Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 86–96
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 86–96
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-86-96, EDN: RKHCCU

Научная статья
УДК 534/539

О влиянии поверхностных напряжений и инерции на собственные низкочастотные колебания упругой ультратонкой полосы-балки

Г. И. Михасев[1✉], **Н. Д. Ле**[2]

[1]Харбинский политехнический университет, Китай, 150001, г. Харбин, ул. Вест Дажи, д. 92
[2]Белорусский государственный университет, Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4

Михасев Геннадий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор Международного центра прикладной механики, Школа астронавтики, mikhasev@hit.edu.cn, https://orcid.org/0000-0002-9409-9210, AuthorID: 385995

Ле Нгуен Динь, аспирант кафедры био- и наномеханики, dinhnguyen081017@gmail.com

Аннотация. Выведено дифференциальное уравнение, описывающее свободные длинноволновые колебания низкоразмерной упругой изотропной полосы-балки с учетом эффектов на свободных поверхностях. Граничные условия на внешних поверхностях формулируются в рамках теории упругости Гуртина – Мурдоха, которая учитывает поверхностные инерцию и касательные напряжения, включая остаточные. Вводятся дополнительные геометрические размеры, ассоциированные с лицевыми поверхностями, которые предполагаются малыми по сравнению с основным геометрическим размером — длиной волны. В качестве основного малого параметра рассматривается отношение толщины ультратонкой полосы к длине волны изгибных колебаний. Методом асимптотического интегрирования двухмерных уравнений теории упругости по толщине полосы-балки в явном виде получены соотношения для перемещений и напряжений в объеме полосы. Основным результатом работы является дифференциальное уравнение низкочастотных колебаний балки, которое учитывает поверхностные эффекты и обобщает хорошо известные уравнения теории балок. Показано, что наличие поверхностных напряжений приводит к увеличению собственных частот из нижнего спектра, в то время как учет поверхностной инерции, равно как и поперечных сдвигов в объеме, влечет снижение частот.

Ключевые слова: ультратонкая полоса-балка, поверхностная упругость, длинноволновая асимптотика, собственные частоты

Для цитирования: *Михасев Г. И., Ле Н. Д.* О влиянии поверхностных напряжений и инерции на собственные низкочастотные колебания упругой ультратонкой полосы-балки // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 86–96. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-86-96, EDN: RKHCCU

Article

On the influence of surface stresses and inertia on the natural low-frequency vibrations of an elastic ultrathin strip-beam

G. I. Mikhasev[1✉], **N. D. Le**[2]

[1]Harbin Institute of Technology, 92 West Dazhi St., Harbin 150001, China
[2]Belarusian State University, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk 220030, Belarus

Gennadi I. Mikhasev, mikhasev@hit.edu.cn, https://orcid.org/0000-0002-9409-9210, AuthorID: 385995

Nguyen D. Le, dinhnguyen081017@gmail.com

Abstract. A differential equation is derived that describes free long-wave vibrations of a low-dimensional elastic isotropic strip-beam, taking into account effects on free surfaces. Boundary conditions on external surfaces are formulated within the framework of the Gurtin – Murdoch surface theory of elasticity, which takes into account surface inertia and shear stresses, including residual ones. Additional geometric dimensions are introduced, associated with the face surfaces, which are assumed to be small compared to the main geometric dimension — the wavelength. The ratio of the thickness of the ultrathin strip to the wavelength of bending vibrations is considered as the main small parameter. Using the method of asymptotic integration of two-dimensional equations of the theory of elasticity over the thickness of the strip-beam, relations for displacements and stresses in the volume of the strip were obtained in explicit form. The main result of the paper is a differential equation for low-frequency vibrations of a beam, which takes into account surface effects and generalizes the well-known equations of beam theory. It is shown that the presence of surface stresses leads to an increase in natural frequencies from the lower spectrum, while taking into account surface inertia, as well as transverse shears in volume, leads to a decrease in frequencies.

Keywords: ultrathin strip-beam, surface elasticity, long-wave asymptotics, natural frequencies

For citation: Mikhasev G. I., Le N. D. On the influence of surface stresses and inertia on the natural low-frequency vibrations of an elastic ultrathin strip-beam. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 86–96 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-86-96, EDN: RKHCCU

Введение

Миниатюризация упругих балок и пластин как сенсорных элементов всевозможных МЭМС и НЭМС [1–3] делает актуальной задачу корректного моделирования механического поведения ультратонких упругих тел с учетом размерных эффектов. Экспериментальные исследования [4], а также теоретические работы, использующие законы термодинамики и методы атомистического моделирования [5–7], показали, что эффективные упругие свойства нанобалок и нанопластин сильно зависят от их размеров, что требует существенной модификации классической механики. Среди всевозможных подходов, учитывающих внутренний масштаб упругих микро- и нанообъектов, заметное место занимает модель поверхностной упругости Гуртина – Мурдоха [8]. Их использование при решении различных задач механики позволило получить ряд принципиально новых результатов (см. обзорную статью [9]). В частности, учет поверхностной энергии выявил существование антиплоских поверхностных волн с экспоненциальным [10–12] и гармоническим законами [13, 14] изменения амплитуды волн по толщине наноразмерного упругого слоя. Поверхностная теория упругости оказалась также очень эффективной для анализа наноструктурированных материалов. Так, в работах [9, 15] было показано, что эффективные свойства таких материалов существенно зависят от поверхностных модулей упругости. Также учет поверхностных напряжений выявил значительные изменения в распределении полей напряжений и перемещений в окрестности геометрических сингулярностей, таких как трещины [16].

