Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

СОГЛАСОВАНО
Заведующая кафедрой
_____________ Кабанова О.С.
«31» октября 2024 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан физического факультета
_______________ Тиванов М.С.
«31» октября 2024 г.
МП

Уравнения математической физики

Электронный учебно-методический комплекс для специальностей:

7-07-0533-01 «Фундаментальная физика»;
профилизации специальности:
«Теоретическая физика и астрофизика»,
«Экспериментальная физика»;
7-07-0533-02 «Ядерные физика и технологии»;
профилизации специальности:
«Физика ядерных реакторов и установок»,
«Ядерная физика и электроника»

Регистрационный № 2.4.2-24/541

Автор:
Егоров А.А., кандидат физико-математических наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 28.11.2024 г., протокол № 4.

Минск 2024

УДК 517.958(075.8)
Е 302

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ.
Протокол № 4 от 28.11.2024 г.

Решение о депонировании вынес: Совет физического факультета.
Протокол № 3 от 31.10.2024 г.

Автор:

Егоров Андрей Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики физического факультета БГУ

Рецензенты:

Пастушонок С.Н., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и общеинженерных дисциплин учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»;

Рачковский Н.Н., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

Егоров, А.А. Уравнения математической физики : электронный учебно-методический комплекс для специальностей 7-07-0533-01 «Фундаментальная физика», 7-07-0533-02 «Ядерные физика и технологии» / А.А. Егоров ; БГУ, Фак. физический, Каф. высшей математики и математической физики. – Минск : БГУ, 2024. – 279 с. – Библиогр.: с. 277-279.

В электронном учебно-методическом комплексе (ЭУМК) по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» приводятся основные понятия и краткие теоретические сведения. Дается подробное решение большого числа типовых примеров и предлагается значительное количество задач различной степени сложности для самостоятельного решения. ЭУМК предназначен для студентов физического факультета БГУ, а также преподавателей высших учебных заведений при подготовке и проведении практических занятий по дисциплине «Уравнения математической физики».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В механике, гидродинамике, оптике, электродинамике возникают математические модели в виде дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, называемых уравнениями математической физики. Дисциплина «Уравнения математической физики» содержит необходимый математический аппарат и теорию основных уравнений математической физики. Она вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений, решения получающихся при этом математических задач и составляет математическую основу дисциплин общей и теоретической физики и специальных физических дисциплин, читаемых на физическом факультете. Подготавливает студентов к изучению сложных задач моделирования и научно-исследовательской работе. Согласно типовому учебному плану по специальностям: 7-07-0533-01 Фундаментальная физика, профилизации специальности: Теоретическая физика и астрофизика, Экспериментальная физика; 7-07-0533-02 Ядерные физика и технологии, профилизации специальности: Физика ядерных реакторов и установок, Ядерная физика и электроника на проведение лекционных занятий по курсу «Уравнения математической физики» в четвертом семестре отводится 46 часов, на практические занятия — 44 часа, на аудиторный контроль УСР — 10 часов.

Цель дисциплины «Уравнения математической физики» в четвертом семестре — формирование знаний и навыков математического моделирования физических процессов, методов решения уравнений в частных производных, возникающих в постановках задач математической физики. Основная задача учебной дисциплины — обеспечить фундаментальную математическую подготовку студентов, выработать навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения получающихся при этом математических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

— методы решения смешанных задач и задач Коши для гиперболических и параболических уравнений;

— общие свойства гармонических функций и методы решения краевых задач для эллиптических уравнений;

уметь:

— ставить начально-краевые задачи для уравнений различных типов;

— решать смешанные и краевые задачи методом разделения переменных и методом функций Грина;

владеть:

— методикой построения математических моделей;

— методами решения и анализа задач в соответствии с целями образовательной программы.

В современных условиях, когда сфера образования все больше приобретает дистанционный формат, одним из инструментов для повышения качества образовательного процесса является электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК), содержащий подробно изложенные алгоритмы и методы решения задач. Данный электронный учебно-методический комплекс предназначен для оказания помощи студентам в усвоении учебного материала, подборке литературы при подготовке к занятиям и экзамену, развития навыков принятия самостоятельных решений при исследовании прикладных задач. Разработанный ЭУМК может быть также полезен преподавателям при подготовке к лекциям и практическим занятиям. Эффективность самостоятельной работы студентов рекомендуется проверять в форме контрольных работ, компьютерных тестов и устных опросов по разделам дисциплины.

Рекомендации по изучению курса «Уравнения математической физики»

Настоящий ЭУМК состоит из четырех разделов: теоретический раздел, практический раздел, раздел контроля знаний и вспомогательный раздел. Теоретический раздел содержит пять глав: «Классификация уравнений в частных производных», «Уравнения гиперболического типа», «Уравнения параболического типа», «Применение специальных функций и ортогональных систем многочленов к решению задач математической физики», «Уравнения эллиптического типа». Этот раздел включает в себя базовые понятия и краткие теоретические сведения, сопровождающиеся большим количеством разобранных примеров, рассмотрение которых обеспечит возможность самостоятельного решения типовых задач. В практическом разделе в соответствии с темами учебного плана представлены задачи различной степени сложности. Раздел дополнен планом практических занятий, в котором предложены задачи для решения в условиях как аудиторных занятий, так и в качестве домашнего задания. После изучения материала главы и решения примеров из соответствующих тем практической части курса студенту предлагается выполнение заданий из раздела контроля знаний в виде примерных вариантов контрольных работ. В завершение раздела приводятся вопросы к экзамену. После изучения предлагаемого материала студент будет понимать связи между основными понятиями и полученными результатами, уметь давать ответы на контрольные вопросы, решать основные типовые задачи.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1.1. Классификация уравнений в частных производных

1.1.1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

В этом пункте будем рассматривать ***уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными***. Такие дифференциальные уравнения наиболее часто встречаются в приложениях. В общем случае уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными можно записать в виде соотношения

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

где F — заданная функция своих аргументов. Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Дифференциальное уравнение второго порядка называется ***линейным относительно старших производных***, если оно имеет вид

$$a_{11}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2$, — заданные функции.

Уравнение называется ***линейным***, если оно линейно как относительно искомой функции, так и относительно ее частных производных:

$$a_{11}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\,\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\,\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y). \tag{2}$$

Проведем классификацию уравнений вида (1). Для этого введем «новые» независимые переменные $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые по x и y функции, причем якобиан преобразования отличен от нуля:

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Преобразуем производные, входящие в уравнение (1), по правилу дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+A_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \tag{3}$$

где

$$A_{11}=a_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2,$$

$$A_{12}=a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$A_{22}=a_{11}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2.$$

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент A_{11} уравнения (3) был равен нулю, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$a_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2=0. \tag{4}$$

Соотношение (4) является уравнением в частных производных первого порядка. Решение этого уравнения связано с решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется ***характеристическим уравнением*** для уравнения (3), а его общие интегралы — ***характеристическими кривыми*** или ***характеристиками***.

Теорема 1 (о характеристиках). *Для того чтобы функция $\varphi(x, y)$ была решением дифференциального уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляло собой общий интеграл характеристического уравнения (5).*

Из теоремы о характеристиках следует, что классификацию уравнений в частных производных второго порядка следует проводить на основе анализа характеристического уравнения. Обозначим через $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ дискриминант уравнения (5).

Определение 1. Уравнение (1) называется в точке M (области G):

1) ***уравнением гиперболического типа***, если $D > 0$;

2) ***уравнением параболического типа***, если $D = 0$;

3) ***уравнением эллиптического типа***, если $D < 0$.

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться в справедливости соотношения
$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})I^2(x, y),$$
из которого следует, что преобразование независимых переменных не меняет тип уравнения. Заметим, что в различных точках области G уравнение может принадлежать различным типам.

Предположим, что во всех точках области G уравнение имеет один и тот же тип. Рассмотрим каждый из трех случаев.

1. Для уравнений гиперболического типа $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. В этом случае уравнение (5) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения с сопряженными действительными правыми частями:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{6}$$

Пусть $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$ — общие интегралы уравнений (6). Тогда в соответствии с теоремой о характеристиках функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ являются решениями уравнения (4). Выбирая в качестве «новых» независимых переменных $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, тем самым обратим в нуль не только коэффициент A_{11}, но и A_{22} (соответствующие формулы получаются одна из другой заменой φ на ψ). После деления на коэффициент $2A_{12}$ приводим уравнение (3) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{7}$$

Равенство (7) называется ***первой канонической формой для уравнений гиперболического типа***.

В приложениях при описании физических процессов чаще используется другая каноническая форма. Полагая

$$\xi = \frac{\varphi(x,y)+\psi(x,y)}{2}, \quad \eta = \frac{\varphi(x,y)-\psi(x,y)}{2},$$

приходим к ***второй канонической форме для уравнений гиперболического типа***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

2. Для уравнений параболического типа $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Характеристическое уравнение (5) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}},$$

общий интеграл которого $\varphi(x,y) = C$. Полагая в качестве «новых» переменных $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ — любая не зависящая от $\varphi(x,y)$ функция, получим, что $A_{11} = 0$.

Покажем, что при такой замене переменных одновременно обращается в нуль и коэффициент A_{12}. Поскольку $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, то без ограничения общности можно считать, что $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$. Имеем

$$A_{11} = a_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\sqrt{a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Тогда получим

$$A_{12} = a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + a_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

$$= \left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0.$$

Таким образом, уравнение (3) в левой части содержит только одно слагаемое. Разделив (3) на A_{22}, получим ***каноническую форму для уравнений параболического типа***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

3. Для уравнений эллиптического типа дискриминант характеристического уравнения $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. В этом случае уравнение (5) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения с комплексно-сопряженными правыми частями:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a_{12} + i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{a_{12} - i\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Общие интегралы уравнений (8) $\varphi(x,y) = C_1$ и $\psi(x,y) = C_2$, где

$$\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y), \quad \psi(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y).$$

Выполняя замену переменных $\xi = \alpha(x,y)$, $\eta = \beta(x,y)$, получим $A_{11} = A_{22}$, $A_{12} = 0$. После деления (3) на коэффициент A_{22} приходим к ***канонической форме для уравнений эллиптического типа***:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_4\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Линейное уравнение (2) с постоянными коэффициентами, когда a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c — const, имеет одинаковый тип в любой области G. Такому уравнению соответствует характеристическое уравнение (5) с постоянными коэффициентами. Характеристиками уравнения (2) являются прямые $y = kx + b$. С помощью указанных выше преобразований переменных линейное уравнение с постоянными коэффициентами гиперболического типа приводится к одной из канонических форм:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + B_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + Cu = \Phi(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + B_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + Cu = \Phi(\xi, \eta).$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами параболического и эллиптического типов имеют канонические формы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + B_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + Cu = \Phi(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + B_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + Cu = \Phi(\xi, \eta).$$

1.1.2. Дифференциальные уравнения со многими независимыми переменными

Расмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{9}$$

где a_{ij}, b_i, c, f являются функциями переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geqslant 3$.

Введем «новые» независимые переменные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, полагая

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Тогда производные по «старым» переменным выразятся через производные по «новым» переменным формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}\,\frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} c_{ki} c_{mj}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_m},$$

где $c_{ki} = \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$. Подставляя выражения для производных в уравнение (9), получим такого же вида линейное уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A_{km}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_m} + \sum_{k=1}^{n} B_k\,\frac{\partial u}{\partial \xi_k} + cu = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \tag{11}$$

в котором

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ki} c_{mj}, \quad B_k = \sum_{i=1}^{n} b_i c_{ki}.$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(0)} t_i t_j, \tag{12}$$

коэффициенты которой $a_{ij}^{(0)}$ совпадают с коэффициентами a_{ij} уравнения (9) в некоторой точке $M_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$. Если в этой квадратичной форме перейти к «новым» переменным

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} c'_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13}$$

где $c'_{ik} = c_{ki}$, то для квадратичной формы (12) получим выражение

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} A^{(0)}_{km} y_k y_m, \quad A^{(0)}_{km} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^{(0)}_{ij} c_{ki} c_{mj}.$$

Следовательно, коэффициенты при старших членах уравнения (9) изменяются аналогично коэффициентам квадратичной формы при линейном преобразовании переменных.

Из курса алгебры известно, что существует линейное невырожденное преобразование переменных, в результате которого матрица квадратичной формы приводится к диагональному виду, в котором

$$A^{(0)}_{km} = 0 \;\text{ при }\; k \neq m, \quad A^{(0)}_{kk} = \pm 1 \;\text{ либо }\; A^{(0)}_{kk} = 0.$$

При этом, согласно закону инерции, число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов $A^{(0)}_{kk}$ в нормальном виде квадратичной формы $\sum\limits_{k=1}^{n} A^{(0)}_{kk} y_k^2$ не зависит от линейного преобразования переменных. Окончательно уравнение (11) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kk} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \sum_{k=1}^{n} B_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + cu = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \tag{14}$$

Уравнение (14) называется ***канонической формой уравнения (9)***.

Таким образом, чтобы найти преобразование переменных (10), приводящее исходное уравнение к канонической форме, необходимо найти преобразование (13), приводящее квадратичную форму (12) к нормальному виду. Матрица преобразования (10) получается из матрицы преобразования (13) транспонированием.

Определение 2. Говорят, что уравнение (9) имеет в точке M_0:

1) ***эллиптический тип***, если все n коэффициентов A_{kk} одного знака;

2) ***нормальный гиперболический тип***, если $n-1$ коэффициентов A_{kk} имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку;

3) ***ультрагиперболический тип***, если среди коэффициентов A_{kk} имеется l коэффициентов одного знака и $n-l$ коэффициентов противоположного знака;

4) ***параболический тип***, если хотя бы один из коэффициентов A_{kk} равен нулю.

Заметим, что если коэффициенты уравнения (9) постоянны, то приведя уравнение к канонической форме в одной точке M_0, получим уравнение, приведенное к канонической форме во всем n-мерном пространстве. В общем случае уравнение с переменными коэффициентами при $n \geqslant 3$ нельзя привести к канонической форме даже в малой окрестности точки M_0.

Пример 1. Привести к канонической форме уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\,\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u = 0.$$

Решение. Дискриминант $D = 1 - 1 = 0$, следовательно, это уравнение параболического типа. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

откуда получим $\dfrac{dy}{dx} = -1$ и один общий интеграл $x + y = C$.

Введем «новые» переменные, полагая $\xi = x + y$, $\eta = x$. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Подставляя в уравнение, получим каноническую форму

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + {}$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \beta\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma u = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -(\alpha + \beta)\frac{\partial u}{\partial \xi} - \alpha\,\frac{\partial u}{\partial \eta} - \gamma u. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Привести к канонической форме уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Дискриминант равен $D = 1^2 - 1 \cdot 2 < 0$ т. е. уравнение эллиптического типа. Характеристическое уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

имеет общие интегралы $y - x \pm ix = C_{1,2}$. Введем «новые» переменные $\xi = y - x,\ \eta = x$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Подставляя найденные производные в исходное уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Привести к канонической форме уравнение с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sin x\,\frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0.$$

Его дискриминант $D = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$, т. е. уравнение имеет гиперболический тип. Характеристическое уравнение распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x + 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x - 1,$$

откуда получим общие интегралы

$$y - \cos x - x = C_1, \quad y - \cos x + x = C_2.$$

Полагая $\xi = y - \cos x - x,\ \eta = y - \cos x + x$, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\sin x - 1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\sin x + 1), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin x - 1)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\sin^2 x - 1) +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin x + 1)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cos x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin x - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(2\sin x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin x + 1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение и собирая коэффициенты при производных, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\sin^2 x - 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x - \cos^2 x) +$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\sin^2 x + 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 2\sin x - \cos^2 x) +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(\sin^2 x - 1 - 2\sin^2 x - \cos^2 x) +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial \xi}\cos x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cos x = \cos x\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Окончательно приходим к канонической форме

$$-4\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Пример 4. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. Это уравнение с переменными коэффициентами, причем его дискриминант $D = -x$. Уравнение в области $x < 0$ имеет гиперболический тип, а в области $x > 0$ — эллиптический. При $x = 0$ получим уравнение параболического типа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Рассмотрим первый случай, когда $x < 0$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-x},$$

а его общие интегралы

$$C_1 = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad C_2 = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

Сделаем замену переменных

$$\xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

Находим производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\big(-\sqrt{-x}\,\big) + \frac{\partial u}{\partial \eta}\sqrt{-x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}(2x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(-x) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{1}{2\sqrt{-x}} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{1}{2\sqrt{-x}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение, получим

$$4x\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{2\sqrt{-x}}\,\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Умножая на $\dfrac{1}{4x}$ и учитывая, что $x < 0$, приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{8\big(\sqrt{-x}\,\big)^3}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Выразим переменную x в этом равенстве через «новые» переменные ξ и η. Учитывая формулы замены переменных, имеем

$$\sqrt{-x} = \sqrt[3]{\frac{3(\xi - \eta)}{4}}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Рассмотрим теперь второй случай. В области $x > 0$ уравнение имеет эллиптический тип. Характеристическое уравнение

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0$$

распадается на два уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{x}$, а их общие интегралы имеют вид

$$y + i\,\frac{2}{3}\,x^{3/2} = C_1, \quad y - i\,\frac{2}{3}\,x^{3/2} = C_2.$$

Сделаем замену $\xi = y,\ \eta = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ и найдем производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\sqrt{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\, x + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Подставляя в уравнение, приходим к канонической форме

$$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + x\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\frac{1}{3\eta}\,\frac{\partial u}{\partial \eta}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Привести к канонической форме уравнение с тремя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Решение. Рассмотрим квадратичную форму

$$k(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2,$$

соответствующую исходному дифференциальному уравнению. Приведем ее к нормальному виду, используя метод Лагранжа. Имеем

$$k = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 - 4t_2^2 - t_3^2 + 4t_2t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + 4t_2t_3.$$

Далее положим $t_2 = p_2 + p_3,\ t_3 = p_2 - p_3$. Тогда

$$4t_2t_3 = 4p_2^2 - 4p_3^2 = (2p_2)^2 - (2p_3)^2 = (t_2 + t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2.$$

Окончательно запишем квадратичную форму в виде

$$k(t_1, t_2, t_3) = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + (t_2 + t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2.$$

Обозначая

$$y_1 = t_1 - 2t_2 + t_3, \quad y_2 = t_2 + t_3, \quad y_3 = t_2 - t_3,$$

получим нормальный вид квадратичной формы

$$k'(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$$

Выразим переменные t_1, t_2, t_3 через переменные y_1, y_2, y_3:

$$t_1 = y_1 + \frac{1}{2}\,y_2 + \frac{3}{2}\,y_3, \quad t_2 = \frac{1}{2}\,y_2 + \frac{1}{2}\,y_3, \quad t_3 = \frac{1}{2}\,y_2 - \frac{1}{2}\,y_3.$$

Следовательно, линейное невырожденное преобразование переменных $T = SY$, где

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

приводит квадратичную форму к нормальному виду.

