z\in D_\pm, \tag{7}$$

где $\mathrm{X}_\pm(z)$ – канонические функции задачи (их явный вид здесь не приводим), $\Psi_\pm(z) = = \dfrac{1}{4\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{f(t)dt}{a(t)\mathrm{X}_+(t)(t-z)}$, $R(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\gamma+1} d_k z^k$ – многочлен степени $\gamma+1$ с произвольными комплексными коэффициентами d_k при $\gamma\ge -1$, $R(z)\equiv 0$ при $\gamma<-1$, $\gamma=\mathrm{Ind}_L\,\dfrac{b(t)}{a(t)}$. При $\gamma\ge -2$ задача разрешима безусловно, а при $\gamma<-2$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \frac{f(t)t^k dt}{a(t)\mathrm{X}_+(t)}=0, \quad k=\overline{0,-\gamma-3}.$$

Предполагая, что задача (3) разрешима, приступим к решению уравнений (4), (5). Эти уравнения в качестве коэффициентов имеют квадратичные функции специального вида. Отметим, что близкое однородное уравнение с линейными функциями в коэффициентах указано в [7, с. 529, пример 17].

Решение дифференциального уравнения для внутренней области.

Л е м м а 1. *Фундаментальную систему решений однородного* $(F_+(z)\equiv 0)$ *уравнения* (4) *образуют функции*

$$e^{\lambda_j z}, \quad j=\overline{1,n-2}; \quad e^{\mu_j z}\left(z-\frac{P'(\mu_j)}{P(\mu_j)}\right), \quad j=1,2. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится, очевидно, к обоснованию того, что каждая из функций (8) удовлетворяет однородному уравнению. Несложные соответствующие выкладки для первых $n-2$ функций из (8) проводить не будем. Из двух однотипных последних функций в (8) возьмем для определенности $e^{\mu_1 z}\left(z-\dfrac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right)$ и лишь необходимыми вычислениями для этой функции ограничимся. Подставим в однородное уравнение (4)

$$\Phi_+^{(k)}(z)=e^{\mu_1 z}\mu_1^k\left(z-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right)+k\mu_1^{k-1}e^{\mu_1 z}, \quad k=\overline{0,n}.$$

Тогда в правой части этого уравнения после сокращения на $e^{\mu_1 z}$ получим многочлен 3-й степени относительно z. Вычислим коэффициенты этого многочлена:

$$z^3:\quad \sum_{k=0}^{n}\Big(A_k\mu_1^k-(\mu_1+\mu_2)A_{k+1}\mu_1^k+\mu_1\mu_2A_{k+2}\mu_1^k\Big)=\sum_{k=0}^{n}\Big(A_k\mu_1^k-A_{k+1}\mu_1^{k+1}-$$
$$-\mu_2A_{k+1}\mu_1^k+\mu_2A_{k+2}\mu_1^{k+1}\Big)=\sum_{k=2}^{n}A_k\mu_1^k-\sum_{k=2}^{n}A_k\mu_1^k-\mu_2\left(\sum_{k=2}^{n}A_k\mu_1^{k-1}-\sum_{k=2}^{n}A_k\mu_1^{k-1}\right)=0;$$

$$z^2:\quad -\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\sum_{k=0}^{n}\Big(A_k\mu_1^k-(\mu_1+\mu_2)A_{k+1}\mu_1^k+\mu_1\mu_2A_{k+2}\mu_1^k\Big)+\sum_{k=0}^{n}\Big(A_kk\mu_1^{k-1}-$$
$$-(\mu_1+\mu_2)A_{k+1}k\mu_1^{k-1}+\mu_1\mu_2A_{k+2}k\mu_1^{k-1}+(\mu_1+\mu_2)A_{k+2}\mu_1^k-2A_{k+1}\mu_1^k\Big)=$$
$$=\big(\mu_1^2P(\mu_1)\big)'-(\mu_1+\mu_2)\big(\mu_1P(\mu_1)\big)'+\mu_1\mu_2P'(\mu_1)+(\mu_1+\mu_2)P(\mu_1)-2\mu_1P(\mu_1)=0;$$

$$z^1: \quad \sum_{k=0}^{n}\Big[\Big((\mu_1+\mu_2)\mu_1^k A_{k+2} - 2A_{k+1}\mu_1^k\Big)\left(-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right) + (\mu_1+\mu_2)k\mu_1^{k-1}A_{k+2} - 2A_{k+1}k\mu_1^{k-1} +$$

$$+2A_{k+2}\mu_1^k\Big] = \big((\mu_1+\mu_2)P(\mu_1) - 2\mu_1 P(\mu_1)\big)\left(-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right) + (\mu_1+\mu_2)P'(\mu_1) -$$

$$-2\mu_1 P'(\mu_1) - 2P(\mu_1) + 2P(\mu_1) = 0;$$

$$z^0: \quad 2\sum_{k=0}^{n}\left(A_{k+2}k\mu_1^{k-1} - A_{k+2}\mu_1^k\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right) = 2\left(P'(\mu_1) - P(\mu_1)\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right) = 0,$$

тем самым лемма 1 доказана.