Модели ультратонких балок и пластин на основе поверхностной теории упругости Гуртина – Мурдоха [8] предлагались разными авторами [17–21]. В первую очередь, отметим работы Лима и Хе [17], а также Лу и Хе [18], которые, по-видимому, первыми вывели модифицированные уравнения для пластин, соответствующие как классической теории Кирхгофа, так и теории первого порядка типа Миндлина. В основу своих моделей они положили гипотезы о линейном распределении нормальных напряжений по толщине пластины с учетом наличия касательных поверхностных напряжений и ненулевых проекций остаточных напряжений на нормаль к срединной поверхности. Вводя гипотезы о нелинейном распределений касательных напряжений, но основываясь на градиентной теории упругости, авторы статей [19, 21] предложили модели для нанопластин и нанобалок. Уравнения третьего порядка, предполагающие кубический закон распределения напряжений сдвига по толщине пластины и учитывающие наличие касательных напряжений на поверхности, получены в [20]. Отмечая существенный вклад упомянутых исследований в построение моделей низкоразмерных балок и пластин с учетом поверхностных эффектов, все же отметим, что подходы, основанные на введении кинематических гипотез, сужают рамки применимости этих моделей, ибо не отражают реального распределения напряжений по толщине ультратонкого упругого тела.

Значительный вклад в развитие теории тонкостенных оболочек с учетом поверхностной энергии сделан авторами работ [22, 23]. В частности, Альтенбахом и Еремеевым [22] предложена модель нанооболочки, основанная на теории Коссерат и учитывающая наличие поверхностных напряжений. Уравнения физического состояния, обобщающие уравнения Гуртина – Мурдоха, получены в работе [23], а также изучено влияние поверхностной вязкоупругости на эффективные свойства наноразмерных тонкостенных структур.

Не претендуя на полноту анализа работ по теме статьи, заметим, что во всех исследованиях отмечается, что учет поверхностных напряжений приводит к существенному перераспределению, в первую очередь, касательных напряжений по толщине ультратонкого объекта. Однако данные качественно правильные выводы делаются в основном в результате реализации моделей, которые априори строятся на основе принимаемых гипотез о распределении нормальных напряжений и тангенциальных перемещений. Укажем также на отсутствие детального анализа влияния на динамику ультратонких тел таких характеристик, как отношение поверхностных модулей Ламе λ_0, μ_0 и плотности ρ_0 к соответствующим упругим константам и плотности материала в объеме тела.

Цель данной работы: 1) исходя из двухмерных уравнений теории упругости, построить асимптотически корректную модель, описывающую распределение полей перемещения и напряжений в ультратонкой полосе-балке при свободных длинноволновых колебаниях с учетом поверхностных эффектов; 2) вывести дифференциальное уравнение, предсказывающее свободные низкочастотные колебания ультратонкой полосы-балки, и выполнить асимптотический анализ влияния относительных характеристик поверхностных упругих констант и плотности на нижний спектр собственных частот.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ультратонкую пластинку толщиной h, занимающую область $\mathcal{D} = \{0 \leqslant x_1 \leqslant l, 0 \leqslant x_2 \leqslant h, |x_3| \leqslant \infty\}$ и изготовленную из упругого изотропного материала, характеризующегося параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ. В объеме пластинки реализуется плоское деформированное состояние с вектором перемещения $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, 0\}$, где компоненты $U_1 = U_1(x_1, x_2, t)$ и $U_2 = U_2(x_1, x_2, t)$ суть функции координат x_1, x_2 и времени t. Лицевые поверхности пластинки покрыты нанопленкой, механические свойства которой в рамках поверхностной теории Гуртина – Мурдоха определяются поверхностными параметрами Ламе $\mu_0^{\pm}, \lambda_0^{\pm}$ и поверхностной плотностью $\rho_0^{\pm}$. Здесь и ниже знаки $^+$ и $^-$ указывают на принадлежность параметра (либо поверхностных напряжений) верхней и нижней поверхностям соответственно. Далее область $\mathcal{D}$ заменяем ультратонкой полосой-балкой длиной l.