Матрица линейного невырожденного преобразования переменных, приводящего уравнение к канонической форме, является транспонированной к матрице S:

$$S^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Это преобразование задается равенством

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = S^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

или в скалярном виде

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{2}\,z, \quad \zeta = \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z.$$

Для нахождения коэффициентов при первых производных в «новых» переменных используем формулу

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = S^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = S^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 9/2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, исходное дифференциальное уравнение имеет гиперболический тип, а его каноническая форма

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 3\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3}{2}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{9}{2}\,\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0. \blacktriangleleft$$

1.2. Уравнения гиперболического типа

1.2.1. Постановки задач для уравнений гиперболического типа

Основным уравнением гиперболического типа является ***уравнение поперечных колебаний струны***

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ — вертикальное перемещение струны, $\rho(x)$ — линейная плотность, T_0 — натяжение струны, $F(x,t)$ — плотность внешних сил. Если струна однородная, т. е. $\rho(x) = \rho_0 = \mathrm{const}$, то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$, $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho_0}$. При отсутствии внешних сил получим ***уравнение свободных колебаний струны***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Уравнение малых поперечных колебаний мембраны (двумерное уравнение) имеет вид

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x,y,t), \tag{2}$$

где функция $u(x,y,t)$ характеризует отклонение мембраны от положения равновесия, $\rho(x,y)$ — линейная плотность мембраны, T_0 — натяжение мембраны, $F(x,y,t)$ — плотность внешних сил. В случае однородной мембраны, когда $\rho(x,y) = \rho_0 = \mathrm{const}$, уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t),$$

где $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$, $f(x,y,t) = \dfrac{F(x,y,t)}{\rho_0}$. ***Уравнение свободных колебаний мембраны*** имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Изучение колебаний трехмерных однородных объектов приводит к ***волновому уравнению***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t). \tag{3}$$

Решение $u(x, y, z, t)$ уравнения (3) имеет смысл потенциала скоростей движения частиц колеблющегося объекта.

Замечание 1. Наряду с уравнением поперечных колебаний струны рассматриваются и другие уравнения гиперболического типа. В частности, ***уравнение продольных колебаний упругого однородного стержня*** имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{E}{\rho_0}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho_0 S},$$

где $u(x, t)$ — смещение точек вдоль стержня, ρ_0 — объемная плотность стержня, E — модуль упругости (модуль Юнга), S — площадь поперечного сечения стержня, $F(x, t)$ — плотность внешних сил.

При математическом описании физических процессов помимо самого дифференциального уравнения необходимо сформулировать дополнительные условия, обеспечивающие единственность решения. Рассмотрим, например, уравнение колебаний струны (1). В этой задаче функция $u(x, t)$ характеризует отклонение струны от оси x. Если концы струны $0 \leqslant x \leqslant l$ закреплены жестко, то должны выполняться ***граничные (краевые) условия***:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{4}$$

(или в другом виде $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$). Поскольку процесс колебаний зависит от начального отклонения и начальной скорости, то необходимо задать ***начальные условия***:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x).$$

Таким образом, после добавления к уравнению колебаний струны граничных и начальных условий приходим к задаче

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{5}$$

Задача (5) называется ***смешанной задачей для уравнения колебаний струны***. Разнообразие смешанных задач возникает за счет изменения граничных условий.

Если концы струны движутся по заданным законам, то вместо однородных условий (4) задаются неоднородные граничные условия

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t),$$

которые называются ***граничными условиями первого рода*** или ***условиями Дирихле***.

Возможны и другие типы граничных условий. Рассмотрим их на примере задачи о продольных колебаниях упругого стержня. Если задан закон изменения силы, приложенной к концу стержня и действующей в направлении колебаний, то получим ***граничные условия второго рода*** или ***условия Неймана***:

$$E\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = f_1(t), \quad E\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = f_2(t)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \nu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \nu_2(t).$$

В случае, когда один из концов стержня свободен, соответствующее граничное условие принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0.$$

Пусть к концам стержня прикреплена пружина, действующая вдоль оси x (упругое закрепление). Тогда сила упругости $E\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$ на концах будет уравновешиваться силой действия пружины αu, где α — коэффициент жесткости пружины. При таком закреплении концов стержня приходим к ***граничным условиям третьего рода***:

$$E\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha u|_{x=0}, \quad E\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -\alpha u|_{x=l}$$

или

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right]\bigg|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right]\bigg|_{x=l} = 0, \quad h = \frac{\alpha}{E} = \text{const} > 0.$$

Если концы стержня, относительно которых имеет место упругое закрепление, движутся по законам $x = \theta_1(t)$ и $x = \theta_2(t)$, то граничные условия третьего рода принимают вид

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} - h\big(u - \theta_1(t)\big)\right]\bigg|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x} + h\big(u - \theta_2(t)\big)\right]\bigg|_{x=l} = 0.$$

При формулировки смешанных задач для уравнения колебаний возможны комбинации различных типов граничных условий.

Наряду со смешанной задачей также ставится ***начальная задача*** или ***задача Коши***

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{6}$$

Задача Коши возникает, например, если необходимо изучить процесс колебаний в течение малого промежутка времени, когда влияние граничных условий еще несущественно.

Замечание 2. При достаточной гладкости входных данных (функций $\rho(x)$, $F(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$) решение как смешанной задачи (5), так и задачи Коши (6), существует и единственно.

Аналогично можно поставить смешанную задачу или задачу Коши для многомерных уравнений гиперболического типа. Например, смешанная задача для волнового уравнения (3) может иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in G, \quad t > 0, \\ u\big|_{\Gamma} = \mu(x,y,z,t), \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \overline{G}. \end{cases}$$

Здесь $\overline{G} = G \cup \Gamma$ — ограниченная область в трехмерном пространстве, Γ — граница $\overline{G}$.

1.2.2. Метод Даламбера. Корректность задач математической физики

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения колебаний неограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{7}$$

с начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{8}$$

Приведем уравнение (7) к канонической форме, содержащей смешанную производную. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0.$$

Оно распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения $\dfrac{dx}{dt} = a$, $\dfrac{dx}{dt} = -a$, общими интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Введем новые независимые переменные $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \eta} - a\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (7), преобразуем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{9}$$

Проинтегрируем равенство (9) сначала по η

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi),$$

а затем полученное соотношение проинтегрируем по ξ:

$$u = \int f(\xi)\, d\xi = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{10}$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные функции одной переменной. Возвращаясь к «старым» переменным x и t, из (10) находим множество всех решений уравнения (7):

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \tag{11}$$

Определим функции f_1 и f_2 так, чтобы выполнялись начальные условия. Подставляя (11) в (8), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Проинтегрируем второе уравнение системы:

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ -f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz + C. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz - \dfrac{C}{2}, \\ f_2(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz + \dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения f_1 и f_2 в формулу (11), получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(z)\,dz - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(z)\,dz\right)$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \tag{12}$$

Формула (12) называется ***формулой Даламбера***. Эту формулу мы получили в предположении существования решения задачи Коши. Следовательно, оно ***единственно***. Действительно, если бы существовало второе решение задачи (7), (8), то оно бы представлялось формулой (12) и совпадало с первым решением. Если функция $\varphi(x)$ имеет производные первого и второго порядков, а функция $\psi(x)$ — производную первого порядка, то формула Даламбера дает искомое решение. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой правой части (12) в уравнение (7) и начальное условие (8). Тем самым доказано ***существование*** решения задачи Коши.

Определение 1. Говорят, что ***задача поставлена корректно***, если выполняются два условия:

1) решение задачи существует и единственно;

2) решение задачи непрерывно зависит от входных данных или ***устойчиво относительно входных данных***.

Теорема 1 (о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных функций). *Пусть $u(x,t)$ — решение задачи Коши (7), (8), а $\widetilde{u}(x,t)$ — решение задачи Коши с измененными («возмущенными») входными данными*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ \widetilde{u}\big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(x), \quad \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \widetilde{\psi}(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Тогда, каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$ и каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, что из неравенств

$$\big|\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x)\big| < \delta, \quad \big|\psi(x) - \widetilde{\psi}(x)\big| < \delta, \quad -\infty < x < \infty,$$

следует неравенство

$$\big|u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)\big| < \varepsilon, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

1.2.3. Метод разделения переменных для однородного уравнения колебаний струны

Метод разделения переменных или ***метод Фурье*** является одним из основных методов решения краевых задач для уравнений математической физики. Изложим его для смешанной задачи о свободных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами, которая формулируется следующим образом: найти решение однородного уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{13}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{15}$$

Идея метода Фурье основана на линейности и однородности уравнения и граничных условий. В этом случае справедлив ***принцип суперпозиции*** для любых частных решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уравнения (13), удовлетворяющих условиям (14). А именно, функция $u(x,t) = C_1 u_1(x,t) + C_2 u_2(x,t)$, где C_1

и C_2 — произвольные постоянные, также удовлетворяет уравнению (13) и граничным условиям (14). С помощью суперпозиции линейно независимых частных решений можно выполнить также и начальные условия (15).

Будем искать нетривиальные решения уравнения (13), удовлетворяющие граничным условиям (14), в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{16}$$

одна из которых зависит только от переменной x, а другая — только от t. Дифференцируя дважды выражение (16) по x и t, после подстановки его в уравнение (13) получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{17}$$

Равенство (17) должно выполняться при всех значениях $x \in (0,l)$ и $t > 0$. Особенностью соотношения (17) является разделение переменных: его левая часть зависит только от t, а правая — только от x. Это возможно лишь в том случае, когда обе его части не зависят ни от x, ни от t, т. е. являются постоянной величиной. Обозначая эту постоянную разделения через $-\lambda$, запишем (17) в виде

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Отсюда следует, что функции $T(t)$ и $X(x)$ можно определить из решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Чтобы такие частные решения вида (16) удовлетворяли граничным условиям (14) для любого $t \geqslant 0$, необходимо потребовать выполнения условий $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$.

Таким образом, для координатной функции $X(x)$ приходим к следующей краевой задаче: найти решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{18}$$

удовлетворяющие в граничных точках $x = 0$ и $x = l$ условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{19}$$

При любом $\lambda = \mathrm{const}$ эта задача имеет тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Ниже будет показано, что при некоторых положительных значениях постоянной λ задача (18), (19) имеет также нетривиальные решения. Такие «особенные» значения λ называются ***собственными значениями***, а соответствующие им нетривиальные решения $X(x)$ — ***собственными функциями*** задачи (18), (19). Задача отыскания собственных значений и собственных функций называется ***задачей Штурма — Лиувилля***.

Нетрудно установить, что в случае $\lambda \leqslant 0$ существуют только тривиальные решения задачи Штурма — Лиувилля, т. е. такие λ не могут быть собственными значениями этой задачи. Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (18)

$$X(x) = C_1 \cos\bigl(\sqrt{\lambda}\, x\bigr) + C_2 \sin\bigl(\sqrt{\lambda}\, x\bigr)$$

удовлетворяет граничным условиям $X(0) = 0$, $X(l) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos\bigl(\sqrt{\lambda}\, l\bigr) + C_2 \sin\bigl(\sqrt{\lambda}\, l\bigr) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Отсюда следует, что $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Для определенности возьмем $C_2 = 1$. При этом равенство нулю определителя $\Delta = \sin\bigl(\sqrt{\lambda}\, l\bigr)$ системы (20) имеет место, только если $\sqrt{\lambda}\, l = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$

Таким образом, только для собственных значений

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

задача (18), (19) имеет в качестве нетривиальных решений систему собственных функций

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

ортогональных на отрезке $[0, l]$ с весом $\rho(x) = 1$. Каждому собственному значению λ_k соответствует функция $T_k(t)$, которую находим из уравнения

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a^2 T_k(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{l}, \tag{22}$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Подставляя выражения (21) и (22) в формулу (16), находим частные решения уравнения (13), удовлетворяющие граничным условиям (14). Каждому $k = 1, 2, \ldots,$ отвечает решение

$$u_k(x,t) = \left(A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{23}$$

Суперпозиция всех решений вида (23)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{24}$$

также является решением дифференциального уравнения (13), удовлетворяющим граничным условиям (14), если ряд (24) для любого $x \in (0, l)$ при $t \geqslant 0$ является сходящимся и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. В этом случае можно подобрать постоянные A_k и B_k так, чтобы функция, представленная рядом (24), удовлетворяла начальным условиям (15). Для этого продифференцируем почленно ряд (24) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-A_k \sin\frac{k\pi at}{l} + B_k \cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

и при $t = 0$ потребуем выполнения начальных условий:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\, B_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \psi(x). \tag{25}$$

Равенства (25) представляют собой разложения заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье по ортогональной на отрезке $[0, l]$ тригонометрической системе функций $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому коэффициенты A_k и $\frac{k\pi a}{l} B_k$ этих разложений являются коэффициентами Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно. Определяя эти коэффициенты по формулам Эйлера — Фурье, получим

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{26}$$

Таким образом, ряд (24) с коэффициентами A_k и B_k, вычисленными по формулам (26), окончательно дает решение смешанной задачи (13)–(15).

Дадим физическую интерпретацию полученного решения. Если ввести обозначения

$$\sin\varphi_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}, \quad \cos\varphi_k = \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}},$$

то решение (24) можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{A_k^2+B_k^2}\,\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\left(\frac{k\pi at}{l}+\varphi_k\right). \tag{27}$$

Каждый член ряда (27) называется ***стоячей волной***, т. е. точки струны совершают гармоническое колебательное движение с частотой $\omega_k=\dfrac{k\pi a}{l}$, амплитудой $\sqrt{A_k^2+B_k^2}\,\sin\dfrac{k\pi x}{l}$ и начальной фазой φ_k. Доминирующее значение имеет первая стоячая волна. Именно с ней связан ***основной тон*** струны, имеющий частоту $\omega_1=\dfrac{\pi a}{l}=\dfrac{\pi}{l}\sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}}$. Тоны, соответствующие более высоким частотам, называются ***обертонами***. Обертоны, частоты которых кратны основной частоте ω_1, называются ***гармониками***. При увеличении номера гармоник их амплитуда быстро убывает, влияние на интенсивность звука становится незначительным и действие обертонов сводится к созданию ***тембра звука***.

Точки $x_n=\dfrac{nl}{k}$, $n=\overline{0,k}$, которые в течение процесса остаются неподвижными, называются ***узлами*** стоячей волны. Точки $x_n=\dfrac{(2n+1)l}{2k}$, $n=\overline{0,k-1}$, в которых колебания совершаются с максимальной амплитудой, т. е. $\sin\dfrac{k\pi x}{l}=\pm1$, называются ***пучностями*** стоячей волны.

На практике часто встречаются смешанные задачи с другими сочетаниями граничных условий. Рассмотрим, например, задачу о продольных колебаниях стержня длиной l, левый конец которого закреплен жестко, а правый свободен, при произвольных начальных условиях. Соответствующая смешанная задача для этого случая выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad 0<x<l,\\[2mm] u|_{x=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0, \quad t\geqslant 0,\\[2mm] u|_{t=0}=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Задача Штурма — Лиувилля для координатной функции $X(x)$ после разделения переменных принимает вид

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=X'(l)=0.\end{cases} \tag{28}$$

Аналогично случаю жестко закрепленной струны, решая эту простейшую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, находим ее собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right]^2, \quad X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Рассмотренные выше задачи (18), (19) и (28) являются частными случаями более общей задачи Штурма — Лиувилля, возникающей в результате применения метода разделения переменных для уравнения гиперболического (параболического) типа с переменными коэффициентами и граничными условиями третьего рода

$$-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \beta_1 u|_{x=0} = 0, \quad \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} + \beta_2 u|_{x=l} = 0.$$

Указанную задачу можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[k(x)\dfrac{dX}{dx}\right] - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

где $k'(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$ — непрерывные на отрезке $[0, l]$ функции.

Основные свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (29).

1. Существует счетное множество $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots,$ собственных значений и соответствующих им линейно независимых собственных функций $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_k(x), \ldots,$ задачи (29). Всякая собственная функция определяется с точностью до постоянного множителя.

2. Все собственные значения задачи (29) неотрицательны.

3. Собственные функции $X_k(x)$ и $X_n(x)$, отвечающие различным собственным значениям λ_k и λ_n, ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[0, l]$:

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_k(x)X_n(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, если $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_k(x), \ldots,$ — система собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, то

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_k(x)X_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \|X_k\|^2, & k = n, \end{cases}$$

где $\|X_k\|^2 = \int\limits_0^l \rho(x) X_k^2(x)\,dx$ — квадрат нормы функции $X_k(x)$.

4. Всякая функция, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, l]$ и удовлетворяющая однородным граничным условиям, разлагается в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля, абсолютно и равномерно сходящийся на отрезке $[0, l]$ (теорема разложения Стеклова). При этом ***рядом Фурье функции*** $f(x)$ ***по системе собственных функций задачи (29)*** называется ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x),$$

в котором коэффициенты Фурье c_k вычисляются по формулам:

$$c_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int\limits_0^l \rho(x) f(x) X_k(x)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Замечание 3. При решении конкретных задач в силу неотрицательности собственных значений задачи Штурма — Лиувилля в дифференциальном уравнении удобно вместо λ записывать λ^2.

С учетом сделанного замечания приведем таблицу наиболее часто встречающихся задач Штурма — Лиувилля и соответствующих им собственных значений и собственных функций.

$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}, \quad X_k = \sin\dfrac{k\pi x}{l},$ $\|X_k\|^2 = l/2, \quad k = 1, 2, \ldots$
$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}, \quad X_k = \cos\dfrac{k\pi x}{l}, \quad k = 0, 1, \ldots,$ $\|X_0\|^2 = l, \quad \|X_k\|^2 = l/2, \quad k = 1, 2, \ldots$
$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad X_k = \sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l},$ $\|X_k\|^2 = l/2, \quad k = 0, 1, \ldots$
$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad X_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l},$ $\|X_k\|^2 = l/2, \quad k = 0, 1, \ldots$

Пример 6. Однородная струна длиной l натянута между точками $x = 0$ и $x = l$. На участке (α, β) ее точкам придана постоянная начальная скорость v_0 (этого можно добиться, ударяя по струне на этом участке плоским

жестким молоточком). Найти колебания струны в произвольный момент времени.