Обозначим $W(z)$ определитель Вронского функций (8), а V – определитель Вандермонда чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-2},\mu_1,\mu_2$.

Л е м м а 2. *Справедлива формула*

$$W(z) = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-2}+\mu_1+\mu_2)z}Vz^2. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственное вычисление определителя Вронского дает вначале формулу

$$W(z) = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-2}+\mu_1+\mu_2)z}\left(\left(z-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right)\left(z-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)V +\right.$$

$$\left. + \left(z-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right)V'_{\mu_2} + \left(z-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)V'_{\mu_1} + V''_{\mu_1\mu_2}\right),$$

где

$$V'_{\mu_2} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_{n-2}^2 & \mu_1^2 & 2\mu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-1} & \mu_1^{n-1} & (n-1)\mu_2^{n-2} \end{vmatrix}, \quad V'_{\mu_1} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & 1 & \mu_2 \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_{n-2}^2 & 2\mu_1 & \mu_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-1} & (n-1)\mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$V''_{\mu_1\mu_2} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_{n-2}^2 & 2\mu_1 & 2\mu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-1} & (n-1)\mu_1^{n-2} & (n-1)\mu_2^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Придадим этой формуле вид

$$W(z) = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_{n-2}+\mu_1+\mu_2)z}V\left(z^2 + \left(\frac{V'_{\mu_1}}{V} - \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)} + \frac{V'_{\mu_2}}{V} - \frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)z +\right.$$

$$\left. + \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)} - \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{V'_{\mu_2}}{V} - \frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\frac{V'_{\mu_1}}{V} + \frac{V''_{\mu_1\mu_2}}{V}\right). \tag{10}$$

Теперь вычислим

$$\frac{V'_{\mu_1}}{V}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{V'_{\mu_2}}{V}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}=\left(\frac{1}{\mu_1-\mu_2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}\right)-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}+\left(\frac{1}{\mu_2-\mu_1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_2-\lambda_k}\right)-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_2-\lambda_k}=0;\quad V'_{\mu_1}=V\left(\frac{1}{\mu_1-\mu_2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}\right),$$

$$\frac{V''_{\mu_1\mu_2}}{V}=\frac{1}{V}\left(V'_{\mu_2}\left(\frac{1}{\mu_1-\mu_2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}\right)+V\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}\right)=\frac{V'_{\mu_2}}{V}\left(\frac{1}{\mu_1-\mu_2}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}\right)+$$

$$+\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}=\frac{V'_{\mu_2}V'_{\mu_1}}{V^2}+\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2};$$

$$\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{V'_{\mu_2}}{V}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\frac{V'_{\mu_1}}{V}+\frac{V''_{\mu_1\mu_2}}{V}=\left(\frac{V'_{\mu_1}}{V}-\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\right)\left(\frac{V'_{\mu_2}}{V}-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\right)-$$

$$-\left(\frac{V'_{\mu_1}}{V}-\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\right)\frac{V'_{\mu_2}}{V}-\left(\frac{V'_{\mu_2}}{V}-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\right)\frac{V'_{\mu_1}}{V}+\frac{V'_{\mu_2}V'_{\mu_1}}{V^2}+\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}=0.$$

В результате формула (10) упростится и примет вид (9). Лемма 2 доказана. Для дальнейшего отметим формулу

$$\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{V'_{\mu_2}}{V}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\frac{V'_{\mu_1}}{V}+\frac{V''_{\mu_1\mu_2}}{V}=0, \tag{11}$$

полученную в процессе доказательства леммы, и формулу

$$\mu_1\left(\frac{V'_{\mu_1}}{V}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\right)+\mu_2\left(\frac{V'_{\mu_2}}{V}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)=\mu_1\frac{1}{\mu_1-\mu_2}+\mu_2\frac{1}{\mu_2-\mu_1}=1, \tag{12}$$

которую легко увидеть из этого доказательства.

Для $j=\overline{1,n-2}$ обозначим $W_j(z)$ определители Вронского функций

$$e^{\lambda_m z},\quad m=\overline{1,n-2},\ \ m\neq j;\quad e^{\mu_m z}\left(z-\frac{P'(\mu_m)}{P(\mu_m)}\right),\quad m=1,2,$$

а V_j – определители Вандермонда чисел λ_m, $m=\overline{1,n-2}$, $m\neq j$; μ_m, $m=1,2$.