Пусть Ξ_{ij}, E_{ij} — компоненты тензора напряжений и тензора малых деформаций в объеме соответственно, где $i, j = 1, 2$, а $S_{11}^{\pm}, S_{12}^{\pm}$ — поверхностные напряжения. С целью исследовать собственные колебания с частотой ω введем разделение переменных

$$\left\{\Xi_{ij}, E_{ij}, U_i, S_{11}^{\pm}, S_{12}^{\pm}\right\} = \left\{\sigma_{ij}(x_1, x_2), e_{ij}(x_1, x_2), u_i(x_1, x_2), s_{11}^{\pm}(x_1), s_{12}^{\pm}(x_1)\right\}.\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{1}$$

Уравнения малых колебаний полосы-балки в плоскости $x_1 x_2$ принимают вид

$$\sigma_{ij,j} + \omega^2 \rho u_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{2}$$

где $\sigma_{ij} = \lambda e_{\iota\iota}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$, а $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$. Здесь и ниже запятая означает дифференцирование по соответствующей координате, следующей после запятой.

На лицевых поверхностях рассмотрим граничные условия, учитывающие наличие поверхностных напряжений и инерции [8]:

$$\begin{aligned} &s^{+}_{11,1} - \sigma_{12} + \omega^2 \rho^{+}_0 u_1 = 0, \quad s^{+}_{12,1} - \sigma_{22} + \omega^2 \rho^{+}_0 u_2 = 0, \quad \text{при} \quad x_2 = h, \\ &s^{-}_{11,1} + \sigma_{12} + \omega^2 \rho^{-}_0 u_1 = 0, \quad s^{-}_{12,1} + \sigma_{22} + \omega^2 \rho^{-}_0 u_2 = 0, \quad \text{при} \quad x_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть $s^{\pm}_0$ — остаточные поверхностные напряжения на лицевых поверхностях (при недеформированном состоянии полосы), которые считаем постоянными, не зависящими от x_1 и времени. Тогда в соответствии с законом физического состояния теории упругости Гуртина – Мурдоха поверхностные напряжения в результате деформирования полосы-балки находятся по формулам [8]

$$s^{\pm}_{11} = s^{\pm}_0 + (\lambda^{\pm}_0 + 2\mu^{\pm}_0) u^{\pm}_{1,1}, \quad s^{\pm}_{12} = s^{\pm}_0 u^{\pm}_{2,1}, \tag{4}$$

где знаки $\pm$ при производных компонент перемещения означают, что эти производные вычисляются на поверхностях.

Введем дополнительные геометрические размеры, ассоциированные со свободными поверхностями (либо с нанопокрытием):

$$L^{\pm}_1 = (\lambda^{\pm}_0 + 2\mu^{\pm}_0)/E, \quad L^{\pm}_2 = s^{\pm}_0/E, \quad L^{\pm}_3 = \rho^{\pm}_0/\rho, \tag{5}$$

где через E обозначен модуль Юнга полосы-балки в объеме. В работах [13, 14] показано, что влияние поверхностных напряжений и инерции на скорость антиплоских поверхностных волн сильно зависит от порядка величин (5). Например, для свободной поверхности железа [8, 11] имеют место оценки $L_1 \sim 10^{-11}$ м и $L_3 \sim 10^{-9}$ м, а для железной нанопленки 10^3 Å на стеклянной подложке [11] — $L_1 \sim L_3 \sim 10^{-7}$ м.

Введем следующие асимптотические оценки:

$$L^{\pm}_n/l = \varepsilon^{\alpha_n} \kappa^{\pm}_n, \quad n = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где $\varepsilon = h/l$ — малый параметр, $0 < \kappa^{\pm}_n \sim 1$, а положительные параметры α_n показывают степень малости внутренних геометрических характеристик свободных поверхностей по сравнению с внешним характерным размером (длинной волны/балки). Очевидно, что показатели α_n сильно зависят от материала свободной поверхности, толщины нанопокрытия и остаточных напряжений. Выбор данных параметров, соответствующих реальной физической задаче, влияет на порядок поверхностных эффектов, которые проявляются в том или ином приближении предлагаемой ниже асимптотической конструкции решения задачи. В нашем случае примем $\alpha_1 = \alpha_3 = 3$ и $\alpha_2 = 5$, что, например, соответствует железной нанопленке 10^3 Å на стеклянной подложке при соответствующем выборе геометрических параметров h, l и остаточных поверхностных напряжений $s^{\pm}_0$. При этом вторая оценка в (6) при $\alpha_2 = 5$ означает малость остаточного поверхностного напряжения по сравнению с поверхностными параметрами Ламе нанопленки. Другие варианты физически допустимых показателей α_n будут кратко рассмотрены ниже.

Введем безразмерные величины

$$\{x_1, x_2\} = \{lx, hy\}, \quad \{u_1, u_2\} = h\left\{\varepsilon^{-3} u,\, \varepsilon^{-4} w\right\}, \quad \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\} = E\left\{\varepsilon^{-1}\tau,\, \sigma\right\}. \tag{7}$$

Выбранные в (7) порядки компонент вектора перемещения и тензора напряжений соответствуют случаю длинноволновых колебаний полосы-балки [24, 25].