Решение. Сформулированная задача сводится к решению смешанной задачи для однородного уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{30}$$

с граничными и начальными условиями:

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{31}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < \alpha, \\ v_0, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ 0, & \beta < x \leqslant l. \end{cases} \tag{32}$$

Будем искать нетривиальные решения в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{33}$$

Подставляя (33) в уравнение (30) и граничные условия (31), получим

$$T''X = a^2 X''T, \quad X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0.$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2.$$

Для функции $X(x)$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из граничных условий:

$$C_1 \cos(\lambda \cdot 0) + C_2 \sin(\lambda \cdot 0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0, \quad C_2 \sin(\lambda l) = 0.$$

Поскольку ищутся нетривиальные решения задачи Штурма — Лиувилля, то $C_2 \neq 0$. Учитывая, что собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, возьмем $C_2 = 1$. Второе граничное условие дает $\sin(\lambda l) = 0$ или $\lambda l = k\pi$. Отсюда находим собственные значения $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ и линейно независимые собственные функции $X_k(x) = \sin \dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots,$ задачи Штурма — Лиувилля.

Каждому собственному значению λ_k будет соответствовать функция $T_k(t)$, которую находим из уравнения

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}.$$

Таким образом, функции

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = \left(A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

являются решениями исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющими граничным условиям.

Решение задачи будем искать в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Определим произвольные коэффициенты A_k и B_k, подставляя это решение в начальные условия (32). Из первого начального условия имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = 0,$$

откуда следует, что $A_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Из второго начального условия вытекает соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} = \psi(x),$$

где $B_k\dfrac{k\pi a}{l}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\psi(x)$ по собственным функциям $X_k(x)$. Отсюда находим

$$B_k\frac{k\pi a}{l} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)\,dx = \frac{2}{l}\int\limits_\alpha^\beta v_0 \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{2v_0}{k\pi}\left(\cos\frac{k\pi\alpha}{l} - \cos\frac{k\pi\beta}{l}\right) \Rightarrow B_k = \frac{2v_0 l}{ak^2\pi^2}\left(\cos\frac{k\pi\alpha}{l} - \cos\frac{k\pi\beta}{l}\right).$$

Искомое решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{2v_0 l}{a\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Big(\cos\frac{k\pi\alpha}{l}-\cos\frac{k\pi\beta}{l}\Big)\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти продольные колебания упругого стержня, один конец которого $x=0$ свободен, а другой конец $x=l$ закреплен жестко, при начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=h(l-x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad h=\mathrm{const}>0.$$

Решение. Сформулированной текстовой задаче соответствует смешанная задача

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad t>0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=l}=0, \quad t\geqslant 0,\\ u\big|_{t=0}=h(l-x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Решим эту задачу методом Фурье, полагая $u(x,t)=X(x)T(t)$. После подстановки в исходное уравнение и разделения переменных получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2.$$

Из граничных условий находим

$$X'(0)T(t)=0,\quad X(l)T(t)=0,$$

откуда следует, что $X'(0)=0$, $X(l)=0$. Присоединяя эти граничные условия к дифференциальному уравнению для функции $X(x)$, приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases}X''+\lambda^2X=0,\\ X'(0)=0, \quad X(l)=0.\end{cases}$$

Найдем собственные значения и собственные функции этой задачи. Подставляя общее решение $X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$ в первое граничное условие, получим

$$-C_1\lambda\cdot 0+C_2\lambda\cdot 1=0 \quad\Rightarrow\quad C_2=0.$$

Для определенности возьмем константу $C_1 = 1$. Из второго граничного условия имеем

$$\cos \lambda l = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda l = \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad X_k(x) = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение для функции $T(t)$:

$$T_k''(t) + \left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 T_k(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} + B_k \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{2l}.$$

Запишем решение смешанной задачи в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} + B_k \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{2l}\right] \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Подставляя этот ряд в первое начальное условие, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = h(l-x).$$

Отсюда имеем

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l h(l-x) \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}\, dx =$$

$$= \frac{4h}{\pi(2k+1)} \int_0^l \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}\, dx = \frac{8hl}{\pi^2 (2k+1)^2}.$$

Из второго начального условия следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд, окончательно получим

$$u(x,t) = \frac{8hl}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти продольные колебания однородного упругого стержня длиной l, у которого оба конца свободны.

Решение. Необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Пусть $u(x,t) = X(x)T(t)$. После разделения переменных получим задачу Штурма — Лиувилля для функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения в случае $\lambda \neq 0$ имеет вид $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Подставляя это решение в граничное условие на левом конце стержня, получим

$$X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x, \quad X'(0) = C_2 \lambda = 0,$$

откуда следует, что $C_2 = 0$. Для правого конца стержня $C_1 \lambda \sin(\lambda l) = 0$ или $\sin \lambda l = 0$. Отсюда $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ и собственные функции имеют вид

$$X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если $\lambda = 0$, то общим решением уравнения является многочлен первой степени $X(x) = C_1 x + C_2$ и, следовательно,

$$X'(x) = C_1 \;\Rightarrow\; X'(0) = X'(l) = C_1 = 0, \quad X(x) = C_2.$$

Выбирая константу $C_2 = 1$, получим еще одну собственную функцию $X_0(x) = 1$, соответствующую собственному значению $\lambda_0 = 0$.
Для функции $T_k(t)$ имеем дифференциальное уравнение

$$T_k''(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) = 0.$$

Его общее решение

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

Функцию $u(x,t)$ будем искать в виде ряда

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{l}\Big)\cos\frac{k\pi x}{l}. \tag{34}$$

Определим коэффициенты A_k и B_k из начальных условий:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x), \quad B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} = \psi(x).$$

Поскольку для ортогональной системы функций $\left\{\cos\dfrac{k\pi x}{l}\right\}_{k=0}^{\infty}$ имеют место равенства $\|X_0\|^2 = l$, $\|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$, то для коэффициентов Фурье справедливы формулы:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx, \quad A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{35}$$

$$B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(x)\,dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 1,2,\ldots \tag{36}$$

Таким образом, решением исходной задачи является ряд (34), в котором коэффициенты A_k и B_k определяются формулами (35), (36). ◀

Пример 9. Один конец $x = 0$ стержня свободен, а другой $x = l$ закреплен упруго. Найти продольные колебания стержня при начальных условиях

$$u|_{t=0} = h(l-x), \quad h = \text{const} > 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение. Будем решать смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + Hu\right)\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = h(l-x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad H = \text{const} > 0, \end{cases}$$

полагая $u(x,t) = X(x)T(t)$. После разделения переменных приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Из граничных условий следует, что $X'(0)=0$, $X'(l)+HX(l)=0$. Для функции $X(x)$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} lX''+\lambda^2X=0, \\ X'(0)=0, \quad X'(l)+HX(l)=0. \end{cases}$$

Подставляя общее решение $X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$ в первое граничное условие, имеем $-\lambda C_1\cdot 0+\lambda C_2\cdot 1=0$. Отсюда следует, что $C_2=0$. Полагая $C_1=1$, получим уравнение, из которого находим собственные значения задачи Штурма — Лиувилля

$$-\lambda\sin\lambda l+H\cos\lambda l=0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\lambda l-\frac{H}{\lambda}=0, \quad \lambda l\operatorname{tg}\lambda l-Hl=0.$$

Обозначим через μ_k, $k=1,2,\ldots$, положительные корни уравнения $\mu\operatorname{tg}\mu-Hl=0$. Тогда $\lambda l=\mu_k$, $\lambda_k=\dfrac{\mu_k}{l}$, и собственные функции имеют вид $X_k(x)=\cos\dfrac{\mu_k x}{l}$.

Из дифференциального уравнения для функции $T(t)$ находим

$$T_k(t)=A_k\cos\frac{\mu_k at}{l}+B_k\sin\frac{\mu_k at}{l},$$

и ищем решение смешанной задачи в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\mu_k at}{l}+B_k\sin\frac{\mu_k at}{l}\right)\cos\frac{\mu_k x}{l}.$$

Подставляя этот ряд в первое начальное условие, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\frac{\mu_k x}{l}=h(l-x),$$

откуда находим коэффициенты

$$A_k=\frac{h}{\int\limits_0^l\cos^2\frac{\mu_k x}{l}\,dx}\int\limits_0^l(l-x)\cos\frac{\mu_k x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{2h(1-\cos\mu_k)}{l}\left(\frac{l}{\mu_k}\right)^2\left(1+\frac{\sin 2\mu_k}{2\mu_k}\right)^{-1}=\frac{4hl}{\mu_k}\,\frac{1-\cos\mu_k}{2\mu_k+\sin 2\mu_k}.$$

Из второго начального условия следует, что $B_k=0$, $k=1,2,\ldots$

Таким образом, решение задачи принимает вид

$$u(x,t) = 4hl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos\mu_k}{\mu_k(2\mu_k + \sin 2\mu_k)} \cos\frac{\mu_k a t}{l} \cos\frac{\mu_k x}{l},$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\mu \operatorname{tg} \mu - Hl = 0$. ◀

Метод разделения переменных можно применять также для решения смешанных задач с дифференциальным уравнением более общего вида.

Пример 10. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Следуя методу Фурье, решение задачи будем искать в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя в уравнение предполагаемое решение, получим

$$T''X + 4T'X = X''T - 2XT.$$

Сгруппируем слагаемые

$$(T'' + 4T' + 2T)X = X''T$$

и разделим переменные. Приходим к соотношению

$$\frac{T'' + 4T' + 2T}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

из которого следует, что функции $X(x)$ и $T(t)$ являются решениями уравнений $T'' + 4T' + (2+\lambda^2)T = 0$ и $X'' + \lambda^2 X = 0$ соответственно.

Добавляя к уравнению относительно $X(x)$ условия, вытекающие из граничных условий смешанной задачи, получим задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим собственные значения и собственные функции

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2}, \quad X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)x}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Относительно функции $T_k(t)$ имеем уравнение

$$T_k'' + 4T_k' + \left[2 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right] T_k = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение

$$\mu^2 + 4\mu + \left[2 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right] = 0,$$

дискриминант которого равен $D = 16 - 4\left[2 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2\right] = 8 - (2k+1)^2$.

Пусть $k = 0$. Тогда дискриминант положителен и корни характеристического уравнения равны

$$\mu_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

В качестве фундаментальной системы решений в данном случае вместо обычной системы $e^{\left(-2+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t}, e^{\left(-2-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t}$ удобно взять функции $e^{-2t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{7}}{2}t$, $e^{-2t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{7}}{2}t$. Тогда общее решение запишется в виде

$$T_0(t) = A_0 e^{-2t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{7}}{2}t + B_0 e^{-2t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{7}}{2}t.$$

Если $k > 0$, то дискриминант отрицателен, а корни характеристического уравнения $\mu_{1,2} = -2 \pm i\frac{\sqrt{(2k+1)^2 - 8}}{2}$. Следовательно, общее решение принимает вид

$$T_k(t) = A_k e^{-2t}\cos\frac{\sqrt{(2k+1)^2-8}}{2}t + B_k e^{-2t}\sin\frac{\sqrt{(2k+1)^2-8}}{2}t.$$

Решение смешанной задачи будем искать в виде ряда

$$u(x,t) = \left(A_0 e^{-2t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{7}}{2}t + B_0 e^{-2t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\cos\frac{x}{2} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k e^{-2t}\cos\frac{\sqrt{(2k+1)^2-8}}{2}t + \right. \\ \left. + B_k e^{-2t}\sin\frac{\sqrt{(2k+1)^2-8}}{2}t\right]\cos\frac{(2k+1)x}{2}.$$

Из первого начального условия следует, что $A_k = 0$. Дифференцируя почленно ряд по t и подставляя во второе начальное условие, с учетом найденных A_k приходим к соотношению

$$B_0\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{\sqrt{(2k+1)^2-8}}{2}\cos\frac{(2k+1)x}{2}=x.$$

Отсюда вытекает, что $B_0=\dfrac{2}{\sqrt{7}}\,\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos\frac{x}{2}\,dx=\frac{8}{\pi\sqrt{7}}\,(\pi-2)$,

$$B_k=\frac{2}{\sqrt{(2k+1)^2-8}}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos\frac{(2k+1)x}{2}\,dx=$$
$$=\frac{8}{\pi\sqrt{(2k+1)^2-8}}\left[\frac{\pi(-1)^k}{2k+1}-\frac{2}{(2k+1)^2}\right].$$

Таким образом, решение задачи имеет вид

$$u(x,t)=\frac{8(\pi-2)}{\pi\sqrt{7}}\,e^{-2t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{7}}{2}\,t\cos\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi\sqrt{(2k+1)^2-8}}\times$$
$$\times\left[\frac{\pi(-1)^k}{2k+1}-\frac{2}{(2k+1)^2}\right]e^{-2t}\sin\frac{\sqrt{(2k+1)^2-8}}{2}\,t\cos\frac{(2k+1)x}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 11. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}, & 0<x<1, \quad t>0,\\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=1}=0, & t\geqslant 0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Решение. В соответствии с методом разделения переменных будем искать решение в виде произведения $u(x,t)=X(x)T(t)$. После подстановки в уравнение и разделения переменных, получим

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''+2X'}{X}=-\lambda^2.$$

Следовательно, функция $T(t)$ является решением уравнения

$$T''+\lambda^2T=0,$$

а функция $X(x)$ — решением задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что мы имеем дело с задачей вида (29). Действительно, умножим уравнение на e^{2x} и запишем его в виде

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\,\frac{dX}{dx}\right) + \lambda^2 e^{2x} X = 0.$$

Из этого равенства следует, что собственные функции задачи Штурма — Лиувилля ортогональны на отрезке $[0,1]$ с весом e^{2x}.

Найдем теперь собственные функции и собственные значения. Характеристическое уравнение имеет вид $\mu^2 + 2\mu + \lambda^2 = 0$, а его дискриминант $D = 1 - \lambda^2$ может быть ка положительным, так и отрицательным. Рассмотрим три случая.

1. $D > 0$. Общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{1-\lambda^2})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1-\lambda^2})x}.$$

Подставляя в граничные условия, находим

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{-1+\sqrt{1-\lambda^2}} + C_2 e^{-1-\sqrt{1-\lambda^2}} = 0,$$

откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, те значения λ, для которых $D > 0$, не могут быть собственными значениями.

2. $D = 0$. Тогда $\lambda = \pm 1$ и $X(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$. Нетрудно проверить, что такие λ также не являются собственными значениями.

3. $D < 0$. В этом случае корни характеристического уравнения имеют вид $\mu_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\lambda^2 - 1}$, а общее решение

$$X(x) = C_1 e^{-x} \cos\sqrt{\lambda^2 - 1}\,x + C_2 e^{-x} \sin\sqrt{\lambda^2 - 1}\,x.$$

Подставляя в граничные условия, получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 e^{-1} \sin\sqrt{\lambda^2 - 1} = 0,$$

откуда следует, что $\sqrt{\lambda^2 - 1} = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$, и

$$\lambda_k^2 = (k\pi)^2 + 1, \quad X_k(x) = e^{-x}\sin(k\pi x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Функции $T_k(t)$ находим из уравнения $T_k'' + \big[(k\pi)^2 + 1\big] T_k = 0$. Его общее решение имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{(k\pi)^2 + 1}\,t + B_k \sin\sqrt{(k\pi)^2 + 1}\,t.$$

Составим ряд из произведений функций $T_k(x)$ и $X_k(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bigl[A_k \cos\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t + B_k \sin\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t\bigr] e^{-x}\sin(k\pi x).$$

Подставляя его в первое начальное условие, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-x}\sin(k\pi x) = \varphi(x).$$

Это равенство представляет собой разложение заданной функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0,1]$ в ряд Фурье по ортогональной с весом $\rho(x) = e^{2x}$ системе функций $\bigl\{e^{-x}\sin(k\pi x)\bigr\}$. Коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$A_k = \frac{\int\limits_0^1 \varphi(x)e^{x}\sin(k\pi x)\,dx}{\int\limits_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx} = 2\int\limits_0^1 \varphi(x)e^{x}\sin(k\pi x)\,dx. \tag{37}$$

Подстановка во второе начальное условие приводит к соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k\sqrt{(k\pi)^2+1}\,e^{-x}\sin(k\pi x) = 0,$$

из которого вытекает, что $B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Окончательно решение задачи принимает вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\bigl[\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t\bigr] e^{-x}\sin(k\pi x),$$

где коэффициенты A_k определяются по формуле (37). ◄

1.2.4. Смешанные задачи для неоднородного уравнения колебаний струн и стержней

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях струны $0 \leqslant x \leqslant l$, жестко закрепленной на концах, совершаемых под действием внешней силы с линейной плотностью $F(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{38}$$

Здесь $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$, $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho_0}$, T_0 — натяжение струны, ρ_0 — постоянная плотность струны.

Будем искать решение задачи (38) в виде суммы $u(x,t) = v(x,t)+w(x,t)$, где $v(x,t)$ — решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{39}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0 \tag{40}$$

и однородным начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{41}$$

а $w(x,t)$ — решение смешанной задачи для однородного уравнения, удовлетворяющее заданным граничным и начальным условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ w|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{42}$$

Функция $v(x,t)$ описывает вынужденные колебания струны, совершаемые под действием внешней возмущающей силы при отсутствии начальных возмущений. Функция $w(x,t)$ характеризует свободные колебания струны, вызванные начальными возмущениями.

Решение смешанной задачи (42) находится методом разделения переменных и представляется в виде

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{43}$$

где коэффициенты A_k и B_k определяются формулами

$$A_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx. \tag{44}$$

Функцию $v(x,t)$ ищем в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующей однородной задачи Штурма — Лиувилля

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{45}$$

рассматривая при этом переменную t как неотрицательный параметр. Граничные условия (40) для функции $v(x,t)$, очевидно, выполняются.

В свою очередь, разложим функцию $f(x,t)$ на отрезке $[0,l]$ в ряд Фурье по синусам

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{46}$$

где $f_k(t) = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l f(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx$. Подставляя разложения (45) и (46) в уравнение (39), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[v_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 v_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{47}$$

В силу полноты ортогональной тригонометрической системы функций $\left\{ \sin \dfrac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}$, равенство (47) будет выполнено, если

$$v_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 v_k(t) = f_k(t). \tag{48}$$

Подставляя ряд (45) в начальные условия (41), получим

$$v_k(0) = 0, \quad v_k'(0) = 0. \tag{49}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (48) и начальные условия (49) образуют задачу Коши, решение которой может быть найдено методом Лагранжа вариации произвольных постоянных

$$v_k(t) = \frac{l}{k\pi a} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l}(t-\tau)\, d\tau. \tag{50}$$

Таким образом, решение задачи (38) запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{51}$$

где функции $v_k(t)$ определяются формулой (50), а коэффициенты A_k и B_k вычисляются согласно формулам (44).