Л е м м а 3. *Справедливы формулы*

$$W_j(z)=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{j-1}+\lambda_{j+1}+\ldots+\lambda_{n-2}+\mu_1+\mu_2)z}V_j z\left(z-\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}\right),\quad j=\overline{1,n-2}. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычисление определителей $W_j(z)$ вначале приведет к формулам, аналогичным формуле (10):

$$W_j(z)=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{j-1}+\lambda_{j+1}+\ldots+\lambda_{n-2}+\mu_1+\mu_2)z}V_j\left(z^2+\left(\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)z+\right.$$

$$\left.+\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}+\frac{(V_j)''_{\mu_1\mu_2}}{V_j^2}\right). \tag{14}$$

Далее получим

$$\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}=\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}+\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\right)-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}+$$

$$+\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}\frac{1}{\mu_2-\lambda_k}+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\right)-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\mu_2-\lambda_k}=-\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}$$

(при $n = 3$ суммы $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}$, $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}\frac{1}{\mu_2-\lambda_k}$ полагаются равными нулю),

$$(V_j)'_{\mu_1}=V_j\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}+\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\right),$$

$$\frac{(V_j)''_{\mu_1\mu_2}}{V_j}=\frac{1}{V_j}\left((V_j)'_{\mu_1}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}\frac{1}{\mu_1-\lambda_k}+\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\right)+V_j\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}\right)=\frac{(V_j)'_{\mu_1}(V_j)'_{\mu_2}}{V_j^2}+\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2},$$

$$\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}-\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j}-\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}+\frac{(V_j)''_{\mu_1\mu_2}}{V_j^2}=\left(\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}+\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\right)-\left(\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}+\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\right)\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j}-$$
$$-\left(\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\right)\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}+\frac{(V_j)'_{\mu_1}(V_j)'_{\mu_2}}{V_j^2}+\frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}=0,$$

так что формула (14) преобразуется в формулу (13). Лемма 3 доказана.

Для $j = 1,2$ обозначим $W_{n-2+j}(z)$ определитель Вронского функций

$$e^{\lambda_k z},\quad k=\overline{1,n-2},\quad e^{\mu_m z}\left(z-\frac{P'(\mu_m)}{P(\mu_m)}\right),$$

а V_{n-2+j} – определитель Вандермонда чисел λ_k, $k=\overline{1,n-2}$, μ_m, где $m = 2$ при $j = 1$, $m = 1$ при $j = 2$.

Л е м м а 4. *Справедливы формулы*

$$W_{n-2+j}(z)=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-2}+\mu_m)z}V_{n-2+j}z,\qquad j=1,2. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой леммы, аналогичное доказательству лемм 2, 3 и вместе с тем более простое, приводить не будем.

Запишем формулу общего решения уравнения (4), к которой приводит метод вариации произвольных постоянных:

$$\Phi_+(z)=\sum_{j=1}^{n-2}e^{\lambda_j z}\left(C_j^+ +(-1)^{n+j}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)W_j(\zeta)d\zeta}{N(\zeta)}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}e^{\mu_j z}\left(z-\frac{P'(\mu_j)}{P(\mu_j)}\right)\left(C_{n-2+j}^+ +(-1)^{j}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)W_{n-2+j}(\zeta)d\zeta}{N(\zeta)}\right), \tag{16}$$

где C_j^+ – произвольные комплексные постоянные, $j=\overline{1,n}$, $z_0^+ \in D_+$, $z_0^+ \neq 0$, $N(\zeta) = \Big[\big(A_n-(\mu_1+\mu_2)A_{n+1}+\mu_1\mu_2A_{n+2}\big)\zeta^2+\big((\mu_1+\mu_2)A_{n+2}-2A_{n+1}\big)\zeta+2A_{n+2}\Big]W(\zeta)$.

Используя формулы (9), (13), (15), а также значения A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, формулу (16) можно записать в виде

$$\Phi_+(z)=\sum_{j=1}^{n-2}e^{\lambda_j z}\left(C_j^+ + \frac{(-1)^{n+j}V_j}{V}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)\left(\zeta-\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}\right)e^{-\lambda_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}e^{\mu_j z}\left(z-\frac{P'(\mu_j)}{P(\mu_j)}\right)\left(C_{n-2+j}^+ + \frac{(-1)^j V_{n-2+j}}{V}\int_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)e^{-\mu_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right). \tag{17}$$

Для однозначности функции $\Phi_+(z)$ в области D_+ необходимы и достаточны условия

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{F_+(z)\left(z-\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}\right)e^{-\lambda_j z}}{z^3}=0,\quad j=\overline{1,n-2}, \tag{18}$$

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{F_+(z)e^{-\mu_j z}}{z^3}=0,\quad j=1,2, \tag{19}$$

которые в дальнейшем будем предполагать выполненными.