С учетом выполненного масштабирования уравнения движения полосы совместно с уравнениями физического состояния перепишутся в виде

$$\begin{aligned} &w_{,y} = -\varepsilon^2 c_v u_{,x} + \varepsilon^4 c_3 \sigma, \quad u_{,y} = -w_{,x} + \varepsilon^2 c_g \tau, \\ &\tau_{,y} = -c_0 u_{,xx} - \varepsilon^2 c_v \sigma_{,x} - \varepsilon^2 \omega^2 \omega_*^{-2} u, \quad \sigma_{,y} = -\tau_{,x} - \omega^2 \omega_*^{-2} w, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$c_0 = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{E(\lambda+2\mu)}, \quad c_v = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}, \quad c_g = \frac{E}{\mu}, \quad c_3 = \frac{E}{\lambda+2\mu}, \quad \omega_*^2 = \frac{\varepsilon^4 E}{h^2\rho}, \tag{9}$$

а граничные условия на свободных поверхностях принимают вид

$$\begin{aligned} \tau &= \pm\varepsilon^2\left(\kappa_1^{\pm}u_{,xx} + \varepsilon^2\frac{\omega^2}{\omega_*^2}\kappa_3^{\pm}u\right) \quad \text{при} \quad y = 1, 0, \\ \sigma &= \pm\varepsilon^2\left(\kappa_2^{\pm}w_{,xx} + \frac{\omega^2}{\omega_*^2}\kappa_3^{\pm}w\right) \quad \text{при} \quad y = 1, 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, мы пришли к краевой задаче (8), (10).

2. Асимптотическое интегрирование краевой задачи

Поставим задачу о выводе соотношений, описывающих динамическое НДС низкоразмерной полосы-балки при изгибных длинноволновых колебаниях вне зависимости от вида граничных условий на ее краях. Решение ищем в виде формальных асимптотических рядов

$$\begin{aligned} w &= w_0 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots, \quad u = u_0 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \\ \tau &= \tau_0 + \varepsilon^2 \tau_2 + \ldots, \quad \sigma = \sigma_0 + \varepsilon^2\sigma_2 + \ldots. \end{aligned} \tag{11}$$

Подстановка (11) в (8) и (10) приводит к ряду краевых задач, которые могут быть рассмотрены последовательно. Задача главного (нулевого) приближения является однородной, и ее решение представимо функциями

$$\begin{aligned} u_0 &= -\tfrac{1}{2}(2y-1)w_{0,\,x} + a_1 x + a_0, \quad \tau_0 = \tfrac{1}{2}c_0(y^2 - y)w_{0,\,xxx}, \\ \sigma_0 &= -\tfrac{1}{12}c_0(2y^3 - 3y^2)w_{0,\,xxxx} - (\omega/\omega_*)^2 y w_0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $w_0(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}w_0 \equiv \tfrac{1}{12}c_0 w_{0,\,xxxx} - (\omega/\omega_*)^2 w_0 = 0, \tag{13}$$

описывающее свободные изгибные колебания балки в рамках классической теории, основанной на гипотезах Бернулли – Эйлера. Константы a_0, a_1, фигурирующие в (12), зависят от выбора граничных условий на торцах полосы-балки. Однако если полоса бесконечна либо граничные условия для u и σ_{11} однородны, то $a_0 = a_1 = 0$. Далее константы a_0, a_1 опускаем.

Рассмотрим следующее приближение, порождающее неоднородные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} w_{2,\,y} &= -c_v u_{0,\,x}, \quad u_{2,\,y} = -w_{2,\,x} + c_g\tau_0, \\ \tau_{2,\,y} &= -c_0 u_{2,\,xx} - c_v\sigma_{0,\,x} - (\omega/\omega_*)^2 u_0, \quad \sigma_{2,\,y} = -\tau_{2,\,x} - (\omega/\omega_*)^2 w_2, \end{aligned} \tag{14}$$

а также соответствующие неоднородные граничные условия

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \pm\kappa_1^{\pm}u_{0,\,xx} \quad \text{при} \quad y = 1, 0, \\ \sigma_2 &= \pm\left[\kappa_2^{\pm}w_{0,\,xx} + (\omega/\omega_*)^2\kappa_3^{\pm}w_0\right] \quad \text{при} \quad y = 1, 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Интегрируя сначала первое, а затем второе из уравнений (14), находим

$$\begin{aligned} w_2 &= \tfrac{1}{2}c_v(y^2 - y)w_{0,\,xx} + w_{20}(x), \\ u_2 &= \tfrac{1}{12}c_4(2y^3 - 3y^2)w_{0,\,xxx} - w_{20,\,x}y + u_{20}(x), \end{aligned} \tag{16}$$

где $c_4 = (3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu)$, а $w_{20}(x), u_{20}(x)$ — новые неизвестные функции.