Замечание 4. Смешанную задачу (38) можно решать непосредственно, не проводя ее предварительное расщепление. Для этого необходимо разложить искомое решение $u(x,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{52}$$

и представить функции $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в виде тригонометрических рядов Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \qquad f_k(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x,t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \qquad \varphi_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \qquad \psi_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx.$$

Подставляя ряды в уравнение и начальные условия, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[u_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 u_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая в этих соотношениях коэффициенты при одинаковых собственных функциях, приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} u_k''(t) + \left(\dfrac{k\pi a}{l} \right)^2 u_k(t) = f_k(t), \\ u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k. \end{cases}$$

Ее решение представляется в виде

$$u_k(t) = \varphi_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + \frac{l}{k\pi a} \psi_k \sin \frac{k\pi a t}{l} + \frac{l}{k\pi a} \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} (t-\tau)\, d\tau.$$

Подставляя найденное выражение для $u_k(t)$ в ряд, окончательно получим формулу для решения смешанной задачи (38)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k \cos\frac{k\pi at}{l} + \frac{l}{k\pi a}\,\psi_k \sin\frac{k\pi at}{l} \right] \sin\frac{k\pi x}{l} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{k\pi a} \left[\int_0^t f_k(\tau) \sin\frac{k\pi a}{l}\,(t-\tau)\,d\tau \right] \sin\frac{k\pi x}{l},$$

которая совпадает с формулой (51).

Замечание 5. В случае, когда заданы граничные условия второго, третьего рода или комбинированного типа, в разложениях (45) или (52) необходимо взять другой набор собственных функций. Например, если смешанная задача имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

то ее решение следует искать в виде тригонометрического ряда Фурье

$$u(x,t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cos\frac{k\pi x}{l},$$

где $X_k(x) = \cos\dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 0, 1, \ldots,$ — собственные функции соответствующей задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Замечание 6. На практике при решении возникающих задач Коши, как правило, не прибегают к методу вариации произвольных постоянных. Обычно для построения решения дифференциальных уравнений используют специальный вид правых частей этих уравнений либо применяют операционное исчисление.

Пример 12. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bxt, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin \dfrac{3\pi x}{l}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решение. Поставленная задача описывает колебания жестко закрепленной струны, подверженной действию возмущающей силы $f(x,t) = bxt$.

I способ. Будем искать решение в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{53}$$

рассматривая при этом переменную t как неотрицательный параметр. Граничные условия для функции $u(x,t)$ выполняются.

В свою очередь, разложим функцию $f(x,t) = bxt$ на отрезке $[0,l]$ в ряд Фурье по синусам

$$bxt = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{54}$$

где коэффициенты $f_k(t)$ непосредственно вычисляются по формулам:

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l bxt \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = -\frac{2bt}{k\pi} \int_0^l x\, d\left(\cos \frac{k\pi x}{l}\right) =$$

$$= -\frac{2bt}{k\pi}\left(x \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l - \int_0^l \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx \right) = \frac{2bl(-1)^{k+1} t}{k\pi}.$$

Подставляя разложения (53) и (54) в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[u_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Из свойства полноты тригонометрической системы функций вытекает равенство

$$u_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t) = f_k(t).$$

Далее, подставим ряд (53) в начальные условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = 0. \tag{55}$$

Поскольку собственные функции обладают свойством ортогональности на отрезке $[0, l]$, из соотношений (55) следует, что

$$u_3(0) = 1, \quad u_k(0) = 0, \quad k \neq 3, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, приходим к семейству задач Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} u_k''(t) + \left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t) = \dfrac{2bl(-1)^{k+1}t}{k\pi}, \\ u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k \neq 3, \end{cases} \begin{cases} u_3''(t) + \left(\dfrac{3\pi a}{l}\right)^2 u_3(t) = \dfrac{2blt}{3\pi}, \\ u_3(0) = 1, \quad u_3'(0) = 0. \end{cases}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения для $u_k(t)$, $k \neq 3$, будем искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$u_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k \sin \frac{k\pi at}{l} + u_k^{\text{част}}(t),$$

где $u_k^{\text{част}}(t) = c_k + d_k t$. Подставляя $u_k^{\text{част}}(t)$ в дифференциальное уравнение и применяя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (c_k + d_k t) = \frac{2bl(-1)^{k+1}}{k\pi} t \quad \Rightarrow \quad c_k = 0, \quad d_k = \frac{2bl^3(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3 a^2} t.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$u_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi at}{l} + B_k \sin \frac{k\pi at}{l} + \frac{2bl^3(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3 a^2} t.$$

Из начальных условий вытекает, что

$$A_k = 0, \quad B_k = \frac{2bl^4(-1)^k}{(k\pi)^4 a^3}.$$

Таким образом, при $k \neq 3$ получим

$$u_k(t) = \frac{2bl^3(-1)^k}{(k\pi)^3 a^2} \left(\frac{l}{k\pi a} \sin \frac{k\pi at}{l} - t \right).$$

Рассмотрим задачу Коши при $k = 3$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид, аналогичный случаю $k \neq 3$:

$$u_3(t) = A_3 \cos\frac{3\pi at}{l} + B_3 \sin\frac{3\pi at}{l} + \frac{2bl^3}{(3\pi)^3 a^2}\, t.$$

Начальные условия дают $A_3 = 1$, $B_3 = -\dfrac{2bl^4}{(3\pi)^4 a^3}$. Следовательно,

$$u_3(t) = \cos\frac{3\pi at}{l} - \frac{2bl^3}{27\pi^3 a^2}\left(\frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l} - t\right).$$

Окончательно приходим к решению смешанной задачи

$$u(x,t) = \frac{2bl^3}{\pi^3 a^2}\sum_{k=1,k\neq 3}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\left(\frac{l}{k\pi a}\sin\frac{k\pi at}{l} - t\right)\sin\frac{k\pi x}{l} + \\ + \left[\cos\frac{3\pi at}{l} - \frac{2bl^3}{27\pi^3 a^2}\left(\frac{l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{l} - t\right)\right]\sin\frac{3\pi x}{l}. \quad (56)$$

II способ. Будем искать решение задачи в виде суммы двух функций $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где $v(x,t)$ — решение смешанной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bxt, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \quad (57)$$

а функция $w(x,t)$ является решением однородной смешанной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ w|_{t=0} = \sin\dfrac{3\pi x}{l}, \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \quad (58)$$

Задача для функции $v(x,t)$ отличается от исходной лишь начальным условием $v|_{t=0} = 0$. Применяя указанный выше подход, получим решение смешанной задачи (57) в виде

$$v(x,t) = \frac{2bl^3}{\pi^3 a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\left(\frac{l}{k\pi a}\sin\frac{k\pi at}{l} - t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Согласно алгоритму метода разделения переменных, решением однородной смешанной задачи (58) является ряд

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя этот ряд в начальные условия, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}=\sin\frac{3\pi x}{l},\quad \sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}=0.$$

В силу ортогональности собственных функций на отрезке $[0,l]$, отсюда следует, что

$$A_3=1,\quad A_k=0,\quad k\neq 3,\quad B_k=0,\quad k=1,2,\ldots$$

Таким образом, $w(x,t)=\cos\dfrac{3\pi at}{l}\sin\dfrac{3\pi x}{l}$. Складывая $v(x,t)$ и $w(x,t)$, получим решение $u(x,t)$, совпадающее с (56). ◄

Пример 13. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x(l-x)t^2, & 0<x<l,\quad t>0,\\ u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0, & t\geqslant 0,\\ u\big|_{t=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Решение. Будем искать решение задачи в виде ряда, удовлетворяющего граничным условиям:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Правую часть уравнения также разложим в ряд Фурье

$$x(l-x)t^2=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)t^2\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2t^2}{k\pi}\int_0^l(l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=-\frac{4l^2t^2}{(k\pi)^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l=\begin{cases}0, & \text{если}\quad k=2n,\\ \dfrac{8l^2t^2}{(2n+1)^3\pi^3}, & \text{если}\quad k=2n+1.\end{cases}$$

Подставим эти ряды в исходное дифференциальное уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 u_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Отсюда следует, что

$$u_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 u_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из начальных условий вытекают равенства $u_k(0) = 0$, $u_k'(0) = 0$. Таким образом, приходим к семейству задач Коши

$$\begin{cases} u_k''(t) + \left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2 u_k(t) = f_k(t), \\ u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

При $k = 2n$ задача Коши имеет только тривиальное решение $u_k(t) = 0$. В случае, когда $k = 2n+1$, уравнение принимает вид

$$u_k''(t) + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}\,u_k(t) = \frac{8l^2t^2}{(2n+1)^3\pi^3}.$$

Решим это уравнение методом операционного исчисления. Применяя к уравнению преобразование Лапласа и учитывая начальные условия, приходим к операторному уравнению

$$U_k(p)p^2 + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}\,U_k(p) = \frac{16l^2}{(2n+1)^3\pi^3p^3},$$

где $U_k(p)$ — изображение функции $u_k(t)$.

Введем обозначения: $a_k^2 = \dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}$, $b_k = \dfrac{16l^2}{(2n+1)^3\pi^3}$. Тогда операторное уравнение принимает вид

$$U_k(p)p^2 + a_k^2 U_k(p) = \frac{b_k}{p^3},$$

откуда находим, что $U_k(p) = \dfrac{b_k}{p^3(p^2 + a_k^2)}$.

Преобразуем правую часть этого равенства. Имеем

$$\frac{b_k}{p^3(p^2+a_k^2)} = \frac{(b_k/a_k^2)(p^2+a_k^2)-(b_k/a_k^2)p^2}{p^3(p^2+a_k^2)} = \frac{b_k/a_k^2}{p^3} -$$

$$- \frac{b_k/a_k^2}{p(p^2+a_k^2)} = \frac{b_k/a_k^2}{p^3} - \frac{(b_k/a_k^4)(p^2+a_k^2)-(b_k/a_k^4)p^2}{p(p^2+a_k^2)} =$$

$$= \frac{b_k/a_k^2}{p^3} - \frac{b_k/a_k^4}{p} + \frac{(b_k/a_k^4)p}{p^2+a_k^2}.$$

Пользуясь таблицей оригиналов и изображений, получим

$$u_k(t) = \frac{b_k}{2a_k^2}\,t^2 - \frac{b_k}{a_k^4} + \frac{b_k}{a_k^4}\cos(a_k t) = \frac{8l^4}{(2n+1)^5\pi^5}\,t^2 -$$

$$- \frac{16l^6}{(2n+1)^7\pi^7} + \frac{16l^6}{(2n+1)^7\pi^7}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}.$$

Окончательно решение смешанной задачи принимает вид

$$u(x,t) = \frac{8l^4t^2}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5} - \frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7} +$$

$$+ \frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2n+1)\pi t}{l}\,\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7}. \blacktriangleleft$$

Замечание 7. Если правая часть уравнения смешанной задачи не зависит от переменной t, то иногда удобно искать решение в виде суммы $u(x,t) = v(x,t) + W(x)$, где $W(x)$ — стационарное состояние (статический прогиб струны под действием распределенной силы), $v(x,t)$ — отклонение от стационарного состояния. При этом функция $W(x)$ находится интегрированием краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} a^2W''(x) + f(x) = 0, \\ W(0) = 0, \quad W(l) = 0, \end{cases}$$

а функция $v(x,t)$ является решением простейшей смешанной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - W(x), \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

Ниже будет приведено подробное описание алгоритма решения смешанных задач со стационарными неоднородностями в дифференциальном уравнении и граничных условиях.

Пример 14. Решить задачу о продольных колебаниях стержня, подвешенного в концевой точке $x = 0$. Колебания совершаются под влиянием силы тяжести, а начальные смещение и скорость отсутствуют.

Решение. Отклонение точек стержня от положения равновесия $u(x,t)$ будет решением смешанной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

где g — ускорение силы тяжести.

I способ. Найдем собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \end{cases}$$

соответствующей однородному дифференциальному уравнению. Подставляя общее решение $X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$ в первое из граничных условий, получим $C_1 = 0$. Полагая $C_2 = 1$, из второго граничного условия имеем $\cos\lambda l = 0$. Отсюда находим

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Будем искать решение в виде ряда по собственным функциям, удовлетворяющего граничным условиям:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Входящую в уравнение функцию $f(x,t) = g$ также разложим в ряд Фурье на отрезке $[0, l]$ по синусам со сдвигом

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

где $f_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int\limits_0^l g\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx = \frac{4g}{(2k+1)\pi}$. Подставляя эти разложения в исходное уравнение, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{u_k''(t)+\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 u_k(t)\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Отсюда получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_k''(t)+\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 u_k(t) = f_k.$$

Присоединяя к нему начальные условия $u_k(0)=0$, $u_k'(0)=0$, приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} u_k''(t)+\left[\dfrac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 u_k(t) = f_k, \\ u_k(0)=0, \quad u_k'(0)=0, \quad k=0,1,\ldots \end{cases}$$

Частное решение ищем в виде $u_k^{\text{част}}(t) = C_k$. Подставляя его в уравнение, с учетом значений f_k получим

$$u_k^{\text{част}}(t) = \frac{16gl^2}{a^2\pi^3(2k+1)^3}.$$

Общее решение запишется в виде

$$u_k(t) = \frac{16gl^2}{a^2\pi^3(2k+1)^3} + A_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + B_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

Из начальных условий следует, что

$$A_k = -\frac{16gl^2}{a^2\pi^3(2k+1)^3}, \quad B_k = 0, \quad k=0,1,\ldots,$$

и решение задачи Коши принимает вид

$$u_k(t) = \frac{16gl^2}{a^2\pi^3(2k+1)^3}\left[1-\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right].$$

Таким образом, окончательно приходим к решению исходной задачи

$$u(x,t) = \frac{16gl^2}{a^2\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\left[1-\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

II способ. В соответствии с замечанием 7 представим $u(x,t)$ в виде суммы $u(x,t) = v(x,t) + W(x)$, где функцию $W(x)$ выберем так, чтобы $v(x,t)$ удовлетворяла однородному уравнению и однородным граничным условиям. С этой целью потребуем, чтобы $a^2W''(x) = -g$. Интегрируя дифференциальное уравнение, получим

$$W(x) = -\frac{g}{2a^2}\,x^2 + C_1x + C_2.$$

Определим постоянные C_1 и C_2 из условий $W(0) = 0$, $W'(l) = 0$. Имеем $C_2 = 0$, $C_1 = gl/a^2$, и в итоге получим частное решение

$$W(x) = -\frac{g}{2a^2}\,x^2 + \frac{gl}{a^2}\,x = \frac{g}{2a^2}\,x(2l-x),$$

удовлетворяющее дифференциальному уравнению и граничным условиям.

Относительно функции $v(x,t)$ имеем смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \\ v|_{t=0} = -\dfrac{g}{2a^2}\,x(2l-x), \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ее решение представляется в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + B_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Из второго начального условия получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} = 0,$$

откуда следует, что $B_k = 0$, $k = 0,1,\ldots$ Из первого начального условия вытекает соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} = -\frac{g}{2a^2}\,x(2l-x).$$

Оно представляет собой разложение заданной функции в ряд Фурье на отрезке $[0,l]$ по синусам со сдвигом. Коэффициенты разложения вычисляются по формулам

$$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l\left[-\frac{g}{2a^2}\,x(2l-x)\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx = -\frac{16gl^2}{a^2(2k+1)^3\pi^3}.$$

С учетом найденных коэффициентов A_k и B_k и вспомогательной функции $W(x)$ окончательно получим решение смешанной задачи

$$u(x,t) = \frac{g}{2a^2}\,x(2l-x) - \\ - \frac{16gl^2}{a^2\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \blacktriangleleft$$

Замечание 8. Заметим, что различие в записи решений рассматриваемой задачи обусловлено тем, что при использовании первого способа функция $W(x) = \dfrac{g}{2a^2}\,x(2l-x)$ представлена рядом Фурье по ортогональной на отрезке $[0,l]$ системе функций $\left\{\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l}\right\}_{k=0}^{\infty}$.

