

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

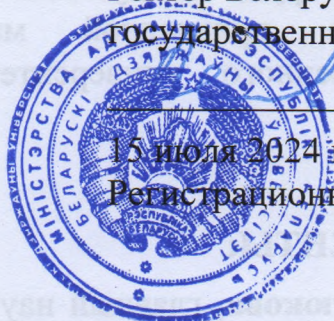
УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

15 июля 2024 г.

Регистрационный №УД-13232/уч.



ВЫПУСКНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 06-01 Экономическая кибернетика

(математические методы и компьютерное моделирование в экономике)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 06-2021 и учебного плана БГУ №G 31-1-215/уч. от 22.03.2022.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Н.М. Дмитрук, заведующий кафедрой методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

О.И. Костюкова, главный научный сотрудник отдела математической теории систем Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор;

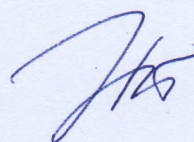
И.К. Асмыкович, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой методов оптимального управления БГУ
(протокол № 10 от 22.05.2024);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 28.06.2024).

Заведующий кафедрой методов
оптимального управления
Белорусского государственного университета,
кандидат физико-математических наук, доцент



Н.М. Дмитрук

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Выпуклая оптимизация» знакомит студентов с задачами и методами выпуклой оптимизации, а также их приложениями в теории систем и управления, исследовании операций, анализе данных, финансовой математике, биологии и др.

Цели и задачи учебной дисциплины

Цели учебной дисциплины «Выпуклая оптимизация»:

1. формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
2. формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
3. формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений;
4. формирование у студентов знаний в области теории и современных методов решения выпуклых задач оптимизации,
5. формирование у студентов навыков определения принадлежности прикладной задачи к изучаемому классу и выбора наиболее подходящего метода решения.

Задачи учебной дисциплины «Выпуклая оптимизация»:

1. освоение базовых понятий, концепций, методов в области выпуклой оптимизации;
2. формирование представлений об эффективных методах решения и навыков обоснованного выбора наиболее подходящего алгоритма, учитывающего особенности предлагаемых задач;
3. практическое освоение программных средств решения задач выпуклой оптимизации.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Выпуклая оптимизация» относится к **дисциплинам специализации** компонента учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины модуля «Математический анализ», дисциплины «Линейная алгебра», «Методы оптимизации». Сведения из дисциплины «Выпуклая оптимизация» являются базовыми для изучения следующих дисциплин специализации: «Оптимальное управление в экономической теории», «Программные средства решения задач оптимизации», «Оптимизация многошаговых процессов». Также служат базой для выполнения курсовых и дипломных работ.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Выпуклая оптимизация» должно обеспечить формирование следующей **универсальной компетенции**:

УК. Решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе применения информационно-коммуникационных технологий.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основы выпуклого анализа;
- формулировки задач выпуклой оптимизации: линейное, квадратичное, полуопределенное, коническое программирование;
- результаты теории двойственности и условий оптимальности для задач выпуклой оптимизации;

уметь:

- формулировать прикладные задачи как задачи выпуклого программирования и обосновывать выбор метода их решения;
- применять методы решения на практике и анализировать полученные результаты;

иметь навыки:

- решения и анализа задач линейного, квадратичного, полуопределенного программирования, задач оптимизации на конусах второго порядка с применением современных методов оптимизации;
- применения средств и инструментов Matlab, CXV для моделирования и численного решения задач структурной выпуклой оптимизации.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Выпуклая оптимизация» отведено:

- для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины 3 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

ВВЕДЕНИЕ

Задачи выпуклой оптимизации и их приложения. Историческая справка. Цели и задачи курса. Основные математические конструкции, используемые в курсе, сведения из линейной алгебры.

РАЗДЕЛ 1. ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ И ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ

Тема 1.1 Выпуклые множества

Выпуклые множества. Аффинные множества. Выпуклые конусы. Аффинные, выпуклые, конические оболочки. Примеры. Операции, сохраняющие выпуклость. Разделяющая и опорная гиперплоскость. Теоремы отделимости. Конус второго порядка и конус неотрицательно определенных матриц. Обобщенные неравенства. Двойственные конусы, двойственные обобщенные неравенства.