Л е м м а 5. *Формула* (17) *дает аналитическую в* D_+ *функцию* $\Phi_+(z)$ *с n раз H-непрерывно дифференцируемым предельным значением на L.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналитичность нуждается в обосновании, очевидно, лишь в точке $z=0$, поскольку каждый из интегралов в (17) дает в этой точке полюс, вообще говоря, 2-го порядка. Пусть $\beta_0+\beta_1 z+\ldots$ есть разложение по формуле Маклорена функции $F_+(z)$. Лорановское разложение в окрестности точки $z=0$ функции $\Phi_+(z)$, записанной по формуле (17), приводит к следующей главной части этого разложения:

$$\frac{\beta_0 A}{2V}\frac{1}{z^2}+\left(\frac{\beta_1 A}{V}-\frac{\beta_0 B}{2V}-\frac{\beta_0 C}{V}\right)\frac{1}{z}, \tag{20}$$

где

$$A=\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{n+j}V_j\left(\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}\right)-V_{n-1}\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+V_n\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)},$$

$$B=\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{n+j}V_j\lambda_j\left(\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}\right)-V_{n-1}\mu_1\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+V_n\mu_2\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)},$$

$$C=\sum_{j=1}^{n-2}(-1)^{n+j}V_j-\frac{V_{n-1}}{2}+\frac{V_n}{2}.$$

Число A найдем как разложенный по элементам последней строки определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-2} & \ldots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2} \\ \frac{1}{\mu_1-\lambda_1}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_1} & \ldots & \frac{1}{\mu_1-\lambda_{n-2}}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_{n-2}} & \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)} & \frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)} \end{vmatrix}.$$

Элементы последней строки этого определителя запишем в виде

$$\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}=\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}-\frac{(V_j)'_{\mu_1}}{V_j}-\frac{(V_j)'_{\mu_2}}{V_j},\quad j=\overline{1,n-2},$$

$$\frac{P'(\mu_j)}{P(\mu_j)}=\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}-\frac{(V_{n-2+j})'_{\mu_1}}{V_{n-2+j}}-\frac{(V_{n-2+j})'_{\mu_2}}{V_{n-2+j}},\quad j=1,2;$$

при этом используем равенства

$$(V_{n-2+j})'_{\mu_j}=0,\qquad \frac{P'(\mu_j)}{P(\mu_j)}=\frac{(V_{n-j+1})'_{\mu_j}}{V_{n-j+1}},\quad j=1,2.$$

В результате получим

$$A=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2}\\ \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)} & \dots & \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)} & \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)} & \frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)} \end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2}\\ \frac{(V_1)'_{\mu_1}}{V_1} & \dots & \frac{(V_{n-2})'_{\mu_1}}{V_{n-2}} & \frac{(V_{n-1})'_{\mu_1}}{V_{n-1}} & \frac{(V_n)'_{\mu_1}}{V_n} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2}\\ \frac{(V_1)'_{\mu_2}}{V_1} & \dots & \frac{(V_{n-2})'_{\mu_2}}{V_{n-2}} & \frac{(V_{n-1})'_{\mu_2}}{V_{n-1}} & \frac{(V_n)'_{\mu_2}}{V_n} \end{vmatrix}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\frac{(V_j)'_{\mu_k}}{V_j}V_j=-\sum_{k=1}^{2}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2}\\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}'_{\mu_k}=0.$$

Похожим образом вычислим число B:

$$B=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2}\\ \left(\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)\lambda_1 & \dots & \left(\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)\lambda_{n-2} & \left(\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)\mu_1 & \left(\frac{P'(\mu_1)}{P(\mu_1)}+\frac{P'(\mu_2)}{P(\mu_2)}\right)\mu_2 \end{vmatrix}-$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\left(\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2}\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}'_{\mu_k}-(-1)^k V_{n-2+k}\right)=-V_{n-1}+V_n.$$

Теперь в выражении (20) коэффициент при $1/z$ станет равным

$$-\frac{\beta_0}{2V}\left(-V_{n-1}+V_n\right)-\frac{\beta_0}{V}C=-\frac{\beta_0}{V}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}V_j=-\frac{\beta_0}{V}\begin{vmatrix}1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-2} & \mu_1 & \mu_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda_1^{n-2} & \dots & \lambda_{n-2}^{n-2} & \mu_1^{n-2} & \mu_2^{n-2}\\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,$$

и, следовательно, аналитичность $\Phi_+(z)$ в нуле обоснована.

Поскольку решение $F_+(z),\ z\in D_+$, задачи Римана (3) H-непрерывно продолжимо на кривую L, то и найденное по формуле (17) решение $\Phi_+(z)$ уравнения (4) будет, очевидно, H-непрерывно продолжимо на L. H-непрерывно продолжимы из D_+ на L будут также производные $\Phi_+^{(k)}(z),\ k=\overline{1,n}$, – это понятно из формул

$$\Phi_+^{(k)}(z)=\sum_{j=1}^{n-2}(e^{\lambda_j z})^{(k)}\left(C_j^+ +\frac{(-1)^{n+j}V_j}{V}\int\limits_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)\left(\zeta-\frac{1}{\mu_1-\lambda_j}-\frac{1}{\mu_2-\lambda_j}\right)e^{-\lambda_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left(e^{\mu_j z}\left(z-\frac{P'(\mu_j)}{P(\mu_j)}\right)\right)^{(k)}\left(C_{n-2+j}^+ +\frac{(-1)^jV_{n-2+j}}{V}\int\limits_{z_0^+}^{z}\frac{F_+(\zeta)e^{-\mu_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right)$$

(плюс $\frac{F_+(z)}{z^2}$ для $k = n$), на которых основано доказательство метода вариации произвольных постоянных. Лемма 5 доказана.