Пример 15. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Разложим решение $u(x,t)$ и правую часть уравнения $f(x,t)$ в ряды Фурье по ортогональной системе функций $\{\sin k\pi x\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin k\pi x, \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin k\pi x,$$

$$f_k = 2\int_0^1 \sin k\pi x\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = 2n, \\ \dfrac{4}{(2n+1)\pi}, & \text{если} \quad k = 2n+1. \end{cases}$$

Подставляя эти разложения в дифференциальное уравнение и начальные условия, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big[u_k''(t) + u_k'(t) + (k\pi)^2 u_k(t)\big]\sin k\pi x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin k\pi x,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin k\pi x = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0)\sin k\pi x = 0.$$

Отсюда приходим к задаче Коши для коэффициентов $u_k(t)$

$$\begin{cases} u_k''(t) + u_k'(t) + (k\pi)^2 u_k(t) = f_k, \\ u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Если $k = 2n$ четное, то решением задачи Коши будет $u_k(t) = 0$. Если $k = 2n+1$ нечетное, то дифференциальное уравнение

$$u_k''(t) + u_k'(t) + \big[(2n+1)\pi\big]^2 u_k(t) = \frac{4}{(2n+1)\pi}$$

имеет частное решение $u_k^{\text{част}}(t) = \dfrac{4}{(2n+1)^3\pi^3}$.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\mu^2 + \mu + (2n+1)^2\pi^2 = 0.$$

Его дискриминант $D = 1 - 4(2n+1)^2\pi^2 < 0$ и корни характеристического уравнения равны

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{4(2n+1)^2\pi^2 - 1}}{2}.$$

В качестве фундаментальной системы решений выберем функции

$$e^{-\frac{t}{2}}\cos\lambda_n t, \quad e^{-\frac{t}{2}}\sin\lambda_n t, \quad \lambda_n = \sqrt{(2n+1)^2\pi^2 - \frac{1}{4}}.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$u_k(t) = \frac{4}{(2n+1)^3\pi^3} + e^{-\frac{t}{2}}(A_k\cos\lambda_n t + B_k\sin\lambda_n t).$$

Из условий $u_k(0) = 0$, $u_k'(0) = 0$ вытекает, что

$$A_k = -\frac{4}{(2n+1)^3\pi^3}, \quad B_k = \frac{A_k}{2\lambda_n}.$$

Таким образом, при нечетных k приходим к решению задачи Коши

$$u_k(t) = \frac{4}{(2n+1)^3\pi^3} + e^{-\frac{t}{2}}\left[-\frac{4}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\lambda_n t - \frac{4}{(2n+1)^3\pi^3}\,\frac{\sin\lambda_n t}{2\lambda_n}\right].$$

Окончательно получим ответ

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left[1 - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\lambda_n t + \frac{1}{2\lambda_n}\sin\lambda_n t\right)\right]\sin(2n+1)\pi x,$$

где λ_n вычисляются по формуле $\lambda_n = \sqrt{(2n+1)^2\pi^2 - \dfrac{1}{4}}$. ◀

Замечание 9. При использовании метода разделения переменных для неоднородных уравнений в большинстве случаев относительно функций $v_k(t)$ будем иметь набор стандартных задач Коши. Как уже отмечалось, с помощью операторного метода с применением преобразования Лапласа их можно свести к алгебраическому уравнению. Для разложения полученной в итоге правильной рациональной дроби в сумму простейших практически нет необходимости привлекать метод неопределенных коэффициентов. Достаточно лишь подобрать коэффициенты в соответствующем разложении этой дроби. В частности, при решении смешанной задачи для уравнения колебаний, правая часть которого содержит функции вида $f(x)e^{-\lambda t}$, $f(x)\sin\alpha t$ или $f(x)\cos\beta t$, в случае однородных начальных условий приходим к следующим задачам Коши:

$$\begin{cases} v_k''(t) + \omega_k^2 v_k(t) = Ae^{-\lambda t}, \\ v_k(0) = 0, \quad v_k'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_k''(t) + \omega_k^2 v_k(t) = A\sin\alpha t, \\ v_k(0) = 0, \quad v_k'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_k''(t) + \omega_k^2 v_k(t) = A\cos\beta t, \\ v_k(0) = 0, \quad v_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Применяя к обеим частям дифференциальных уравнений преобразование Лапласа и проводя разложение соответствующих изображений, в результате получим

$$\frac{A}{(p^2+\omega_k^2)(p+\lambda)} = \frac{A}{\omega_k^2+\lambda^2}\left(\frac{1}{p+\lambda} - \frac{p-\lambda}{p^2+\omega_k^2}\right) \risingdotseq \\ \risingdotseq \frac{A}{\omega_k^2+\lambda^2}\left(e^{-\lambda t} - \cos\omega_k t + \frac{\lambda}{\omega_k}\sin\omega_k t\right), \quad (59)$$

$$\frac{A\alpha}{(p^2+\omega_k^2)(p^2+\alpha^2)} = \frac{A\alpha}{\alpha^2-\omega_k^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega_k^2} - \frac{1}{p^2+\alpha^2}\right) \risingdotseq \\ \risingdotseq \frac{A\alpha}{\alpha^2-\omega_k^2}\left(\frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t - \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\right), \quad (60)$$

$$\frac{Ap}{(p^2+\omega_k^2)(p^2+\beta^2)} = \frac{Ap}{\beta^2-\omega_k^2}\left(\frac{1}{p^2+\omega_k^2} - \frac{1}{p^2+\beta^2}\right) \risingdotseq \\ \risingdotseq \frac{A}{\beta^2-\omega_k^2}\,(\cos\omega_k t - \cos\beta t). \quad (61)$$

Использование формул (59)–(61) позволяет существенно упростить процедуру нахождения коэффициентов $v_k(t)$ ряда (45).

Замечание 10. В некоторых задачах для уравнений со специальной правой частью удается найти функцию $W(x,t)$, удовлетворяющую неоднородному дифференциальному уравнению и граничным условиям. Тогда, отыскивая решение исходной задачи в виде $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, получим смешанную задачу для функции $v(x,t)$, удовлетворяющей однородному уравнению, граничным условиям и начальным условиям вида

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - W|_{t=0}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) - \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Пример 16. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + he^{-t} \sin \dfrac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{62}$$

Решение. I способ. Решение задачи (62) будем искать в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{63}$$

Разложим правую часть $f(x,t) = he^{-t} \sin \dfrac{\pi x}{l}$ в ряд Фурье по системе собственных функций

$$he^{-t} \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \tag{64}$$

Левая часть этого равенства с точностью до множителя представляет собой собственную функцию $X_1(x) = \sin \dfrac{\pi x}{l}$. В силу ортогональности собственных функций $\left\{\sin \dfrac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[0, l]$, имеем

$$f_1(t) = he^{-t}, \quad f_k(t) = 0, \quad k \neq 1.$$

Подставляя разложения (63) и (64) в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[u_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая коэффициенты Фурье в левой и правой частях этого равенства, получим обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$u_1''(t) + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 u_1(t) = he^{-t}, \quad u_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t) = 0, \quad k \neq 1.$$

Подстановка ряда (63) в начальные условия дает

$$u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, приходим к семейству задач Коши относительно коэффициентов $u_k(t)$ ряда (63):

$$\begin{cases} u_1''(t) + \left(\dfrac{\pi a}{l}\right)^2 u_1(t) = he^{-t}, \\ u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0, \end{cases} \tag{65}$$

$$\begin{cases} u_k''(t) + \left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2 u_k(t) = 0, \\ u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k \neq 1. \end{cases} \tag{66}$$

В силу теоремы единственности решения задачи Коши, решениями (66) являются функции $u_k(t) \equiv 0$, $k \neq 1$. Общее решение дифференциального уравнения для функции $u_1(t)$ будем искать в виде

$$u_1(t) = A_1 \cos\frac{\pi a t}{l} + B_1 \sin\frac{\pi a t}{l} + u_1^{\text{част}}(t),$$

где $u_1^{\text{част}}(t) = Ce^{-t}$. Подставляя $u_1^{\text{част}}(t)$ в уравнение (65), получим

$$Ce^{-t} + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 Ce^{-t} = he^{-t}.$$

Отсюда находим константу $C = \dfrac{hl^2}{l^2 + \pi^2 a^2}$. Следовательно,

$$u_1(t) = A_1 \cos\frac{\pi a t}{l} + B_1 \sin\frac{\pi a t}{l} + \frac{hl^2}{l^2 + \pi^2 a^2}\, e^{-t}.$$

Из начальных условий вытекает, что

$$A_1 = -\frac{hl^2}{l^2 + \pi^2 a^2}, \quad B_1 = \frac{l}{\pi a}\,\frac{hl^2}{l^2 + \pi^2 a^2}.$$

Таким образом,

$$u_1(t) = -\frac{hl^2}{l^2+\pi^2a^2}\cos\frac{\pi at}{l} + \frac{l}{\pi a}\frac{hl^2}{l^2+\pi^2a^2}\sin\frac{\pi at}{l} + \frac{hl^2}{l^2+\pi^2a^2}\,e^{-t}.$$

Окончательно приходим к решению смешанной задачи

$$u(x,t) = \frac{hl^2}{l^2+\pi^2a^2}\left(e^{-t} - \cos\frac{\pi at}{l} + \frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{67}$$

II способ. Запишем задачу Коши (65) в виде

$$\begin{cases} u_1''(t) + \omega_1^2 u_1(t) = he^{-t}, \\ u_1(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0, \end{cases}$$

где $\omega_1 = \dfrac{\pi a}{l}$. Применяя преобразование Лапласа и учитывая замечание 9, с помощью формулы (59) сразу приходим к соотношению

$$\frac{h}{(p^2+\omega_1^2)(p+1)} \risingdotseq \frac{h}{\omega_1^2+1}\left(e^{-t} - \cos\omega_1 t + \frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right). \tag{68}$$

Очевидно, что оригинал в правой части выражения (68) совпадает с функцией $u_1(t)$, полученной предыдущим способом, и, следовательно, решение смешанной задачи (62) дается формулой (67).

III способ. Будем искать решение задачи (62) в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t),$$

где функция $W(x,t)$ подбирается, исходя из вида правой части дифференциального уравнения, а именно, $W(x,t) = Ce^{-t}\sin\dfrac{\pi x}{l}$. При этом граничные условия выполняются автоматически. Подставляя $W(x,t)$ в уравнение, получим

$$Ce^{-t}\sin\frac{\pi x}{l} = -\frac{\pi^2a^2}{l^2}Ce^{-t}\sin\frac{\pi x}{l} + he^{-t}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Отсюда $C = \dfrac{hl^2}{l^2+\pi^2a^2}$ и функция $W(x,t)$ принимает вид

$$W(x,t) = \frac{hl^2}{l^2+\pi^2a^2}\,e^{-t}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Таким образом, найдено частное решение, удовлетворяющее дифференциальному уравнению и граничным условиям.

В смешанной задаче для функции $v(x,t)$ дифференциальное уравнение является однородным, а начальные условия определяются соотношениями $v|_{t=0} = u|_{t=0} - W|_{t=0}$, $v'_t\big|_{t=0} = u'_t\big|_{t=0} - W'_t\big|_{t=0}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = -\dfrac{hl^2}{l^2+\pi^2 a^2}\sin\dfrac{\pi x}{l}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dfrac{hl^2}{l^2+\pi^2 a^2}\sin\dfrac{\pi x}{l}. \end{cases} \tag{69}$$

В соответствии с методом разделения переменных, запишем решение однородной смешанной задачи (69) в виде ряда с неопределенными коэффициентами

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{l} + B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя этот ряд в начальные условия, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = -\frac{hl^2}{l^2+\pi^2 a^2}\sin\frac{\pi x}{l},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{hl^2}{l^2+\pi^2 a^2}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Собственные функции $\left\{\sin\dfrac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$ обладают свойством ортогональности на отрезке $[0,l]$. Следовательно,

$$A_1 = -\frac{hl^2}{l^2+\pi^2 a^2}, \quad B_1 = \frac{l}{\pi a}\frac{hl^2}{l^2+\pi^2 a^2}, \quad A_k = 0, \quad B_k = 0, \quad k \neq 1.$$

Таким образом,

$$v(x,t) = \frac{hl^2}{l^2+\pi^2 a^2}\left(-\cos\frac{\pi at}{l} + \frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Складывая $v(x,t)$ и $W(x,t)$, получим искомое решение $u(x,t)$. ◄

Пример 17. Найти колебания однородной струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами, если эти колебания вызваны непрерывно распределенной силой с линейной плотностью $F(x,t) = A\rho_0 \sin\omega t$, ρ_0 — постоянная плотность струны, $A = \mathrm{const}$, при этом начальные смещение и скорость отсутствуют. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

Решение. Поставленная задача эквивалента смешанной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{70}$$

Разложим функцию $u(x,t)$ и правую часть уравнения в ряды Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad A \sin \omega t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l A \sin \omega t \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{2A\big[1 - (-1)^k\big]}{k\pi} \sin \omega t,$$

Подставляя эти разложения в исходное дифференциальное уравнение и начальные условия, приходим к семейству задач Коши

$$\begin{cases} u_k''(t) + \omega_k^2 u_k(t) = \dfrac{2A\big[1-(-1)^k\big]}{k\pi} \sin \omega t, \\ u_k(0) = 0, \quad u_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где $\omega_k = \dfrac{k\pi a}{l}$. Рассмотрим два случая.

а) Нерезонансный случай. При $\omega \neq \omega_k$ частное решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$u_k^{\text{част}}(t) = \frac{2A\big[1-(-1)^k\big]}{k\pi(\omega_k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Учитывая начальные условия $u_k(0) = 0$, $u_k'(0) = 0$, для функций $u_k(t)$ получим

$$u_k(t) = \frac{2A\big[1-(-1)^k\big]}{k\pi(\omega_k^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_k} \sin \omega_k t \right)$$

и решение в случае $\omega \neq \omega_k$ принимает окончательный вид

$$u(x,t) = \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k(\omega_k^2 - \omega^2)} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_k} \sin \omega_k t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

б) Резонансный случай. Предполагается, что частота вынуждающей силы совпадает с одной из частот собственных колебаний струны, т. е. $\omega = \omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$.

При $k \neq n$ решение задачи Коши совпадает с решением для нерезонансного случая. Запишем уравнение для функции $u_n(t)$ при $k = n$:

$$u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = \frac{2A\big[1-(-1)^n\big]}{n\pi}\sin\omega_n t.$$

Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что его частное решение следует искать в виде

$$u_n^{\text{част}}(t) = t(C_1\cos\omega_n t + C_2\sin\omega_n t).$$

Подстановка в уравнение дает $u_n^{\text{част}}(t) = -\dfrac{A\big[1-(-1)^n\big]}{n\pi\omega_n}\,t\cos\omega_n t$, и

$$u_n(t) = -\frac{A\big[1-(-1)^n\big]}{n\pi\omega_n}\,t\cos\omega_n t + (A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t).$$

Из начальных условий следует, что $A_n = 0$, $B_n = \dfrac{1}{\omega_n}\,\dfrac{A\big[1-(-1)^n\big]}{n\pi\omega_n}$, и решение задачи Коши принимает вид

$$u_n(t) = \frac{A\big[1-(-1)^n\big]}{n\pi\omega_n}\left(\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t - t\cos\omega_n t\right).$$

Таким образом, приходим к решению смешанной задачи в случае резонансных колебаний

$$u(x,t) = \frac{A\big[1-(-1)^n\big]}{n\pi\omega_n}\left(\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t - t\cos\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k(\omega_k^2-\omega_n^2)}\left(\sin\omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega_k}\sin\omega_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Как видим, на n-й частоте собственных колебаний струны возникло явление резонанса. Оно вызвано наличием в решении слагаемого с множителем $t\cos\omega_n t$, амплитуда которого стремится к бесконечности при $t\to\infty$.

Замечание 11. В данной задаче резонанс можно наблюдать только на частотах с нечетными номерами, поскольку $u_n(t) = 0$ для четных n. ◄

1.2.5. Смешанные задачи о вынужденных колебаниях в общей постановке

Рассмотрим общую постановку задачи о вынужденных колебаниях струны, концы которой движутся по заданным законам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{71}$$

Введем вспомогательную функцию $W(x,t)$ так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям:

$$W|_{x=0} = \mu_1(t), \quad W|_{x=l} = \mu_2(t).$$

Тогда с помощью подстановки $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$ для новой неизвестной функции $v(x,t)$ получим смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x,t), \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x), \end{cases}$$

где функции $f_1(x,t)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ задаются формулами:

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \left[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right],$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - W|_{t=0}, \quad \psi_1(x) = \psi(x) - \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Следовательно, смешанная задача для неоднородного уравнения в общей постановке (71) сводится к задаче о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами (38).

Замечание 12. Приведем простейшие варианты функции $W(x,t)$ для смешанных задач с различными сочетаниями граничных условий первого и второго рода:

1) $u|_{x=0} = \mu_1(t),\ \ u|_{x=l} = \mu_2(t),\ \ W(x,t) = \dfrac{l-x}{l}\,\mu_1(t) + \dfrac{x}{l}\,\mu_2(t);$

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu_1(t),\ \ u|_{x=l} = \mu_2(t),\ \ W(x,t) = (x-l)\mu_1(t) + \mu_2(t);$

3) $u|_{x=0} = \mu_1(t),\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \mu_2(t),\ \ W(x,t) = \mu_1(t) + x\mu_2(t);$

4) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu_1(t),\ \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \mu_2(t),\ \ W(x,t) = \dfrac{x^2}{2l}\,\mu_2(t) - \dfrac{(x-l)^2}{2l}\,\mu_1(t).$

В последнем случае, когда $\mu_1(t) = \mu_2(t)$, в качестве $W(x,t)$ удобно взять функцию $W(x,t) = x\mu_1(t)$.

Отметим класс задач со стационарными неоднородностями, когда функции вынуждающей силы и условий закрепления концов струны не зависят от времени:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u|_{x=0} = H_1, \quad u|_{x=l} = H_2, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{72}$$

Здесь H_1 и H_2 — заданные постоянные.

Решение задачи (72) можно найти, выделяя стационарную часть решения: $u(x,t) = W(x) + v(x,t)$. Как уже отмечалось, в модели колебаний струны функция $W(x)$ описывает стационарный профиль, соответствующий статическому прогибу струны под действием распределенной силы $f(x)$.

Стационарное решение $W(x)$ находим как решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} a^2\dfrac{d^2W}{dx^2} + f(x) = 0, \\ W(0) = H_1, \quad W(l) = H_2. \end{cases}$$

Интегрируя уравнение и выполняя граничные условия, получим

$$W(x) = H_1 + (H_2 - H_1)\,\frac{x}{l} + \frac{x}{la^2}\int\limits_0^l d\xi \int\limits_0^\xi f(\eta)\,d\eta - \frac{1}{a^2}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi f(\eta)\,d\eta.$$

В частности, если $f(x) = f_0 = \mathrm{const}$, то

$$W(x) = H_1 + (H_2 - H_1)\,\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}\,x(l-x).$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$
с однородными граничными условиями $v|_{x=0} = 0$, $v|_{x=l} = 0$ и начальными условиями вида
$$v|_{t=0} = \varphi(x) - W(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x).$$

Таким образом, решение $v(x,t)$ можно найти по формулам (43), (44), заменив в (44) функцию $\varphi(x)$ на $\varphi(x) - W(x)$.

Пример 18. Решить смешанную задачу
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решение. Будем искать решение в виде $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, где вспомогательную функцию $W(x,t)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям:
$$W|_{x=0} = 1, \quad W|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Поскольку заданы граничные условия первого рода, то в качестве одной из таких функций можно взять $W(x,t) = \dfrac{l-x}{l}$.