Тема 1.2. Выпуклые функции

Выпуклые функции. Свойства выпуклых функций, операции, сохраняющие выпуклость. Эпиграф функции, свойства эпиграфа выпуклой функции. Дифференциальные критерии выпуклой функции. Поляры. Сильно выпуклые функции, свойства сильно выпуклых функций.

Тема 1.3. Задачи выпуклой оптимизации

Общая формулировка задачи математической оптимизации. Классификация задач. Выпуклая оптимизация. Эквивалентные преобразования выпуклых задач. Линейное программирование. Квадратичное программирование. Коническое программирование. Оптимизация на конусах второго порядка (CQP) и полуопределенное программирование (SDP). Прикладные задачи: задачи аппроксимации, регрессии, робастное линейное программирование, экстремальные эллипсоиды. Полуопределенное программирование в теории управления. Оптимизация портфелей.

РАЗДЕЛ 2. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Тема 2.1. Теория двойственности

Функция Лагранжа. Двойственная задача. Слабая двойственность. Сильная двойственность. Условия регулярности Слейтера. Теорема об альтернативах для выпуклых функций. Прикладные аспекты теории двойственности. Комбинаторные задачи и их релаксации.

Тема 2.2 Условия оптимальности

Условия оптимальности для выпуклой задачи в абстрактной форме и на простейших множествах. Условия оптимальности в терминах седловой точки. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера. Анализ чувствительности.

Тема 2.3. Двойственность в коническом программировании

Линейное программирование: двойственность и оптимальность. Двойственность в квадратичном программировании. Сопряженные конусы, двойственные обобщенные неравенства. Двойственность в коническом программировании. Двойственность и оптимальность в SOCP и SDP.

РАЗДЕЛ 3. МЕТОДЫ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ

Тема 3.1. Методы Ньютона

Методы спуска: общие правила выбора направления и шага. Метод Ньютона для задач безусловной минимизации. Метод Ньютона в задаче с ограничениями-равенствами. Анализ сходимости. Обобщение метода Ньютона на случай старта из недопустимой точки.

Тема 3.2. Методы внутренней точки

Барьерная модель. Центральная траектория. Прямой метод внутренней точки. Анализ сходимости. Методы первой фазы. Прямо-двойственный метод внутренней точки. Метод внутренней точки для решения задач линейного и квадратичного программирования.

Тема 3.3. Решение задач выпуклой оптимизации в Matlab/CVX

Основы синтаксиса CVX. Правила составления выпуклых функций. Моделирование в CVX. Двойственные переменные. Режим полуопределенной оптимизации. Решение прикладных задач с помощью CVX.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия		
	Введение	4			
1	Выпуклый анализ и выпуклые задачи				
1.1	Выпуклые множества	4	4		Устный опрос. Решение задач
1.2	Выпуклые функции	4	4		Расчетно-графическое задание №1
1.3	Задачи выпуклой оптимизации	4	4		Устный опрос. Решение задач.
2	Теория двойственности				
2.1	Теория двойственности	2	4		Устный опрос. Решение задач
2.2	Условия оптимальности	4	4	2	Расчетно-графическое задание №2
2.3	Двойственность в коническом программировании	2	4		Контрольная работа
3	Методы внутренней точки				
3.1	Методы Ньютона	4	2		Устный опрос
3.2	Методы внутренней точки	4	2	2	Расчетно-графическое задание №3
3.3	Решение задач выпуклой оптимизации в Matlab/CVX	2	2		Решение задач
	Итого	34	30	4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Методы оптимизации : электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актuarная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.] ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск : БГУ, 2020. – 203 с. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/243989>.

2. Выпуклая оптимизация : учебное пособие / Е.А. Воронцова, Р.Ф. Хильдебранд, А.В. Гасников, Ф.С. Стонякин. – Москва : МФТИ, 2021. – 364 с. Электронный доступ – <https://arxiv.org/pdf/2106.01946.pdf>

3. Галеев, Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач : учебное пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" / Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – Изд. 2-е, испр. – Москва : ЛЕНАНД : URSS, 2023. – 204 с.