Решение дифференциального уравнения для внешней области. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (5) образуют функции

$$e^{\nu_j z},\quad j=\overline{1,n-2};\quad e^{\sigma_j z}\left(z-\frac{Q'(\sigma_j)}{Q(\sigma_j)}\right),\quad j=1,2,$$

аналогичные функциям (8). Из-за линейной независимости этих функций их линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами всегда будет иметь на бесконечности существенно особую точку, поэтому однородное уравнение (5) имеет лишь нулевое решение, аналитическое в D_-. Добиваться аналитичности $\Phi_-(z)$ на бесконечности (с условием $\Phi_-(\infty) = 0$) можно лишь подбором частного решения неоднородного уравнения (5). Формула такого частного решения, полученная методом вариации произвольных постоянных, аналогична формуле (17)

$$\Phi_-(z)=\sum_{j=1}^{n-2}e^{\nu_j z}\left(C_j^- +\frac{(-1)^{n+j}U_j}{U}\int\limits_{z_0^-}^{z}\frac{F_-(\zeta)\left(\zeta-\frac{1}{\sigma_1-\nu_j}-\frac{1}{\sigma_2-\nu_j}\right)e^{-\nu_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}e^{\sigma_j z}\left(z-\frac{Q'(\sigma_j)}{Q(\sigma_j)}\right)\left(C_{n-2+j}^- +\frac{(-1)^jU_{n-2+j}}{U}\int\limits_{z_0^-}^{z}\frac{F_-(\zeta)e^{-\sigma_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right),\tag{21}$$

только теперь константы $C_j^-,\ j=\overline{1,n}$, – конкретные, подлежащие нахождению. В формуле (21) $z_0^-\in D_-,\ z_0^-\neq\infty,\ U$ – определитель Вандермонда чисел $\nu_1,\dots,\nu_{n-2},\sigma_1,\sigma_2,\ U_j$ – определитель Вандермонда этих же чисел с отброшенным числом ν_j при $j=\overline{1,n-2}$, с отброшенным числом σ_1 при $j = n - 1$ и с отброшенным числом σ_2 при $j = n$.

Для однозначности функции $\Phi_-(z)$ необходимы и достаточны условия

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{F_-(z)\left(z - \dfrac{1}{\sigma_1 - \nu_j} - \dfrac{1}{\sigma_2 - \nu_j}\right) e^{-\nu_j z}}{z^3} = 0, \quad j = \overline{1, n-2}, \tag{22}$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{F_-(z) e^{-\sigma_j z}}{z^3} = 0, \quad j = 1, 2, \tag{23}$$

которые далее предполагаем выполненными. Теперь возьмем лорановское разложение функции $\Phi_-(z)$ в окрестности бесконечности и приравняем к нулю коэффициенты при неотрицательных степенях z. В результате придем к следующей бесконечной линейной алгебраической системе для нахождения постоянных C_j^-:

$$\sum_{j=1}^{n-2} \nu_j^m C_j^- + \sum_{j=1}^{2} \left(-\frac{Q'(\sigma_j)}{Q(\sigma_j)} \sigma_j{}^m + m\sigma_j{}^{m-1} \right) C_{n-2+j}^- = \alpha_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где

$$\alpha_m = -\frac{m!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dt}{t^{m+1}} \left(\sum_{j=1}^{n-2} \frac{(-1)^{n+j} U_j e^{\nu_j t}}{U} \int_{z_0^-}^{t} \frac{F_-(\zeta)\left(\zeta - \dfrac{1}{\sigma_1 - \nu_j} - \dfrac{1}{\sigma_2 - \nu_j}\right) e^{-\nu_j \zeta} d\zeta}{\zeta^3} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{2} \frac{(-1)^j U_{n-2+j} e^{\sigma_j t}}{U} \int_{z_0^-}^{t} \frac{F_-(\zeta) e^{-\sigma_j \zeta} d\zeta}{\zeta^3} \right),$$

Γ – окружность с центром в нуле достаточно большого радиуса.

Матрица системы (24) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & -\dfrac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)} & -\dfrac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)} \\ \nu_1 & \ldots & \nu_{n-2} & -\dfrac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1 + 1 & -\dfrac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2 + 1 \\ \nu_1^2 & \ldots & \nu_{n-2}^2 & -\dfrac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1^2 + 2\sigma_1 & -\dfrac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2^2 + 2\sigma_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_1^m & \ldots & \nu_{n-2}^m & -\dfrac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1^m + m\sigma_1^{m-1} & -\dfrac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2^m + m\sigma_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Л е м м а 6. *Ранг матрицы* (25) *равен* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вначале среди чисел $\nu_1, \ldots, \nu_{n-2}$ нет равного нулю. Тогда отличным от нуля минором размерности n, имеющим наиболее простую структуру, оказывается минор, образованный строками матрицы со 2-й по (n + 1)-ю. В самом деле,