Интегрируя третье уравнение системы (14) по y и удовлетворяя граничным условиям $(15)_1$ при $y = 0, 1$, получаем поправку к касательному напряжению

$$\tau_2 = -\frac{c_0}{12}(y^4 - 2y^3 + y)w_0^V - \frac{1}{2}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y + \kappa_1^-]w_0''' + \frac{\omega^2 c_0 c_g}{4\omega_*^2}(y^2 - y)w_0' + \frac{c_0}{2}(y^2 - y)w_{20}''', \quad (17)$$

а также неоднородное дифференциальное уравнение относительно u_{20}

$$c_0 u_{20}'' = \frac{c_0}{12}w_0^V + \frac{1}{2}(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)w_0''' - \frac{\omega^2}{4\omega_*^2}(2 - c_0 c_g)w_0' + \frac{1}{2}c_0 w_{20}'''. \quad (18)$$

Наконец рассмотрим последнее уравнение системы (14). Подставляя в правую часть найденные выше функции w_2 и τ_2 и затем интегрируя по толщине полосы с учетом граничных условий $(15)_2$ на лицевых поверхностях, приходим к дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции w_{20}

$$\begin{aligned}\frac{c_0}{12}w_{20}^{IV} - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}w_{20} = &-\frac{c_0}{60}w_0^{VI} - \frac{1}{4}(\kappa_1^+ + \kappa_1^-)w_0^{IV} + \\ &+ \left(\kappa_2^+ + \kappa_2^- - \frac{\omega^2 c_6}{12\omega_*^2}\right)w_0'' + \frac{\omega^2}{\omega_*^2}(\kappa_3^+ + \kappa_3^-)w_0,\end{aligned} \quad (19)$$

а также к поправке для нормального напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_2 = &\frac{c_0}{120}(2y^5 - 5y^4 + 5y^2)w_0^{VI} + \frac{1}{4}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y^2 + 2\kappa_1^- y]w_0^{IV} - \\ &- \left[\frac{\omega^2 c_6}{12\omega_*^2}(2y^3 - 3y^2) + \kappa_2^-\right]w_0''' - \frac{\omega^2\kappa_3^-}{\omega_*^2}w_0 - \frac{c_0}{12}(2y^3 - 3y^2)w_{20}^{IV} - \frac{\omega^2}{\omega_*^2}y w_{20}.\end{aligned} \quad (20)$$

Формально процесс нахождения неизвестных, входящих в разложения (11), можно продолжить неограниченно, получая при этом поправки для перемещений и напряжений как функций координат x, y. Если ограничиться двумя приближениями, то получаем, что перемещения w и u — полиномы второго и третьего порядков поперечной координаты y, а напряжения τ и σ — полиномы четвертого и пятого порядков соответственно. Таким образом, найденные здесь поля перемещений и напряжений существенно отличаются от аналогичных полей в работах, основанных на введении кинематических гипотез [17–19].

3. Уравнение изгибных колебаний полосы-балки

Обозначим через $W = w_0(x) + \varepsilon^2 w_2(x, 1/2)$ амплитуду перемещений срединной линии полосы-балки. Принимая во внимание $(16)_1$, находим

$$W(x,t) = w_0 + \varepsilon^2\left(w_{20} - \frac{1}{8}c_v w_0''\right). \quad (21)$$

Применим к обеим частям равенства (21) оператор $\mathcal{L}$ (см. (13)) и учтем (19). В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{c_0}{12} + \frac{\varepsilon^2\kappa_1}{4}\right)W^{IV} + \varepsilon^2\left[\eta\left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12}\right) - \kappa_2\right]W'' - \eta(1 + \varepsilon^2\kappa_3)W + O(\varepsilon^4) = 0, \quad (22)$$

где $\eta = \omega^2/\omega_*^2$ — искомое собственное значение, зависящее от выбора граничных условий на торцах балки, а $\kappa_1 = \kappa_1^+ + \kappa_1^-$, $\kappa_2 = \kappa_2^+ + \kappa_2^-$, $\kappa_3 = \kappa_3^+ + \kappa_3^-$. Слагаемые в (22), содержащие искомый частотный параметр η, в совокупности представляют собой безразмерный аналог модифицированного оператора инерции [26].

Уравнение (22) обобщает известные уравнения изгибных колебаний балки. При $\varepsilon = 0$ получаем уравнение, основанное на гипотезах Бернулли – Эйлера. Если игнорировать поверхностные эффекты, полагая $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_2 = 0$, то приходим к уравнению типа Тимошенко [27], учитывающему поперечные сдвиги.

Заметим, что уравнение (22) справедливо для бесконечной полосы. Однако оно может быть использовано и для конечной длины полосы-балки в случае, если перемещения u_1 либо напряжения σ_{11} на торцах принимаются равными нулю. В последнем случае граничные условия на торцах формулируются в терминах нормального перемещения W, которые совпадают с классическими граничными условиями для балки Бернулли – Эйлера.