4. Бахтин, В. И. Конечномерные экстремальные задачи : [гладкие, линейные, выпуклые] : учебное пособие для студ. учреждений высшего образования по математическим специальностям / В. И. Бахтин, А. В. Лебедев. – Москва : ЛЕНАНД : URSS, 2023. – 108 с.

Дополнительная литература

5. Boyd, S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe – Cambridge University press, 2004.

6. Wright, S.J. Numerical optimization / S.J. Wright, J. Nocedal – Springer, 1999.

7. Нестеров Ю.Е. Методы выпуклой оптимизации / Ю.Е. Нестеров – М.: МЦНМО, 2010.

8. Гасников, А.В. Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска : учебное пособие / А. В. Гасников. – М.: МФТИ, 2018. – 291 с. Электронный доступ – <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1711/1711.00394.pdf>

Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для диагностики компетенций используются следующие формы:

Устная форма:

– устный опрос.

Письменная форма:

– контрольная работа;

– расчетно-графические задания.

Устно-письменная форма:

– решение задач;

– экзамен по учебной дисциплине.

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Выпуклая оптимизация» предусматривается изложение теории с включением проблемного подхода к изучению отдельных тем.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Выпуклая оптимизация» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- устный опрос – 10 %;
- расчетно-графические задания – 60 %;
- контрольная работа – 30 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) – 40 % и отметки на экзамене – 60 %.

Перечень используемых средств диагностики результатов управляемой самостоятельной работы студентов: расчетно-графические задания с использованием ЭВМ.

Примерный перечень заданий управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 2.2. «Условия оптимальности». (2 ч)

Задание 1. По заданной прямой задаче построить двойственную задачу (по вариантам индивидуальных заданий)

Задание 2. Проанализировать решение пары задач (по вариантам индивидуальных заданий).

Форма контроля – Расчетно-графическое задание №2.

Тема 3.2. «Методы внутренней точки». (2 ч)

Задание 1. Реализовать метод внутренней точки для задачи линейного или квадратичного программирования.

Задание 2. Провести численные эксперименты для ряда модельных задач с анализом результата и обоснованными выводами об эффективности методов.

Форма контроля – Расчетно-графическое задание №3.

Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

Метод учебной дискуссии, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

Метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении лабораторных заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- расчетно-графические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Выпуклые множества.
2. Разделяющая и опорная гиперплоскость. Теоремы отделимости.
3. Конусы.
4. Выпуклые функции.
5. Дифференциальные критерии выпуклой функции.
6. Методы исследования функций на выпуклость.
7. Сильно выпуклые функции
8. Классификация задач математического программирования.
9. Задачи выпуклой оптимизации. Примеры.
10. Линейное программирование. Примеры задач.
11. Квадратичное программирование. Примеры задач.
12. Коническое программирование. Примеры задач.
13. Двойственная задача.

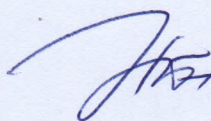
14. Слабая двойственность.
15. Сильная двойственность.
16. Комбинаторные задачи и их релаксации.
17. Условия оптимальности для выпуклой задачи в абстрактной форме.
18. Условия оптимальности для выпуклой задачи в терминах седловой точки.
19. Условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера.
20. Линейное программирование: двойственность и оптимальность.
21. Двойственность в квадратичном программировании.
22. Двойственность в коническом программировании.
23. Классификация численных алгоритмов решения задач оптимизации, основные принципы построения итеративных алгоритмов.
24. Метод Ньютона для задач безусловной минимизации.
25. Метод Ньютона в задаче с ограничениями-равенствами.
26. Анализ сходимости метода Ньютона.
27. Обобщение метода Ньютона на случай старта из недопустимой точки.
28. Прямой метод внутренней точки.
29. Прямо-двойственный метод внутренней точки.
30. Метод внутренней точки для решения задач линейного программирования.
31. Метод внутренней точки для решения задач квадратичного программирования.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой методов
оптимального управления

Белорусского государственного университета,
кандидат физико-математических наук, доцент



Н.М. Дмитрук

22.05.2024

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
____ (протокол № ____ от ____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)