$$\begin{vmatrix} \nu_1 & \ldots & \nu_{n-2} & -\dfrac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1 + 1 & -\dfrac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2 + 1 \\ \nu_1^2 & \ldots & \nu_{n-2}^2 & -\dfrac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1^2 + 2\sigma_1 & -\dfrac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2^2 + 2\sigma_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_1^n & \ldots & \nu_{n-2}^n & -\dfrac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1^n + n\sigma_1^{n-1} & -\dfrac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2^n + n\sigma_2^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}\sigma_1\sigma_2U-\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\begin{vmatrix}\nu_1 & \ldots & \nu_{n-2} & \sigma_1 & 1\\ \nu_1^2 & \ldots & \nu_{n-2}^2 & \sigma_1^2 & 2\sigma_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nu_1^n & \ldots & \nu_{n-2}^n & \sigma_1^n & n\sigma_2^{n-1}\end{vmatrix}-$$

$$-\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\begin{vmatrix}\nu_1 & \ldots & \nu_{n-2} & 1 & \sigma_2\\ \nu_1^2 & \ldots & \nu_{n-2}^2 & 2\sigma_1 & \sigma_2^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nu_1^n & \ldots & \nu_{n-2}^n & n\sigma_1^{n-1} & \sigma_2^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\nu_1 & \ldots & \nu_{n-2} & 1 & 1\\ \nu_1^2 & \ldots & \nu_{n-2}^2 & 2\sigma_1 & 2\sigma_2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nu_1^n & \ldots & \nu_{n-2}^n & n\sigma_1^{n-1} & n\sigma_2^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}\sigma_1\sigma_2U-\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\left(\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}\sigma_1\sigma_2U\right)'_{\sigma_2}-$$

$$-\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\left(\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}\sigma_1\sigma_2U\right)'_{\sigma_1}+\left(\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}\sigma_1\sigma_2U\right)''_{\sigma_1\sigma_2}=$$

$$=\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}\left[\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_1\sigma_2U-\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\left(\sigma_1U+\sigma_1\sigma_2U'_{\sigma_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\left(\sigma_2U+\sigma_1\sigma_2U'_{\sigma_1}\right)+\sigma_1U'_{\sigma_1}+\sigma_2U'_{\sigma_2}+\sigma_1\sigma_2U''_{\sigma_1\sigma_2}+U\right]=$$

$$=\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}\left[\sigma_1\sigma_2U\left(\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}-\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\frac{U'_{\sigma_2}}{U}-\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\frac{U'_{\sigma_1}}{U}+\frac{U''_{\sigma_1\sigma_2}}{U}\right)+\right.$$

$$\left.+U\left(\sigma_1\left(\frac{U'_{\sigma_1}}{U}-\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\right)+\sigma_2\left(\frac{U'_{\sigma_2}}{U}-\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\right)\right)+U\right]=2\nu_1\cdot\ldots\cdot\nu_{n-2}U\neq 0;$$

при этом использовались равенства

$$\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}-\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\frac{U'_{\sigma_2}}{U}-\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\frac{U'_{\sigma_1}}{U}+\frac{U''_{\sigma_1\sigma_2}}{U}=0,$$

$$\sigma_1\left(\frac{U'_{\sigma_1}}{U}-\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\right)+\sigma_2\left(\frac{U'_{\sigma_2}}{U}-\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\right)=1,$$

вполне аналогичные соответственно равенствам (11), (12).

Пусть теперь равно нулю одно из чисел ν_j, для определенности $\nu_1 = 0$. Тогда $Q(\nu) = \nu M(\nu)$, где $M(\nu)$ – многочлен с корнями $\nu_2,\ldots,\nu_{n-2}$ (в случае $n = 3$ этих корней не будет, следует взять $M(\nu) = 1$),

$$-\frac{Q'(\sigma_j)}{Q(\sigma_j)}\sigma_j^m+m\sigma_j^{m-1}=-\frac{M'(\sigma_j)}{M(\sigma_j)}\sigma_j^m+(m-1)\sigma_j^{m-1},\quad j=1,2.$$