В общем случае в результате замены уравнение для функции $v(x,t)$ становится неоднородным. Однако в силу того, что $W(x,t)$ тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению, после выполнения указанной замены приходим к однородной смешанной задаче для функции $v(x,t)$ с видоизмененными начальными условиями
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = -\dfrac{l-x}{l}, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решением этой задачи является ряд

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя его в начальные условия, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}=-\frac{l-x}{l},\quad \sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}=0.$$

Из первого равенства вытекает, что

$$A_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\left(-\frac{l-x}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{k\pi l}\int\limits_0^l(l-x)\,d\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\right)=$$

$$=\frac{2}{k\pi l}\left[(l-x)\cos\frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l+\int\limits_0^l\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\right]=-\frac{2}{k\pi}.$$

Второе равенство приводит к соотношениям $B_k=0$, $k=1,2,\ldots$ Таким образом, с учетом вида функции $W(x,t)$ получим ответ

$$u(x,t)=\frac{l-x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.\ ◀$$

Пример 19. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+xt, \quad 0<x<l, \quad t>0,\\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=A, \quad t\geqslant 0,\\ u|_{t=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Решение. Для устранения неоднородности в граничных условиях сделаем замену $u(x,t)=v(x,t)+\dfrac{Ax}{l}$. После подстановки в уравнение получим

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+xt. \tag{73}$$

Граничные условия становятся однородными

$$v|_{x=0}=0, \quad v|_{x=l}=0,$$

а начальные принимают вид

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - \frac{Ax}{l} = -\frac{Ax}{l}, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{74}$$

Поскольку граничные условия первого рода, то решение задачи относительно функции $v(x,t)$ следует искать в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Разложим предварительно функцию x в ряд Фурье по ортогональной системе функций

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где коэффициенты c_k вычисляются по формулам

$$c_k = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^l x d\cos\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left[x\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l - \int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\right] = \frac{2l(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

Отсюда находим разложения в ряды Фурье правой части уравнения для $v(x,t)$ и функции начального условия:

$$xt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l(-1)^{k+1}t}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad -\frac{Ax}{l} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A(-1)^k}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя полученные разложения в уравнение (73) и начальные условия (74) и приравнивая соответствующие коэффициенты при синусах, получим для функции $v_k(t)$ задачу Коши

$$\begin{cases} v_k''(t) + \left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2 v_k(t) = \dfrac{2l(-1)^{k+1}t}{k\pi}, \\ v_k(0) = \dfrac{2A(-1)^k}{k\pi}, \quad v_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$v_k(t) = C_1\cos\frac{k\pi at}{l} + C_2\sin\frac{k\pi at}{l} + v_k^{\text{част}}(t),$$

где частное решение $v_k^{\text{част}}(t)$ в соответствии с правой частью уравнения следует искать в виде линейной функции $v_k^{\text{част}}(t) = a_k t + b_k$. Подставляя выражение для $v_k^{\text{част}}(t)$ и применяя метод неопределенных коэффициентов, находим

$$\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 (a_k t + b_k) = \frac{2l(-1)^{k+1}t}{k\pi},$$

откуда следует, что

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2l(-1)^{k+1}}{k\pi}\left(\frac{l}{k\pi a}\right)^2 = \frac{2l^3(-1)^{k+1}}{a^2(k\pi)^3}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$v_k(t) = C_1 \cos\frac{k\pi at}{l} + C_2 \sin\frac{k\pi at}{l} + \frac{2l^3(-1)^{k+1}t}{a^2(k\pi)^3}.$$

Подставляя его в начальные условия, находим решение задачи Коши:

$$C_1 = \frac{2A(-1)^k}{k\pi}, \quad C_2\frac{k\pi a}{l} + \frac{2l^3(-1)^{k+1}}{a^2(k\pi)^3} = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = \frac{2l^4(-1)^k}{a^3(k\pi)^4},$$

$$v_k(t) = \frac{2A(-1)^k}{k\pi}\cos\frac{k\pi at}{l} + \frac{2l^4(-1)^k}{a^3(k\pi)^4}\sin\frac{k\pi at}{l} + \frac{2l^3(-1)^{k+1}t}{a^2(k\pi)^3}.$$

Окончательно получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = \frac{Ax}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A(-1)^k}{k}\cos\frac{k\pi at}{l} + \frac{l^4(-1)^k}{(a\pi)^3k^4}\sin\frac{k\pi at}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l} + \\ + \frac{2l^3t}{a^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l}. \ ◄$$

Пример 20. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = t, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\pi} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. В соответствии с замечанием 12, решение этой задачи будем искать в виде суммы $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, где $W(x,t) = t + x$, и относительно новой неизвестной функции $v(x,t)$ получим простейшую смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v\big|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2} - x, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение задачи представляется в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_k \cos\frac{(2k+1)t}{2} + B_k \sin\frac{(2k+1)t}{2} \right] \sin\frac{(2k+1)x}{2}.$$

Из начального условия $v\big|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2} - x$ вытекает соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\frac{(2k+1)x}{2} = \sin\frac{x}{2} - x.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства является многочленом по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, а именно, $\sin\dfrac{x}{2} = X_0(x)$. Поэтому необходимо найти разложение только для второго слагаемого и воспользоваться тем фактом, что коэффициенты Фурье суммы функций представляют собой сумму соответствующих коэффициентов каждого слагаемого. Имеем

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin\frac{x}{2} - x\right) \sin\frac{(2k+1)x}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{(2k+1)x}{2}\,dx - \\ - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin\frac{(2k+1)x}{2}\,dx = A_k^{(1)} + A_k^{(2)},$$

$$A_0^{(1)} = 1, \quad A_k^{(1)} = 0, \quad k \neq 0, \quad A_k^{(2)} = \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)^2}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Второе начальное условие приводит к равенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{2k+1}{2} \sin\frac{(2k+1)x}{2} = 0,$$

из которого следует, что $B_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$

Таким образом, решение смешанной задачи принимает вид

$$u(x,t) = t + x + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2} +$$
$$+ \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)t}{2}\sin\frac{(2k+1)x}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 21. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \dfrac{2}{a}\sin\dfrac{2l}{a}\sin 2t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -2\cos\dfrac{2x}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решение. Положим $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, где вспомогательную функцию $W(x,t)$ выберем в виде $W(x,t) = g(x)\sin 2t$.

Подставляя $W(x,t)$ в исходное уравнение, получим

$$-4g(x)\sin 2t = a^2 g''(x)\sin 2t + \sin 2t.$$

После несложных преобразований приходим к обыкноыенному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$g''(x) + \frac{4}{a^2}\,g(x) + \frac{1}{a^2} = 0.$$

Частным решением этого уравнения является функция $g^{\text{част}}(x) = -\dfrac{1}{4}$. Общее решение имеет вид

$$g(x) = C_1\cos\frac{2x}{a} + C_2\sin\frac{2x}{a} - \frac{1}{4}$$

и, следовательно,

$$W(x,t) = \left(C_1\cos\frac{2x}{a} + C_2\sin\frac{2x}{a} - \frac{1}{4}\right)\sin 2t.$$

Выберем постоянные C_1 и C_2 так, чтобы выполнялись граничные условия. Поскольку

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \left(-\frac{2C_1}{a}\sin\frac{2x}{a} + \frac{2C_2}{a}\cos\frac{2x}{a}\right)\sin 2t,$$

то из первого граничного условия следует, что $C_2 = 0$. Подстановка во второе граничное условие приводит к соотношению

$$-\frac{2C_1}{a} \sin\frac{2l}{a}\, \sin 2t = \frac{2}{a} \sin\frac{2l}{a}\, \sin 2t,$$

откуда $C_1 = -1$. Окончательно для функции $W(x,t)$ имеем

$$W(x,t) = -\left(\cos\frac{2x}{a} + \frac{1}{4}\right) \sin 2t.$$

Получим начальные условия для функции $v(x,t)$:

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - W|_{t=0} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = -2\cos\frac{2x}{a} + 2\left(\cos\frac{2x}{a} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для функции $v(x,t)$ приходим к однородной смешанной задаче с граничными условиями второго рода

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Ее решение записывается в виде ряда

$$v(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{l}\right) \cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Коэффициенты A_k и B_k определим из начальных условий:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{k\pi x}{l} = 0, \quad B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{l} \cos\frac{k\pi x}{l} = \frac{1}{2}.$$

В силу ортогональности собственных функций $\left\{\cos\dfrac{k\pi x}{l}\right\}_{k=0}^{\infty}$ на отрезке $[0,l]$, из этих равенств вытекает, что

$$A_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad B_0 = \frac{1}{2}, \quad B_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, $v(x,t) = \dfrac{t}{2}$. Окончательно приходим к ответу

$$u(x,t) = \frac{t}{2} - \left(\cos\frac{2x}{a} + \frac{1}{4}\right)\sin 2t. \blacktriangleleft$$

Пример 22. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\Big|_{x=0} = \alpha, \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = -\alpha, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решение. Нетрудно заметить, что постоянная функция $W = -\dfrac{\alpha}{h}$ удовлетворяет граничным условиям. Выполняя замену $u(x,t) = v(x,t) - \dfrac{\alpha}{h}$, получим смешанную задачу относительно $v(x,t)$ с однородными граничными условиями третьего рода:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - hv\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + hv\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v\big|_{t=0} = \dfrac{\alpha}{h}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Согласно методу Фурье, будем искать нетривиальные решения этой задачи в виде

$$v(x,t) = X(x)T(t).$$

После подстановки в дифференциальное уравнение и разделения переменных получим

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Из граничных условий находим

$$\big[X'(0) - hX(0)\big]T(t) = 0, \quad \big[X'(l) + hX(l)\big]T(t) = 0,$$

откуда в силу того, что $v(x,t) \neq 0$, вытекают равенства

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0.$$

Таким образом, для координатной функции $X(x)$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad 0 < x < l, \tag{75}$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \tag{76}$$

Общее решение уравнения (75) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Подставляя его в граничные условия (76), получим

$$\begin{cases} hC_1 - \lambda C_2 = 0, \\ (h\cos\lambda l - \lambda \sin\lambda l)C_1 + (h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l)C_2 = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы квадратная однородная система линейных уравнений имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} h & -\lambda \\ h\cos\lambda l - \lambda\sin\lambda l & h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l \end{vmatrix} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$2\operatorname{ctg}\lambda l = \frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda}. \tag{77}$$

Следовательно, собственными значениями λ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ задачи (75), (76) являются положительные корни уравнения (77).

Собственные функции $X_k(x)$ принимают вид

$$X_k(x) = \lambda_k \cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь выбраны константы $C_1 = \lambda_k$, $C_2 = \dfrac{hC_1}{\lambda_k} = h$.

Для функции $T(t)$ при $\lambda = \lambda_k$ имеем уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k^2 T_k(t) = 0,$$

общее решение которого дается формулой

$$T_k(t) = A_k\cos\lambda_k t + B_k\sin\lambda_k t.$$

Составим ряд с неопределенными коэффициентами

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k\cos\lambda_k t + B_k\sin\lambda_k t)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x).$$

Подставляя этот ряд в первое начальное условие, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\lambda_k \cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x) = \frac{\alpha}{h},$$

т. е. имеем разложение функции $\varphi(x) = \dfrac{\alpha}{h}$ на отрезке $[0,l]$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (75), (76). Согласно общей теории, собственные функции $\left\{X_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональны с весом $\rho(x)=1$ на отрезке $[0,l]$. Следовательно,

$$A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^l \frac{\alpha}{h}\,(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,dx.$$

Находим квадрат нормы собственных функций:

$$\|X_k\|^2 = \int\limits_0^l (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^l \left[\frac{1}{2}\,(\lambda_k^2+h^2) + \frac{1}{2}\,(\lambda_k^2-h^2)\cos 2\lambda_k x + \lambda_k h\sin 2\lambda_k x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\lambda_k^2+h^2) + \frac{\lambda_k^2-h^2}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k l - \frac{h}{2}\,(\cos 2\lambda_k l - 1).$$

Поскольку справедливы формулы

$$\sin 2\lambda_k l = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\lambda_k l}{1+\mathrm{tg}^2\,\lambda_k l},\qquad \cos 2\lambda_k l = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\lambda_k l}{1+\mathrm{tg}^2\,\lambda_k l},$$

а для $\lambda=\lambda_k$ выполняется равенство (77) при любых $k=1,2,\ldots,$ путем несложных преобразований получим следующее выражение для квадрата нормы: $\|X_k\|^2 = \dfrac{l(\lambda_k^2+h^2)+2h}{2}$.

Вычислим интегралы

$$\int\limits_0^l (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,dx = \sin\lambda_k l - \frac{h}{\lambda_k}\,(\cos\lambda_k l - 1) =$$

$$= \left[\frac{h}{\lambda_k} + \sin\lambda_k l\left(1 - \frac{h}{\lambda_k}\,\mathrm{ctg}\,\lambda_k l\right)\right] = \frac{h}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k^2+h^2}{2\lambda_k^2}\sin\lambda_k l =$$

$$= \frac{h}{\lambda_k} + \frac{\lambda_k^2+h^2}{2\lambda_k^2}\,\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\,\lambda_k l}} = \frac{h}{\lambda_k}\big[1+(-1)^{k+1}\big],$$

т. е. для четных $k = 2n$ все интегралы равны нулю.

Подставляя полученные выражения в коэффициенты Фурье A_k и принимая во внимание, что $B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, окончательно приходим к решению смешанной задачи

$$u(x,t) = -\frac{\alpha}{h} + 4\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2n+1}\big[(\lambda_{2n+1}^2 + h^2) + 2h\big]} \times$$
$$\times \left(\lambda_{2n+1} \cos \lambda_{2n+1} x + h \sin \lambda_{2n+1} x\right) \cos \lambda_{2n+1} t,$$

где λ_{2n+1} — положительные корни уравнения $2 \operatorname{ctg} \lambda l = \dfrac{\lambda}{h} - \dfrac{h}{\lambda}$. ◄

Пример 23. Найти продольные колебания однородного стержня, конец $x = 0$ которого закреплен жестко, а к концу $x = l$ приложена сила $F(t) = A \sin \omega t$, $A = \mathrm{const}$, действующая вдоль стержня. Начальные условия нулевые. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

Решение. Необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \dfrac{A}{E\sigma} \sin \omega t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{78}$$

где E — модуль упругости стержня, σ — площадь его поперечного сечения.

а) Нерезонансный случай. Пусть $\omega \neq \omega_k$, где $\omega_k = \dfrac{(2k+1)\pi a}{2l}$, $k = 0, 1, \ldots$, — частоты собственных колебаний стержня.

Положим $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, причем функцию $W(x,t)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла и дифференциальному уравнению, и граничным условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \\ W|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial W}{\partial x}\Big|_{x=l} = \dfrac{A}{E\sigma} \sin \omega t, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{79}$$

Будем искать эту функцию в виде

$$W(x,t) = X(x) \sin \omega t. \tag{80}$$

Подставляя $W(x,t)$ в (79), для $X(x)$ получим краевую задачу

$$\begin{cases} X''(x) + \dfrac{\omega^2}{a^2}\,X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = \dfrac{A}{E\sigma}. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\frac{\omega x}{a} + C_2 \sin\frac{\omega x}{a}.$$

Из граничных условий следует, что $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{Aa}{E\sigma\omega\cos\dfrac{\omega l}{a}}$. Тогда

$$X(x) = \frac{Aa}{E\sigma\omega}\,\frac{\sin\dfrac{\omega x}{a}}{\cos\dfrac{\omega l}{a}}, \quad W(x,t) = \frac{Aa}{E\sigma\omega}\,\frac{\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t}{\cos\dfrac{\omega l}{a}}.$$

Выполняя теперь замену

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{Aa}{E\sigma\omega}\,\frac{\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t}{\cos\dfrac{\omega l}{a}},$$

приходим к простейшей смешанной задаче для функции $v(x,t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = -\dfrac{Aa}{E\sigma}\,\dfrac{\sin\dfrac{\omega x}{a}}{\cos\dfrac{\omega l}{a}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решение задачи представляется в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

причем из первого начального условия следует, что $A_k = 0$, а из второго начального условия вытекает равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k\omega_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} = -\frac{Aa}{E\sigma}\,\frac{\sin\dfrac{\omega x}{a}}{\cos\dfrac{\omega l}{a}},$$

Отсюда получим

$$B_k = -\frac{Aa}{E\sigma\cos\dfrac{\omega l}{a}}\,\frac{2}{\omega_k l}\int\limits_0^l \sin\frac{\omega x}{a}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx = \frac{2Aa^2\omega(-1)^{k+1}}{E\sigma\omega_k l(\omega^2-\omega_k^2)}.$$

Таким образом, решением исходной смешанной задачи в нерезонансном случае будет функция

$$u(x,t) = \frac{Aa}{E\sigma\omega}\,\frac{\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t}{\cos\dfrac{\omega l}{a}} + {}$$
$$+\frac{2Aa^2\omega}{E\sigma l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\omega_k(\omega^2-\omega_k^2)}\sin\omega_k t\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

б) Резонансный случай. Предположим, что частота колебаний вынуждающей силы совпадает с одной из частот собственных колебаний стержня, т. е. $\omega = \omega_n = \dfrac{(2n+1)\pi a}{2l}$.

В этих условиях мы не можем искать частное решение $W(x,t)$ в виде (80). Здесь необходимо освободиться от неоднородности в граничном условии, перенеся ее в дифференциальное уравнение. Для этого сделаем подстановку

$$u(x,t) = v(x,t) + Ax\sin\omega t.$$

Тогда для функции $v(x,t)$ получим задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A\omega^2 x\sin\omega t, \quad 0<x<l, \quad t>0,\\[2mm] v|_{x=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t\geqslant 0,\\[2mm] v|_{t=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = -A\omega x, \quad 0\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

которая решается аналогично (70). Опуская выкладки, запишем решение смешанной задачи (78) при $\omega=\omega_n$:

$$u(x,t) = Ax\sin\omega_n t + \frac{4Al\omega_n(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2\pi^2}\left(\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t + t\cos\omega_n t\right)\times$$
$$\times\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} + \frac{8Al}{\pi^2}\sum_{k=0,k\neq n}^{\infty}\frac{\omega_n^2(-1)^k}{(2k+1)^2(\omega_k^2-\omega_n^2)}\times$$
$$\times\left(\sin\omega_n t - \frac{\omega_k}{\omega_n}\sin\omega_k t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

В данном случае наступает явление резонанса: амплитуда колебаний с частотой вынуждающей силы ω, приложенной к концу $x = l$ стержня, возрастает неограниченно пропорционально времени t. ◀

Пример 24. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} - 8u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x(1-4t) + \cos 3x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t, \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi t}{2}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t),$$

где функцию $W(x,t)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям. Поскольку заданы граничные условия комбинированного типа, то в соответствии с замечанием 12 возьмем $W(x,t) = xt$.

В результате замены приходим к смешанной задаче для функции $v(x,t)$ с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial v}{\partial t} - 8v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2x(1-4t) + \cos 3x - \\ - \left[\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial W}{\partial t} - 8W - \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right], \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \\ v\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} - W\big|_{t=0}, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\dfrac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0}. \end{cases}$$

После очевидных преобразований получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial v}{\partial t} - 8v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cos 3x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{81}$$

Собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля для соответствующего однородного уравнения являются $X_k(x) = \cos(2k+1)x$, $k = 0, 1, \ldots$ Поэтому решение задачи (81) будем искать в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\cos(2k+1)x. \tag{82}$$

Разложим правую часть уравнения $f(x,t) = \cos 3x$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций

$$\cos 3x = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos(2k+1)x. \tag{83}$$

Левая часть этого равенства представляет собой собственную функцию $X_1(x) = \cos 3x$. В силу ортогональности системы $\bigl\{\cos(2k+1)x\bigr\}_{k=0}^{\infty}$ на отрезке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, из (83) следует, что $f_1 = 1$, $f_k = 0$, $k \neq 1$.