Далее для оценки влияния поверхностных напряжений и инерции на нижний спектр собственных частот рассмотрим шарнирно опертую полосу-балку длиной l. Принимая собственную форму колебаний в виде $W = \sin \pi n x$, где n — число полуволн, и подставляя в (22), приходим к простой формуле для серии собственных значений

$$\eta_n = \frac{\left(\frac{c_0}{12} + \frac{\varepsilon^2 \kappa_1}{4}\right)(\pi n)^4 + \varepsilon^2 (\pi n)^2 \kappa_2}{1 + \varepsilon^2 \left[(\pi n)^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12}\right) + \kappa_3\right]} + O(\varepsilon^4), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{23}$$

Последняя показывает, что учет поверхностных напряжений (как вызванных деформацией полосы в объеме, так и остаточного, с параметрами κ_1 и κ_2 соответственно) приводит к росту собственных частот из нижнего спектра по сравнению с частотами балки Бернулли – Эйлера. И наоборот, наличие параметра κ_3, учитывающего поверхностную инерцию, а также слагаемого $(\pi n)^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12}\right)$, учитывающего поперечные сдвиги, снижает частоты.

4. Допустимые случаи сильных поверхностных эффектов

Напомним, что уравнение (22) выведено для случая, когда $\alpha_1 = \alpha_3 = 3$ и $\alpha_2 = 5$, что, в частности, соответствует стеклянной полосе-балке с предварительно напряженным покрытием из железа 10^3 Å. Формально можно принять значения α_n меньшими вышерассмотренных, чтобы влияние поверхностных эффектов проявлялось уже в главном приближении. Однако это не всегда соответствует физически допустимым значениям толщины h ультратонкой полосы.

Рассмотрим кратко два допустимых варианта: а) $\alpha_n = 3$ для $n = 1, 2, 3$; б) $\alpha_1 = 3$, $\alpha_3 = 1$, $s_0^\pm = 0$. Случай а) соответствует наличию сильных остаточных напряжений на лицевых поверхностях (например, в железной нанопленке на стекле), а вариант б) имеет место для железной нанопроволоки со свободной поверхностью без остаточных напряжений. Здесь граничное условие $(10)_2$ для σ_0 становится неоднородным, что в главном приближении приводит к модифицированным уравнениям

$$\tfrac{1}{12} c_0 w_0^{IV} - \kappa_2 w_0'' - \eta w_0 = 0, \tag{24}$$

$$\tfrac{1}{12} c_0 w_0^{IV} - \eta (1 + \kappa_3) w_0 = 0 \tag{25}$$

с сериями собственных значений (при шарнирном опирании торцов) $\eta_n = c_0(\pi n^4)/12 + (\pi n)^2 \kappa_2 + O(\varepsilon^2)$ и $\eta_n = c_0(\pi n^4)/[12(1 + \kappa_3)] + O(\varepsilon^2)$ для случаев а) и б) соответственно. Поправки к собственным значениям η_n пропорциональные $\varepsilon^2 \kappa_1$, которые учитывают поверхностные напряжения, вызванные деформированием балки в объеме, находятся из рассмотрения первого приближения подобно тому, как это было сделано выше. Опуская детали построения данного приближения, заметим лишь, что структура формулы для собственных частот остается подобной (23). При этом влияние сильных остаточных напряжений и поверхностной инерции на нижний спектр собственных частот ультратонкой полосы-балки качественно остается таким же, как и в случае, рассмотренном в предыдущем разделе.

Заключение

Методом асимптотического интегрирования двухмерных уравнений теории упругости с малым параметром, характеризующим тонкостенность полосы-балки по сравнению с длинной волны, в явном виде выведены соотношения для перемещений и напряжений в объеме с учетом поверхностных эффектов. Данные поля перемещений и напряжений существенно отличаются от аналогичных полей, полученных в литературе на основе введения кинематических гипотез. Выведено дифференциальное уравнение, которое учитывает наличие поперечных сдвигов в объеме, а также поверхностных напряжений и инерционных эффектов. Показано, что влияние поверхностных напряжений и инерции на нижний спектр колебаний сильно зависит от соотношения поверхностных характеристик и соответствующих параметров в объеме полосы. В качестве примера рассмотрены ультратонкая полоса-балка, изготовленная из стекла с нанопленкой железа 10^3 Å, а также ультратонкая железная полоса-балка (нанопроволока) свободная от остаточных напряжений. Установлено, что учет поверхностных напряжений, как остаточных, так и вызванных деформированием в объеме, приводит к увеличению собственных частот по сравнению с частотами, найденными по модели Тимошенко, и, наоборот, наличие поверхностных инерционных эффектов влечет снижение частот из нижнего спектра.

Предложенная процедура асимптотического интегрирования уравнений движения полосы-балки может быть обобщена на случай ультратонких трехмерных тел с целью моделирования длинноволновых изгибных колебаний наноразмерных пластин и оболочек с учетом поверхностных эффектов.