Возьмем минор матрицы (25), образованный ее 1-й строкой и строками с 3-й по $(n + 1)$-ю:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1 & -\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)} & -\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\\ 0 & \nu_2^2 & \ldots & \nu_{n-2}^2 & -\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1^2+2\sigma_1 & -\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2^2+2\sigma_2\\ 0 & \nu_2^3 & \ldots & \nu_{n-2}^3 & -\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1^3+3\sigma_1^2 & -\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2^3+3\sigma_2^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \nu_2^n & \ldots & \nu_{n-2}^n & -\frac{Q'(\sigma_1)}{Q(\sigma_1)}\sigma_1^n+n\sigma_1^{n-1} & -\frac{Q'(\sigma_2)}{Q(\sigma_2)}\sigma_2^n+n\sigma_2^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$= \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{n-2}\sigma_1\sigma_2 \begin{vmatrix} \nu_2 & \ldots & \nu_{n-2} & -\dfrac{M'(\sigma_1)}{M(\sigma_1)}\sigma_1 + 1 & -\dfrac{M'(\sigma_2)}{M(\sigma_2)}\sigma_2 + 1 \\ \nu_2^2 & \ldots & \nu_{n-2}^2 & -\dfrac{M'(\sigma_1)}{M(\sigma_1)}\sigma_1^2 + 2\sigma_1 & -\dfrac{M'(\sigma_2)}{M(\sigma_2)}\sigma_2^2 + 2\sigma_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_2^{n-1} & \ldots & \nu_{n-2}^{n-1} & -\dfrac{M'(\sigma_1)}{M(\sigma_1)}\sigma_1^{n-1} + (n-1)\sigma_1^{n-2} & -\dfrac{M'(\sigma_2)}{M(\sigma_2)}\sigma_2^{n-1} + (n-1)\sigma_2^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель имеет такую же структуру, как минор в уже рассмотренном случае, поэтому он отличен от нуля. Тем самым доказательство леммы 6 завершено. Из нее вытекает, что система (24) имеет разве что единственное решение. Следовательно, и решение $\Phi_-(z)$ уравнения (5) может быть разве что единственным. Если это решение существует, то H-непрерывность его предельного значения на L вместе с предельными значениями производных обосновывается аналогично решению $\Phi_+(z)$. При наличии решений $\Phi_\pm(z)$ обоих уравнений (4), (5) искомая функция $\varphi(t)$, согласно формуле (6), будет принадлежать требуемому классу.

Основной результат. Пример. Сформулируем результат исследования. При этом в формулах (17), (21), используемых для этой формулировки, будут упрощены отношения вида V_j/V, U_j/U.

Теорема. *Если задача Римана* (3) *разрешима, условия* (18), (19), (22), (23) *выполнены и система* (24) *совместна, то решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n-2} e^{\lambda_j t}\left(C_j^+ + \frac{(-1)^{n+1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}(\lambda_k - \lambda_j)\prod\limits_{k=1}^{2}(\mu_k - \lambda_j)} \int\limits_{z_0^+}^{t} \frac{F_+(\zeta)\left(\zeta - \dfrac{1}{\mu_1 - \lambda_j} - \dfrac{1}{\mu_2 - \lambda_j}\right)e^{-\lambda_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2} e^{\mu_j t}\left(t - \frac{P'(\mu_j)}{P(\mu_j)}\right)\left(C_{n-2+j}^+ + \frac{(-1)^j}{(\mu_2 - \mu_1)\prod\limits_{k=1}^{2}(\mu_j - \lambda_k)} \int\limits_{z_0^+}^{t} \frac{F_+(\zeta)e^{-\mu_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n-2} e^{\nu_j t}\left(C_j^- + \frac{(-1)^{n+1}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-2}(\nu_k - \nu_j)\prod\limits_{k=1}^{2}(\sigma_k - \nu_j)} \int\limits_{z_0^-}^{t} \frac{F_-(\zeta)\left(\zeta - \dfrac{1}{\sigma_1 - \nu_j} - \dfrac{1}{\sigma_2 - \nu_j}\right)e^{-\nu_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right) -$$

$$-\sum_{j=1}^{2} e^{\sigma_j t}\left(t - \frac{Q'(\sigma_j)}{Q(\sigma_j)}\right)\left(C_{n-2+j}^- + \frac{(-1)^j}{(\sigma_2 - \sigma_1)\prod\limits_{k=1}^{2}(\sigma_j - \nu_k)} \int\limits_{z_0^-}^{t} \frac{F_-(\zeta)e^{-\sigma_j\zeta}d\zeta}{\zeta^3}\right);$$

при этом постоянные C_j^+ *произвольны, а постоянные* C_j^- *являются решением системы* (24), $j = \overline{1,n}$.

Отметим, что при $\gamma \geq -1$ выполнение условий (18), (19), (22), (23) в развернутом виде будет означать совместность системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов d_k многочлена $R(z)$, входящего в выражение (7) для $F_\pm(z)$. Явный вид этой системы может быть несложно записан и здесь не приводится. В случае совместности этой системы число произвольных постоянных в решении уравнения (2) уменьшится на ее ранг. Если после этого часть постоянных

d_k останутся произвольными, то они могут быть далее использованы для достижения совместности системы (24), из-за чего число произвольных постоянных d_k станет, возможно, еще меньше.