Подставляя разложения (82) и (83) в дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl[v_k''(t) + 2v_k'(t) - 8v_k(t) + (2k+1)^2 v_k(t)\bigr]\times$$
$$\times \cos(2k+1)x = \sum_{k=1}^{n} f_k \cos(2k+1)x.$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях этого равенства, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v_k''(t) + 2v_k'(t) + \bigl[(2k+1)^2 - 8\bigr]v_k(t) = f_k.$$

Из начальных условий вытекает, что $v_k'(0) = 0$, $v_k(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, получим семейство задач Коши

$$\begin{cases} v_k''(t) + 2v_k'(t) + \bigl[(2k+1)^2 - 8\bigr]v_k(t) = 0, \\ v_k'(0) = 0, \quad v_k(0) = 0, \quad k \neq 1. \end{cases} \tag{84}$$

$$\begin{cases} v_1''(t) + 2v_1'(t) + v_1(t) = 1, \\ v_1'(0) = 0, \quad v_1(0) = 0. \end{cases} \tag{85}$$

Решениями задач Коши (84) являются функции $v_k(t) = 0$, $k \neq 1$. Решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэфициентами (85) ищем в виде

$$v_1(x,t) = v_1^{\text{част}}(t) + v_1^{\text{общ}}(t),$$

где $v_1^{\text{част}}(t) = 1$. Поскольку дискриминант характеристического уравнения $\mu^2+2\mu+1=0$ равен нулю, то общее решение однородного уравнения следует взять в виде

$$v_1^{\text{общ}}(t) = e^{-t}(A_1 + B_1 t).$$

Подставляя в начальные условия, получим $A_1 = -1$, $B_1 = -1$. Таким образом, $v(x,t) = \left(1 - e^{-t} - te^{-t}\right)\cos 3x$.

Окончательно запишем ответ

$$u(x,t) = xt + \left(1 - e^{-t} - te^{-t}\right)\cos 3x. \blacktriangleleft$$

Пример 25. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 7\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 7x - 2t - e^{-x}\sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = \pi t, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $u(x,t) = v(x,t) + xt$. Тогда для функции $v(x,t)$ приходим к смешанной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 7\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial v}{\partial x} - e^{-x}\sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \\ v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \tag{86}$$

Запишем задачу Штурма — Лиувилля для соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{87}$$

Умножая уравнение на e^{2x}, преобразуем его к виду

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\frac{dX}{dx}\right) + \lambda^2 e^{2x} X = 0.$$

Согласно общей теории краевых задач на собственные значения, из этого представления вытекает ортогональность собственных функций задачи (87) на отрезке $[0,\pi]$ с весом $\rho(x) = e^{2x}$.

Найдем теперь собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\mu^2 + 2\mu + \lambda^2 = 0,$$

а его дискриминант $D = 1 - \lambda^2$ может быть положительным, равным нулю и отрицательным. Рассмотрим все три случая.

1) $D > 0$. Общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{1-\lambda^2})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1-\lambda^2})x}.$$

Подставляя в граничные условия, получим

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{(-1+\sqrt{1-\lambda^2})\pi} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1-\lambda^2})\pi} = 0,$$

откуда следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, те значения λ, для которых $D > 0$, не могут быть собственными значениями.

2) $D = 0$. Тогда $\lambda = \pm 1$ и $X(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$. Нетрудно проверить, что такие λ также не являются собственными значениями.

3) $D < 0$. В этом случае корни характеристического уравнения имеют вид $\mu_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\lambda^2 - 1}$, а общее решение

$$X(x) = C_1 e^{-x} \cos \sqrt{\lambda^2 - 1}\, x + C_2 e^{-x} \sin \sqrt{\lambda^2 - 1}\, x.$$

Из граничных условий находим

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(\pi) = C_2 e^{-\pi} \sin \sqrt{\lambda^2 - 1}\, \pi = 0,$$

откуда следует, что $\sqrt{\lambda^2 - 1} = k$, $k = 1, 2, \ldots,$ и

$$\lambda_k = \sqrt{k^2 + 1}, \quad X_k(x) = e^{-x} \sin kx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Будем искать решение задачи (86) в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e^{-x} \sin kx, \tag{88}$$

где коэффициенты $v_k(t)$ определяются из дифференциального уравнения и начальных условий.

Разложим предварительно правую часть уравнения в ряд по системе функций $\left\{e^{-x} \sin kx\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$e^{-x} \sin 3x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-x} \sin kx.$$

В силу ортогональности системы собственных функций, отсюда следует, что $f_3 = 1,\ \ f_k = 0,\ \ k \neq 3.$

Подставим ряд (88) в дифференциальное уравнение:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl[v_k''(t) - 7v_k'(t)\bigr]e^{-x}\sin kx = \sum_{k=1}^{\infty}\bigl[-(k^2+1)v_k(t) + f_k\bigr]e^{-x}\sin kx. \tag{89}$$

Приравнивая в разложении (89) коэффициенты при одинаковых собственных функциях, с учетом начальных условий приходим к семейству задач Коши

$$\begin{cases} v_3''(t) - 7v_3'(t) + 10v_3(t) = 1, \\ v_3(0) = 0, \quad v_3'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_k''(t) - 7v_k'(t) + (k^2+1)v_k(t) = 0, \\ v_k(0) = 0, \quad v_k'(0) = 0, \quad k \neq 3. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши для функции $v_3(t)$. Корнями характеристического уравнения $\mu^2 - 7\mu + 10 = 0$ являются числа $\mu_1 = 2,\ \ \mu_2 = 5$. Следовательно, фундаментальную систему решений составляют функции e^{2t}, e^{5t}, и общее решение принимает вид

$$v_3(t) = A_3e^{2t} + B_3e^{5t} + \frac{1}{10}.$$

Подставляя в начальные условия, получим систему

$$\begin{cases} A_3 + B_3 + \dfrac{1}{10} = 0, \\ 2A_3 + 5B_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $A_3 = -\dfrac{1}{6},\ \ B_3 = \dfrac{1}{15},\ \ v_3(t) = -\dfrac{1}{6}\,e^{2t} + \dfrac{1}{15}\,e^{5t} + \dfrac{1}{10}.$

При $k \neq 3$ соответствующие задачи Коши имеют только тривиальное решение. Таким образом, решением задачи (86) является функция

$$v(x,t) = \left(\frac{1}{15}\,e^{5t} - \frac{1}{6}\,e^{2t} + \frac{1}{10}\right)e^{-x}\sin 3x.$$

Окончательно запишем ответ

$$u(x,t) = xt + \left(\frac{1}{15}\,e^{5t} - \frac{1}{6}\,e^{2t} + \frac{1}{10}\right)e^{-x}\sin 3x. \blacktriangleleft$$

1.2.6. Существование и единственность решения

Сформулируем теоремы существования и единственности решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны.

Теорема 2 (достаточный признак существования классического решения смешанной задачи по методу Фурье). *Если* $\varphi(x) \in C^2[0,l]$, *имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям сопряжения*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$

а функция $\psi(x) \in C^1[0,l]$, *имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям*

$$\psi(0) = \psi(l) = 0,$$

то сумма ряда (27) непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно. При этом возможно двойное почленное дифференцирование ряда (27) по x *и* t, *а полученные при этом ряды сходятся абсолютно и равномерно в области* $\Omega = \{(x,t) : 0 \leqslant \ \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$.

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме 2, то ряд (27) может не допускать почленного дифференцирования. Однако если функция $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, а $\psi(x) \in C[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то ряд (27) равномерно сходится в области Ω и определяет непрерывную функцию $u(x,t)$.

Будем называть ***обобщенным решением*** задачи (13)–(15) функцию $u(x,t)$, являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности $u_n(x,t)$ решений уравнения (13), удовлетворяющих граничным условиям (14) и начальным условиям

$$u_n|_{t=0} = \varphi_n(x), \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_n(x),$$

где функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ близки к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно в интегральном смысле:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^l \big[\varphi(x) - \varphi_n(x)\big]^2 dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^l \big[\psi(x) - \psi_n(x)\big]^2 dx = 0.$$

Существование обобщенного решения вытекает из того, что частичные суммы ряда (27)

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin\frac{k\pi a t}{l} \right) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

образуют последовательность, удовлетворяющую требуемым условиям, и следовательно, ряд (27) является обобщенным решением. Заметим, что обобщенное решение задачи (13)–(15) единственно.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$ рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебаний струны в общей постановке

$$\begin{cases} \rho(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{90}$$

Теорема 3 (о единственности решения смешанной задачи). *Если в области Ω решение $u(x,t)$ смешанной задачи (90) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то это решение единственно.*

1.2.7. Колебания прямоугольной мембраны

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны, закрепленной по контуру:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \tag{91}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b}, \quad t \geqslant 0, \tag{92}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y), \ 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{93}$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения (91), удовлетворяющие граничным условиям (92), в виде произведения

$$u(x,y,t) = V(x,y)T(t). \tag{94}$$

Подставляя (94) в (91) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{V} = -\lambda^2.$$

Далее, подставим (94) в граничные условия (92):

$$V(0,y)T(t) = V(a,y)T(t) = V(x,0)T(t) = V(x,b)T(t) = 0.$$

Отсюда вытекают граничные условия для $V(x, y)$:

$$V(0, y) = V(a, y) = V(x, 0) = V(x, b) = 0.$$

Присоединяя эти условия к дифференциальному уравнению для функции $V(x, y)$, получим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \lambda^2 V = 0, \tag{95}$$

$$V(0, y) = V(a, y) = V(x, 0) = V(x, b) = 0. \tag{96}$$

Таким образом, сама задача на собственные значения (95), (96) состоит в решении однородного уравнения в частных производных с однородными граничными условиями. Функцию $V(x, y)$ опять будем искать в виде разделяющихся переменных, полагая

$$V(x, y) = X(x)Y(y). \tag{97}$$

Подставляя в (95), получим

$$-\frac{X'' + \lambda^2 X}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\mu^2.$$

Подставим теперь (97) в граничные условия (96):

$$X(0)Y(y) = X(a)Y(y) = 0, \quad X(x)Y(0) = X(x)Y(b) = 0.$$

Отсюда, в силу того, что ищутся нетривиальные решения, имеем

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0.$$

Добавляя вторую пару граничных условий к уравнению для функции $Y(y)$, приходим к одномерной задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} Y'' + \mu^2 Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases} \tag{98}$$

С решением простейших задач, аналогичных (98), мы встречались при изучении колебаний струны. Собственные значения и собственные функции задачи (98) запишем в виде

$$\mu_k = \frac{k\pi}{b}, \quad Y_k(y) = \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Перейдем теперь к уравнению для функции $X(x)$. Присоединяя к нему первую пару граничных условий $X(0) = X(a) = 0$, получим задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X(0) = X(a) = 0, \end{cases} \tag{99}$$

где $\nu^2 = \lambda^2 - \mu_k^2$. Решения задачи (99) при $\lambda^2 - \mu_k^2 > 0$ имеют вид

$$\nu_n = \frac{n\pi}{a}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, собственным значениям

$$\lambda_{nk} = \sqrt{\nu_n^2 + \mu_k^2} = \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}\,\pi$$

краевой задачи (95), (96) соответствуют собственные функции

$$V_{nk}(x, y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}, \quad n, k = 1, 2, \ldots$$

Эти функции образуют ортогональную систему собственных функций прямоугольной мембраны, причем

$$\left\|V_{nk}\right\|^2 = \int\limits_0^a\int\limits_0^b V_{nk}^2(x, y)\,dxdy = \int\limits_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}\,dx\int\limits_0^b \sin^2\frac{k\pi y}{b}\,dy = \frac{ab}{4}.$$

Рассмотрим уравнение для функции $T(t)$ при $\lambda = \lambda_{nk}$:

$$T_{nk}''(t) + \lambda_{nk}^2 T_{nk}(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$T_{nk}(t) = A_{nk}\cos\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}\,\pi t + B_{nk}\sin\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}\,\pi t.$$

Составим ряд из произведений функций $V_{nk}(x, y)$ и $T_{nk}(t)$:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(A_{nk}\cos\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}\,\pi t + \\ + B_{nk}\sin\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}\,\pi t\Bigg)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}. \tag{100}$$

Подставляя этот ряд в начальные условия, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}=\varphi(x,y),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} B_{nk}\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}\,\pi\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}=\psi(x,y).$$

Согласно общей теории разложения функций в ряд Фурье по ортогональной системе, коэффициенты A_{nk} и B_{nk} имеют вид

$$\begin{aligned} A_{nk}&=\frac{4}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,dxdy,\\ B_{nk}&=\frac{4}{ab\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}}\,\pi}\int\limits_0^a\int\limits_0^b \psi(x,y)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\,dxdy. \end{aligned}\tag{101}$$

Таким образом, решение смешанной задачи (91)–(93) дается формулой (100), в которой коэффициенты A_{nk} и B_{nk} вычисляются согласно (101).

1.3. Уравнения параболического типа

1.3.1. Вывод уравнения теплопроводности

В трехмерном пространстве рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Если температура тела распределена неравномерно, то в нем будет происходить перераспределение тепла от более нагретых участков к менее нагретым. В дальнейшем нам понадобится следующая эмпирическая формула (закон Фурье). Количество тепла Q, протекающего через площадку ΔS за промежуток времени Δt, равно

$$Q = -k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\Delta S \Delta t, \tag{1}$$

где $k(x, y, z) > 0$ — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала тела, $\vec{n}$ — нормаль к площадке ΔS, направленная в сторону убывания температуры. Предполагается, что тело изотропно, т. е. коэффициент теплопроводности зависит только от точки (x, y, z) и не зависит от направления нормали к ΔS в этой точке.

Для вывода уравнения теплопроводности используем метод баланса. Выделим внутри тела произвольный объем V, ограниченный замкнутой поверхностью Ω, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени $[t_1, t_2]$. Согласно формуле (1), через поверхность Ω из объема V в окружающее пространство переместится количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{\Omega} k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dS, \tag{2}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Ω. Пусть внутри тела имеются источники тепла $F(x, y, z, t)$. Тогда количество тепла, выделяемого в объеме V за промежуток времени $[t_1, t_2]$, будет равно

$$Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{V} F(x, y, z, t)dV. \tag{3}$$

Обозначим через $\rho(x, y, z)$ и $c(x, y, z)$ плотность и удельную теплоемкость тела соответственно. Количество тепла, необходимое для изменения температуры объема V за промежуток $[t_1, t_2]$, равно

$$Q_3 = \iiint\limits_{V} c\rho\big[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)\big]dV$$

или представим в эквивалентном виде

$$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V c\rho \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dV. \tag{4}$$

Запишем уравнение баланса тепла для выделенного объема V

$$Q_2 = Q_1 + Q_3$$

или с учетом соотношений (2)–(4)

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V c\rho \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dV = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{\Omega} k(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dS + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t) dV.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\operatorname{grad} u) \cdot \vec{n}$, и применяя ко второму интегралу формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V c\rho \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dV = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \big[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(x,y,z,t)\big] dV,$$

где $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(k \, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(k \, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right).$

Поскольку подынтегральная функция непрерывна, а объем V и промежуток времени произвольны, приходим к соотношению

$$c\rho \, \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\big[k(x,y,z) \operatorname{grad} u\big] + F(x,y,z,t). \tag{5}$$

Уравнение (5) называется ***уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела***.

1.3.2. Постановки задач для уравнений параболического типа

В предыдущем пункте было получено уравнение теплопроводности неоднородного изотропного тела. В случае, когда тело однородно, т. е. коэффициенты c, ρ, k — константы, не зависящие от x, y, z, то уравнение (5) упрощается и записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t), \tag{6}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $f(x,y,z,t) = \dfrac{F(x,y,z,t)}{c\rho}$, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Если в плоскостях, параллельных плоскости xOy, распределение температуры одинаково, т. е. $u = u(x,y,t)$, то уравнение (6) принимает вид ***уравнения теплопроводности тонкой пластины***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t). \tag{7}$$

Если температура тела зависит только от одной пространственной переменной, то имеем ***уравнение теплопроводности тонкого стержня***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{8}$$

Заметим, что уравнения (5)–(8) описывают также процессы диффузии, где функция $u(x,y,z,t)$ имеет смысл концентрации вещества в точке (x,y,z) в момент времени t, а $F(x,y,z,t)$ характеризует плотность источников диффузии.

Как и в случае уравнений гиперболического типа, для параболических уравнений ставятся смешанная задача или задача Коши. Например, смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности тонкого стержня может иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Здесь мы имеем дело с граничными условиями первого рода (условиями Дирихле), когда на концах стержня задана температура. Помимо условий Дирихле задаются также граничные условия второго рода (условия Неймана) и третьего рода:

$$-k\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \mu_3(t), \qquad k\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \mu_4(t),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\bigg|_{x=0} = \mu_5(t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\bigg|_{x=l} = \mu_6(t).$$

Физический смысл граничных условий второго и третьего рода: на концах стержня задан тепловой поток; на концах стержня происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой.

1.3.3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big), \quad P \in G, \quad t > 0, \\ u(P,t)\big|_{\Gamma} = \mu(P,t), \quad t \geqslant 0, \\ u(P,t)\big|_{t=0} = \varphi(P), \quad P \in \overline{G}, \end{cases} \tag{9}$$

где $\overline{G}$ — конечная область трехмерного пространства (x, y, z), ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

Теорема 1 (принцип максимума). *Пусть функции $\mu(P,t)$ и $\varphi(P)$ непрерывны и согласованы, т. е. $\mu(P,0) = \varphi(P)$, $P \in \Gamma$. Тогда решение смешанной задачи (9) достигает своего максимального (минимального) значения либо на границе Γ, либо в начальный момент времени $t = 0$.*

Следствие 1. *Решение смешанной задачи (9) единственно.*

Следствие 2. *Решение смешанной задачи (9) непрерывно зависит от входных данных, т. е. устойчиво относительно граничного и начального условий.*

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности стержня

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Теорема 2 (о единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности). *Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция. Тогда если функция $u(x,t)$ ограничена во всей области, т. е. существует такое число M, что $\big|u(x,t)\big| < M$, $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, то решение задачи Коши (10) единственно.*

1.3.4. Метод разделения переменных для однородного уравнения теплопроводности

Сформулируем задачу об отыскании нестационарного температурного поля $u(x,t)$ в плоском слое конечной толщины l, имеющем в начальный момент времени температуру $\varphi(x)$, если на поверхностях $x = 0$ и $x = l$ этого слоя происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей нулевую температуру. Требуется найти решение линейного однородного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{11}$$

удовлетворяющее при $t = 0$ начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{12}$$

и однородным граничным условиям третьего рода

$$\begin{cases} \left(-\alpha_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ \left(\alpha_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{13}$$

Следуя методу Фурье, нетривиальные решения уравнения (11), удовлетворяющие граничным условиям (13), будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{14}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (14) в уравнение (11) и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где $(-\lambda^2) = \mathrm{const}$ — параметр разделения. Отсюда вытекает, что функции $T(t)$ и $X(x)$ должны быть определены как решения обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \tag{15}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{16}$$

Соотношения (13) с учетом представления (14) приводят к условиям для координатной функции $X(x)$:

$$\begin{cases} -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Дифференциальное уравнение (16) и граничные условия (17) образуют задачу Штурма — Лиувилля, которая имеет нетривиальные решения только при определенных (собственных) значениях $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$ Их можно выразить через неотрицательные корни μ_k трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\alpha_1\alpha_2\mu^2 - \beta_1\beta_2 l^2}{(\alpha_1\beta_2 l + \alpha_2\beta_1 l)\mu}.$$

Соответствующие им собственные функции $X_k(x)$ имеют вид

$$X_k(x) = \sin(\lambda_k x + \theta_k), \quad \theta_k = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_1\lambda_k}{\beta_1}.$$

При $\lambda = \lambda_k$ запишем общее решение уравнения (15):

$$T_k(t) = C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t}, \quad C_k = \mathrm{const}.$$

Перемножая функции $X_k(x)$ и $T_k(t)$, получим частные решения уравнения (11), удовлетворяющие граничным условиям (13):

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t}\sin(\lambda_k kx + \theta_k).$$

Составим формально ряд, членами которого являются найденные функции $u_k(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t}\sin(\lambda_k x + \theta_k). \tag{18}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (13), поскольку им удовлетворяет каждый член ряда (18). Определим коэффициенты C_k так, чтобы выполнялось начальное условие. Подставляя ряд (18) в (12), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(\lambda_k x + \theta_k) = \varphi(x).$$

Согласно теореме Стеклова, это соотношение представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе ортогональных на отрезке $[0,l]$ функций $X_k(x) = \sin(\lambda_k x + \theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, а числа C_k являются соответствующими коэффициентами Фурье и определяются по формулам

$$C_k = \frac{1}{\|X_k\|^2}\int_0^l \varphi(x)X_k(x)\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

I. Для значений параметров $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ граничные условия принимают вид

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \tag{19}$$

Смешанная задача (11), (12), (19), или ***первая краевая задача***, описывает процесс остывания плоского слоя конечной толщины l (или тонкого стержня конечной длины l с идеально теплоизолированной боковой поверхностью) с температурным профилем $\varphi(x)$ в начальный момент времени, если граничные плоскости $x = 0$ и $x = l$ (торцы стержня) поддерживаются при постоянной нулевой температуре. В этом случае собственные значения задачи Штурма — Лиувилля $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$, а соответствующие собственные функции $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$.