Список литературы

1. *Lavrik N. V., Sepaniak M. J., Datskos P. G.* Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors // Review of Scientific Instruments. 2004. Vol. 75. P. 2229–2253. https://doi.org/10.1063/1.1763252
2. *Zhang Y., Khan M., Huang Y., Ryou J., Deotare P., Dupuis R., Lončar M.* Photonic crystal nanobeam lasers // Applied Physics Letters. 2010. Vol. 97, iss. 5. Art. 051104. https://doi.org/10.1063/1.3475397
3. *Qiao Q., Xia J., Lee C., Zhou G.* Applications of photonic crystal nanobeam cavities for sensing // Micromachines. 2018. Vol. 9, iss. 11. Art. 541. https://doi.org/10.3390/mi9110541
4. *Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B.* Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy // Physical Review. B. 2004. Vol. 69, iss. 16. P. 165410–165415. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.165410
5. *Sun C. T., Zhang H.* Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials // Journal of Applied Physics. 2003. Vol. 93. P. 1212–1218. https://doi.org/10.1063/1.1530365
6. *Zhang H., Sun C. T.* Nanoplate model for platelike nanomaterials // AIAA Journal. 2004. Vol. 42, iss. 10. P. 2002–2009. https://doi.org/10.2514/1.5282
7. *Zhou L. G., Huang H.* Are surfaces elastically softer or stiffer? // Applied Physics Letters. 2004. Vol. 84, iss. 11. P. 1940–1942. https://doi.org/10.1063/1.1682698
8. *Gurtin M. E., Murdoch A. I.* Surface stress in solids // International Journal of Solids and Structures. 1978. Vol. 14, iss. 6. P. 431–440. https://doi.org/10.1016/0020-7683(78)90008-2
9. *Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T.* Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials // Acta Mechanica Solida Sinica. 2011. Vol. 24, iss. 1. P. 52–82. https://doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60009-8
10. *Achenbach J.* Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam, The Netherland : North Holland, 1973. 440 p.
11. *Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S.* Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy // Mechanics Research Communications. 2016. Vol. 74. P. 8–13. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.02.018
12. *Zhu F., Pan E., Qian Z., Wang Y.* Dispersion curves, mode shapes, stresses and energies of SH and Lamb waves in layered elastic nanoplates with surface/interface effect // International Journal of Engineering Science. 2019. Vol. 142. P. 170–184. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.003
13. *Mikhasev G. I., Botogova M. G., Eremeyev V. A.* Anti-plane waves in an elastic thin strip with

surface energy // Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2022. Vol. 380, iss. 2231. Art. 20210373. https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0373
14. *Mikhasev G. I., Erbas B., Eremeyev V. A.* Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space // International Journal of Engineering Science. 2023. Vol. 184. Art. 103809. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103809
15. *Mogilevskaya S. G., Zemlyanova A. Y., Kushch V. I.* Fiber- and particle-reinforced composite materials with the Gurtin – Murdoch and Steigmann – Ogden surface energy endowed interfaces // Applied Mechanics Reviews. 2021. Vol. 73. P. 1–18. https://doi:10.1115/1.4051880
16. *Gorbushin N., Eremeyev V. A., Mishuris G.* On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses // International Journal of Engineering Science. 2020. Vol. 146. Art. 103183. https://doi.or/10.1016/j.ijengsci.2019.103183
17. *Lim C. W., He L. H.* Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nano-scale thickness // International Journal of Mechanical Science. 2004. Vol. 46. P. 1715–1726. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2004.09.003
18. *Lu P., He L. H., Lee H. P., Lu C.* Thin plate theory including surface effects // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 4631–4647. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.07.036
19. *Lu L., Guoa X., Zhao J.* On the mechanics of Kirchhoff and Mindlin plates incorporating surface energy // International Journal of Engineering Science. 2018. Vol. 124. P. 24–40. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.11.020
20. *Zhou J., Lu P., Xue Y., Lu C.* A third-order plate model with surface effect based on the Gurtin – Murdoch surface elasticity // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 185. Art. 110606. https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110606
21. *Yang W., Wang S., Kang W., Yu T., Li Y.* A unified high-order model for size-dependent vibration of nanobeam based on nonlocal strain/stress gradient elasticity with surface effect // International Journal of Engineering Science. 2023. Vol. 182. Art. 103785. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103785
22. *Altenbach H., Eremeyev V. A.* On the shell theory on the nanoscale with surface stresses // International Journal of Engineering Science. 2011. Vol. 49, iss. 12. P. 1294–1301. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.011
23. *Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F.* Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale // International Journal of Engineering Science. 2012. Vol. 59. P. 83–89. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.03.004
24. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2017. Vol. 97, iss. 3. P. 296–308. https://doi.org/10.1002/zamm.201600052
25. *Mikhasev G., Botogova M., Le N.* Flexural deformations and vibrations of a three-layer beam-strip with a stiff core and soft skins // Progress in Continuum Mechanics / eds.: H. Altenbach, H. Irschik, A. Porubov. Cham : Springer, 2023. P. 265–282. (Advanced Structural Materials, vol. 196). https://doi.org/10.1007/978-3-031-43736-6_16
26. *Kaplunov J., Kossovitch L., Nolde E.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego : Academic Press, 1998. 226 p.
27. *Timoshenko S.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar // Philosophical Magazine Series. 1921. Vol. 6, iss. 245. P. 744–746. https://doi.org/10.1080/14786442108636264

References

1. Lavrik N. V., Sepaniak M. J., Datskos P. G. Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors. *Review of Scientific Instruments*, 2004, vol. 75, pp. 2229–2253. https://doi.org/10.1063/1.1763252
2. Zhang Y., Khan M., Huang Y., Ryou J., Deotare P., Dupuis R., Lončar, M. Photonic crystal nanobeam lasers. *Applied Physics Letters*, 2010, vol. 97, iss. 5, art. 051104. https://doi.org/10.1063/1.3475397
3. Qiao Q., Xia J., Lee C., Zhou G. Applications of photonic crystal nanobeam cavities for sensing.