В качестве п р и м е р а решим уравнение

$$t^2(t^2+1)\varphi'''(t)-t(9t^3+2t^2-t+2)\varphi''(t)+(26t^4+11t^3-2t^2-2t+2)\varphi'(t)-$$
$$-(14t^4+14t^3+8t^2-2)\varphi(t)-\frac{14t^3(t+1)}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{26t^4+11t^3+6t^2+2t-2}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-$$
$$-\frac{2t(9t^3+2t^2+t-2)}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3}+\frac{6t^2(t^2-1)}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^4}=2\left(t^5+\frac{40}{t^3}-\frac{14}{t}+4t\right),\quad |t|=1. \tag{26}$$

Такой вид принимает на единичной окружности уравнение (2), если n = 3, $a(t)$ = t^2, $b(t)$ = 1, $f(t)=2\left(t^5+\frac{40}{t^3}-\frac{14}{t}+4t\right)$, A_2 = –2, μ_1 = 3, μ_2 = 4, B_2 = 1, σ_1 = 2, σ_2 = –2. Соответствующая задача Римана (3)

$$F_+(t)=\frac{1}{t^2}F_-(t)+t^3+\frac{40}{t^5}-\frac{14}{t^3}+\frac{4}{t},\quad |t|=1,$$

безусловно разрешима и имеет единственное решение

$$F_+(z)=z^3,\quad F_-(z)=-\frac{40}{z^3}+\frac{14}{z}-4z$$

в классе функций, допускающих полюс 1-го порядка на бесконечности. Уравнение (4) приобретает вид

$$z^2\Phi_+'''(z)-(9z^2+2z)\Phi_+''(z)+(26z^2+11z+2)\Phi_+'(z)-(24z^2+14z+4)\Phi_+(z)=z^3,\quad |z|<1; \tag{27}$$

при этом $P(\lambda)=\lambda-2,\ \lambda_1=2.$ Фундаментальную систему решений уравнения (27) образуют функции

$$e^{2z},\quad e^{3z}(z-1),\quad e^{4z}\left(z-\frac{1}{2}\right),$$

а общее решение, найденное с помощью метода вариации произвольных постоянных, записывается по формуле

$$\Phi_+(z)=C_1^+e^{2z}+C_2^+e^{3z}(z-1)+C_3^+e^{4z}\left(z-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{48}(2z+1).$$

Важно отметить, что условия (18), (19) здесь окажутся выполненными, поскольку для их выполнения, очевидно, достаточно наличия нуля по меньшей мере 3-го порядка у функции $F_+(z)$ в точке z = 0. Теперь запишем соответствующее уравнение (5):

$$z^2\Phi_-'''(z)+(z^2-2z)\Phi_-''(z)-(4z^2+2z-2)\Phi_-'(z)-(4z^2-2)\Phi_-(z)=-\frac{40}{z^3}+\frac{14}{z}-4z,\quad |z|>1; \tag{28}$$

при этом $Q(\nu)=\nu+1,\ \nu_1=-1.$ Фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения образуют функции

$$e^{-z},\quad e^{2z}\left(z-\frac{1}{3}\right),\quad e^{-2z}(z+1).$$

Условия (22), (23) примут вид

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{\left(-\frac{40}{z^3}+\frac{14}{z}-4z\right)\left(z+\frac{2}{3}\right)e^{z}}{z^3}=\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{\left(-\frac{40}{z^3}+\frac{14}{z}-4z\right)e^{\pm 2z}}{z^3}=0$$

и будут, как легко проверить, выполняться. Дальнейшие вычисления приводят к следующему решению уравнения (28):

$$\Phi_-(z)=C_1^-e^{-z}+C_2^-e^{2z}\left(z-\frac{1}{3}\right)+C_3^-e^{-2z}(z+1)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}.$$

Очевидно, что при $C_1^-=C_2^-=C_3^-=0$ получим решение $\Phi_-(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$, аналитическое при $|z|>1$ с условием $\Phi_-(\infty)=0$. Так как такое решение может оказаться лишь единственным, то записывать и решать систему вида (24) не требуется. В результате приходим к ответу примера (26)

$$\varphi(t)=C_1^+e^{2t}+C_2^+e^{3t}(t-1)+C_3^+e^{4t}\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{48}(2t+1)-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2},\quad |t|=1.$$

Заключительное замечание. Можно указать явно решаемые уравнения, аналогичные (2), содержащие в коэффициентах многочлены специальной структуры степени выше второй. Наилучшие подходы к записи и исследованию подобных уравнений неочевидны из-за их громоздкого вида.

Список использованных источников

1. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

2. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.

3. Шилин, А. П. О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 3. – С. 298–309. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

4. Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлерова типа / А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

5. Шилин, А. П. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах / А. П. Шилин // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 3. – С. 48–56. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

6. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

7. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

References

1. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Nacionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

2. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

3. Shilin A. P. On the solution of one integro-differential equation with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 298–309 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-298-309

4. Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equations of the Euler type. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 17–29 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29

5. Shilin A. P. Hypersingular integro-differential equation with power factors in coefficients. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 3, pp. 48–56 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56

6. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

7. Zaytsev V. F., Polyanin A. D. *Handbook of Ordinary Differential Equations.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (in Russian).

Информация об авторе

Шилин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

Information about the author

Andrey P. Shilin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com