Micromachines, 2018, vol. 9, iss. 11, art. 541. https://doi.org/10.3390/mi9110541

4. Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Physical Review. B*, 2004, vol. 69, iss. 16, pp. 165410–165415. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.165410
5. Sun C. T., Zhang H. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials. *Journal of Applied Physics*, 2003, vol. 93, pp. 1212–1218. https://doi.org/10.1063/1.1530365
6. Zhang H., Sun C. T. Nanoplate model for platelike nanomaterials. *AIAA Journal*, 2004, vol. 42, iss. 10, pp. 2002–2009. https://doi.org/10.2514/1.5282
7. Zhou L. G., Huang H. Are surfaces elastically softer or stiffer? *Applied Physics Letters*, 2004, vol. 84, iss. 11, pp. 1940–1942. https://doi.org/10.1063/1.1682698
8. Gurtin M. E., Murdoch A. I. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, vol. 14, iss. 6, pp. 431–440. https://doi.org/10.1016/0020-7683(78)90008-2
9. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2011, vol. 24, iss. 1, pp. 52–82. https://doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60009-8
10. Achenbach J. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam, The Netherland, North Holland, 1973. 440 p.
11. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy. *Mechanics Research Communications*, 2016, vol. 74, iss. 11, pp. 8–13. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.02.018
12. Zhu F., Pan E., Qian Z., Wang Y. Dispersion curves, mode shapes, stresses and energies of SH and Lamb waves in layered elastic nanoplates with surface/interface effect. *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 142, pp. 170–184. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.003
13. Mikhasev G. I., Botogova M. G., Eremeyev V. A. Anti-plane waves in an elastic thin strip with surface energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2022, vol. 380, iss. 2231, art. 20210373. https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0373
14. Mikhasev G. I., Erbas B., Eremeyev V. A. Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science*, 2023, vol. 184, art. 103809. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103809
15. Mogilevskaya S. G., Zemlyanova A. Y., Kushch V. I. Fiber- and particle-reinforced composite materials with the Gurtin – Murdoch and Steigmann – Ogden surface energy endowed interfaces. *Applied Mechanics Reviews*, 2021, vol. 73, pp. 1–18. https://doi:10.1115/1.4051880
16. Gorbushin N., Eremeyev V. A., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses. *International Journal of Engineering Science*, 2020, vol. 146, art. 103183. https://doi.or/10.1016/j.ijengsci.2019.103183
17. Lim C. W., He L. H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nano-scale thickness. *International Journal of Mechanical Science*, 2004, vol. 46, pp. 1715–1726. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2004.09.003
18. Lu P., He L. H., Lee H. P., Lu C. Thin plate theory including surface effects. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, pp. 4631–4647. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.07.036
19. Lu L., Guoa X., Zhao J. On the mechanics of Kirchhoff and Mindlin plates incorporating surface energy. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 124, pp. 24–40. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.11.020
20. Zhou J., Lu P., Xue Y., Lu C. A third-order plate model with surface effect based on the Gurtin – Murdoch surface elasticity. *Thin-Walled Structures*, 2023, vol. 185, art. 110606. https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110606
21. Yang W., Wang S., Kang W., Yu T., Li Y. A unified high-order model for size-dependent vibration of nanobeam based on nonlocal strain/stress gradient elasticity with surface effect. *International Journal of Engineering Science*, 2023, vol. 182, art. 103785. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103785
22. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses. *International Journal of Engineering Science*, 2011, vol. 49, iss. 12, pp. 1294–1301. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.011

23. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale. *International Journal of Engineering Science*, 2012, vol. 59, pp. 83–89. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.03.004
24. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko – Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 97, iss. 3, pp. 296–308. https://doi.org/10.1002/zamm.201600052
25. Mikhasev G., Botogova M., Le N. Flexural deformations and vibrations of a three-layer beam-strip with a stiff core and soft skins. In: Altenbach H., Irschik H., Porubov A. (eds.) *Progress in Continuum Mechanics*. Advanced Structural Materials, vol. 196. Cham, Springer, 2023, pp. 265–282. https://doi.org/10.1007/978-3-031-43736-6_16
26. Kaplunov J., Kossovitch L., Nolde E. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San Diego, Academic Press, 1998. 226 p.
27. Timoshenko S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar. *Philosophical Magazine Series*, 1921, vol. 6, iss. 245, pp. 744–746. https://doi.org/10.1080/14786442108636264

Поступила в редакцию / Received 06.12.2023
Принята к публикации / Accepted 28.12.2023
Опубликована / Published 01.03.2024