Решение первой краевой задачи записывается в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad C_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

II. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, а $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то граничные условия (13) принимают вид однородных условий второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{20}$$

Смешанная задача (11), (12), (20), или ***вторая краевая задача***, описывает процесс выравнивания температуры в плоском слое (тонком стержне), в котором в начальный момент времени задан температурный профиль $\varphi(x)$, а граничные плоскости $x = 0$ и $x = l$ (торцы стержня) теплоизолированы. Для данного случая

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \|X_k\|^2 = \begin{cases} l, & k = 0, \\ \dfrac{l}{2}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи имеет вид $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\cos\frac{k\pi x}{l}$, где

$$C_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\,dx, \quad C_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Отметим, что при $t \to \infty$ температура всех слоев выравнивается и стремится к стационарному распределению $u_s(x) = C_0 = \mathrm{const}$.

III. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_2 = h > 0$. В этом случае получим граничные условия

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = 0. \tag{21}$$

Смешанная задача (11), (12), (21) описывает эволюцию температурного поля в плоском слое $0 \leqslant x \leqslant l$ материала, начальное распределение температуры в котором задано функцией $\varphi(x)$, если на поверхности $x = 0$ слоя поддерживается постоянная нулевая температура, а на другой поверхности $x = l$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей нулевую температуру.

Находим собственные функции задачи Штурма — Лиувилля:

$$X_k(x) = \sin\frac{\mu_k x}{l}, \quad \|X_k\|^2 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{hl}{\mu_k^2 + h^2 l^2}\right).$$

Числа μ_k являются корнями трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\dfrac{\mu}{hl}$. Это уравнение имеет бесчисленное множество действительных положительных корней, в чем нетрудно убедиться, построив графики кривых $y = \operatorname{tg}\mu$ и $y = -\dfrac{\mu}{p}$, где $p = hl$.

Решение смешанной задачи (11), (12), (21) можно записать в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\mu_k x}{l}, \quad C_k = \frac{2(\mu_k^2 + p^2)}{l\left[\mu_k^2 + p(p+1)\right]} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\frac{\mu_k x}{l}\, dx.$$

Пример 1. Имеется однородный тонкий стержень длиной l, изолированный от окружающего пространства, с начальной температурой $u(x,0) = \dfrac{hx(l-x)}{l^2}$. Определить температуру $u(x,t)$ точек стержня при $t > 0$, если концы стержня поддерживаются при нулевой температуре.

Решение. Необходимо решить смешанную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{hx(l-x)}{l^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решим эту задачу методом разделения переменных, полагая $u(x,t) = X(x)T(t)$. Поскольку $u'_t = X(x)T'(t)$, $u''_{xx} = X''(x)T(t)$, то, подставляя выражения для производных и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Учитывая соотношения $X(0) = X(l) = 0$, вытекающие из граничных условий, приходим к задаче Штурма — Лиувилля для координатной функции

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Решениями этой задачи являются собственные значения $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ и собственные функции $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$

При $\lambda = \lambda_k$ уравнение для временно́й функции $T_k' + \left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k = 0$ имеет общее решение

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

В соответствии с методом Фурье решение смешанной задачи запишем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Определим коэффициенты A_k так, чтобы сумма ряда удовлетворяла начальному условию:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{hx(l-x)}{l^2}.$$

Отсюда следует, что

$$A_k = \frac{2h}{l^3}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{8h}{\pi^3(2n+1)^3}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Подставляя значения коэффициентов в ряд, приходим к ответу

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\, e^{-\left[\frac{(2n+1)\pi a}{l}\right]^2 t} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Описать процесс изменения концентрации вещества в растворе, заключенном между плоскостями $x = 0$ и $x = l$, если на левом конце поддерживается нулевая концентрация, а плоскость $x = l$ непроницаема для вещества. Начальная концентрация вещества определяется функцией $u|_{t=0} = x + \sin\dfrac{\pi x}{2l}$.

Решение. Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = x + \sin \dfrac{\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Следуя методу Фурье, будем искать решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. После подстановки в уравнение и разделения переменных, получим задачу Штурма — Лиувилля относительно функции $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим собственные значения и собственные функции

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Для функции $T(t)$ получим уравнение

$$T_k'(t) + \left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 T_k(t) = 0,$$

из которого находим общее решение

$$T_k(t) = A_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}.$$

Решение исходной смешанной задачи следует искать в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Подставляя ряд в начальное условие, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = x + \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства представляет собой тригонометрический многочлен по ортогональной системе собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, а именно, $\sin \dfrac{\pi x}{2l} = X_0(x)$. Поэтому необходимо найти разложение только для первого слагаемого и воспользоваться тем фактом, что коэффициенты Фурье суммы функций суть сумма соответствующих коэффициентов каждого слагаемого. Имеем

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad B_k = \frac{2}{l}\int_0^l x \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\, dx = \frac{8l(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Следовательно, $A_k = B_k + \delta_{0k}$, $\delta_{0k} = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$

Таким образом, решение задачи принимает вид

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{8l(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} + \delta_{0k}\right] e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

или

$$u(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi x}{2l} + \frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right]^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Дан однородный шар радиусом b, центр которого расположен в начале координат. Внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура $u|_{t=0} = b^2 - r^2$. Определить температуру $u(r,t)$ внутри шара при $t > 0$.

Решение. Необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < b, \quad t > 0, \\ \left|u|_{r=0}\right| < \infty, \quad u|_{r=b} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = b^2 - r^2, \quad 0 \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Следуя схеме метода Фурье, положим $u(r,t) = R(r)T(t)$ и после подстановки в уравнение получим

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \dfrac{2}{r}R'}{R} = -\lambda^2.$$

Из граничных условий имеем $\left|R(0)T(t)\right| < \infty$, $R(b)T(t) = 0$, откуда вытекают граничные условия для радиальной функции: $\left|R(0)\right| < \infty$, $R(b) = 0$. Следовательно, приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{2}{r}R' + \lambda^2 R = 0, \\ |R(0)| < \infty, \quad R(b) = 0. \end{cases}$$

Введем функцию $v(r)$ по формуле $R(r) = \dfrac{v(r)}{r}$. Тогда

$$R'(r) = -\frac{v}{r^2} + \frac{v'}{r}, \quad R'' = \frac{2v}{r^3} - \frac{2v'}{r^2} + \frac{v''}{r}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение и учитывая граничные условия, приходим к задаче Штурма — Лиувилля для $v(r)$:

$$\begin{cases} v'' + \lambda^2 v = 0, \\ v(0) = 0, \quad v(b) = 0. \end{cases}$$

Эта задача имеет решения

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{b}, \quad v_k(r) = \sin\frac{k\pi r}{b} \quad \Rightarrow \quad R_k(r) = \frac{\sin\dfrac{k\pi r}{b}}{r}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что функции $R_k(r)$ образуют ортогональную с весом r^2 на отрезке $[0, b]$ систему функций, причем

$$\|R_k(r)\|^2 = \int\limits_0^b r^2 \frac{\sin^2\dfrac{k\pi r}{b}}{r^2}\,dr = \int\limits_0^b \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2k\pi r}{b}\right)dr = \frac{b}{2}.$$

Решая уравнение $T_k'(t) + a^2\left(\dfrac{k\pi}{b}\right)^2 T_k(t) = 0$, находим

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 t}.$$

Запишем ряд с неопределенными коэффициентами

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 t}\, \frac{\sin\dfrac{k\pi r}{b}}{r}.$$

В силу начального условия будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\sin\dfrac{k\pi r}{b}}{r} = b^2 - r^2 \ \Rightarrow\ A_k = \frac{2}{b}\int\limits_0^b (rb^2 - r^3)\sin\frac{k\pi r}{b}\,dr =$$

$$= \frac{2}{b}\left(\frac{b}{k\pi}\right)^2 \int\limits_0^b 6r\sin\frac{k\pi r}{b}\,dr = -12\left(\frac{b}{k\pi}\right)^3 \cos k\pi = \frac{12b^3(-1)^{k+1}}{(k\pi)^3}.$$

Окончательно приходим к ответу

$$u(r,t) = \frac{12b^3}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \, e^{-\left(\frac{k\pi a}{b}\right)^2 t} \, \frac{\sin \dfrac{k\pi r}{b}}{r}. \blacktriangleleft$$

1.3.5. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{22}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

и граничными условиями третьего рода

$$\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Bigg|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{24}$$

Решение этой задачи будем искать в виде ряда Фурье по системе собственных функций $X_n(x) = \sin(\lambda_n x + \theta_n)$ задачи Штурма — Лиувилля (17)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda_n x + \theta_n) \tag{25}$$

(переменная t при этом рассматривается как параметр). Ряд (25) удовлетворяет граничным условиям (24). Поэтому функции $u_n(t)$ следует определить так, чтобы ряд удовлетворял уравнению (22) и начальному условию (23).

Учитывая полноту системы собственных функций $X_n(x)$, представим функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\lambda_n x + \theta_n), \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x + \theta_n), \end{aligned} \tag{26}$$

где $f_n(t)$ и φ_n — коэффициенты Фурье, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int\limits_0^l f(x,t) \sin(\lambda_n x + \theta_n)\, dx, \\ \varphi_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_n x + \theta_n)\, dx. \end{aligned} \tag{27}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (25) и разложение (26) для функции $f(x,t)$ в уравнение (22) и заменяя при этом $X_n''(x)$ на $-\lambda_n^2 X_n(x)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bigl[u_n'(t)+\lambda_n^2 a^2 u_n(t)-f_n(t)\bigr]X_n(x)=0.$$

Это соотношение, а значит, и уравнение (22), будет выполнено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$u_n'(t)+\lambda_n^2 a^2 u_n(t)=f_n(t).$$

Из начального условия (23) с учетом (25), (26) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x),\quad 0<x<l.$$

Отсюда вытекает, что $u_n(0)=\varphi_n$.

Таким образом, для нахождения искомой функции $u_n(t)$ приходим к задаче Коши для обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Решение этой задачи может быть найдено методом Лагранжа вариации произвольной постоянной. Оно имеет вид

$$u_n(t)=\varphi_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}+\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\lambda_n^2 a^2(t-\tau)}d\tau.$$

Подставляя функции $u_n(t)$, $n=1,2,\ldots$, в разложение (25), находим решение исходной задачи (22)–(24) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin(\lambda_n x+\theta_n)+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\lambda_n^2 a^2(t-\tau)}d\tau\right]\sin(\lambda_n x+\theta_n), \quad (28)$$

где φ_n и $f_n(\tau)$ определены формулами (27).

Отметим, что первое слагаемое в выражении (28) есть решение смешанной задачи для однородного уравнения, когда $f(x,t)\equiv 0$.

Пример 4. Найти нестационарное распределение температуры в плоском слое толщиной l, внутри которого при $t\geqslant 0$ действует источник тепла с постоянной плотностью q, а его поверхность поддерживается при нулевой температуре. Начальная температура во внутренних точках слоя равна нулю.

Решение. Будем решать смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{q}{c\rho}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \tag{29}$$

где c — удельная теплоемкость, ρ — плотность массы слоя.

Поскольку заданы граничные условия первого рода, то соответствующая задача Штурма — Лиувилля для однородного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases}$$

а ее собственные функции $X_k(x) = \sin \dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому решение смешанной задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

В свою очередь, разложим правую часть уравнения $\dfrac{q}{\rho c}$ в ряд Фурье по системе собственных функций:

$$\frac{q}{\rho c} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad f_k = \frac{2}{l} \frac{q}{\rho c} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{2q}{\rho c k\pi} \big[1 - (-1)^k\big]. \tag{30}$$

Подставляя теперь предполагаемое решение в уравнение и учитывая представление (30), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2q}{\rho c k\pi} \big[1 - (-1)^k\big] \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты в левой и правой частях этого равенства, приходим к дифференциальному уравнению

$$u_k'(t) + u_k(t) \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = \frac{2q}{\rho c k\pi} \big[1 - (-1)^k\big].$$

Из начального условия имеем $u_k(0) = 0$.

Поскольку правая часть уравнения представляет собой константу, то частное решение следует также искать в виде константы, т. е.

$$u_k^{\text{част}}(t) = a_k, \quad a_k = \text{const}.$$

Подставляя в уравнение, получим соотношение

$$u_k^{\text{част}} \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = \frac{2q}{\rho c k\pi}\left[1 - (-1)^k\right],$$

из которого следует, что

$$u_k^{\text{част}} = \frac{2q}{\rho c k\pi}\left[1 - (-1)^k\right]\left(\frac{l}{k\pi a}\right)^2 = \frac{2ql^2}{\rho c a^2\pi^3}\,\frac{1-(-1)^k}{k^3}.$$

Общее решение имеет вид

$$u_k(t) = \frac{2ql^2}{\rho c a^2\pi^3}\,\frac{1-(-1)^k}{k^3} + C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

Коэффициенты C_k определим из начального условия $u_k(0) = 0$:

$$C_k = \frac{2ql^2}{\rho c a^2\pi^3}\,\frac{(-1)^k - 1}{k^3}.$$

Таким образом, получим

$$u_k(t) = \frac{2ql^2}{\rho c a^2\pi^3}\,\frac{1-(-1)^k}{k^3} + \frac{2ql^2}{\rho c a^2\pi^3}\,\frac{(-1)^k - 1}{k^3}\,e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

Решение смешанной задачи принимает вид

$$u(x,t) = \frac{2ql^2}{\rho c a^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l} + \\ + \frac{2ql^2}{\rho c a^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{k^3}\,e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Решить смешанную задачу (29) методом выделения стационарной части.

Решение. Функция источника не зависит от переменной t, следовательно, эту задачу можно решать методом выделения стационарной части. Сделаем замену $u(x,t) = v(x,t) + W(x)$, где $v(x,t)$ — новая неизвестная функция, а функцию $W(x)$ подберем так, чтобы дифференциальное уравнение относительно $v(x,t)$ стало однородным.

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2W''(x) = \frac{q}{c\rho}.$$

Отсюда следует, что

$$a^2W''(x) = -\frac{q}{c\rho},$$

а из граничных условий имеем $W(0) = W(l) = 0$. Решая эту краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно $W(x)$, находим $W(x) = -\frac{q}{2a^2c\rho}\,x^2 + \frac{ql}{2a^2c\rho}\,x$.

После выполнения указанной замены получим для функции $v(x,t)$ смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v\big|_{t=0} = \dfrac{q}{2a^2c\rho}\,x^2 - \dfrac{ql}{2a^2c\rho}\,x, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

В соответствии с методом Фурье для однородного уравнения ее решение следует искать в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Коэффициенты C_k определим, подставляя ряд в начальное условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k x}{l} = \frac{q}{2a^2c\rho}\,x(x-l).$$

Отсюда находим

$$C_k = \frac{q}{a^2c\rho l}\int_0^l x(x-l)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2ql^2}{a^2c\rho\pi^3}\,\frac{(-1)^k - 1}{k^3}.$$

Учитывая выражения для коэффициентов C_k и явный вид функции $w(x)$, получим окончательный ответ

$$u(x,t) = -\frac{q}{2a^2c\rho}\,x^2 + \frac{ql}{2a^2c\rho}\,x + \frac{2ql^2}{a^2c\rho\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^3}\,e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}. \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Различие в записях решений рассмотренной задачи связано с тем, что в первом случае стационарная часть разложена в ряд по ортогональной системе собственных функций.

1.3.6. Смешанные задачи с неоднородностями в уравнении и граничных условиях

Рассмотрим постановки задач, в которых не только уравнение, но и граничные условия могут содержать неоднородности. Алгоритм решения в этом случае аналогичен рассмотренному для уравнений гиперболического типа.

Необходимо сделать замену $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, переходя к новой неизвестной функции $v(x,t)$ и подбирая функцию $W(x,t)$ так, чтобы она удовлетворяла заданным граничным условиям. После замены мы приходим к смешанной задаче для функции $v(x,t)$ с однородными граничными условиями. При этом начальные условия и правая часть уравнения, вообще говоря, меняются.

Пример 6. Начальная температура стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью равна $U_0 = \text{const}$, а на концах его поддерживается постоянная температура $u|_{x=0} = U_1 = \text{const}$, $u|_{x=l} = U_2 = \text{const}$. Найти температуру $u(x,t)$ стержня при $t > 0$.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = U_1, \quad u|_{x=l} = U_2, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = U_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Сделаем замену $u(x,t) = v(x,t) + U_1 + \dfrac{x}{l}(U_2 - U_1)$. Тогда для функции $v(x,t)$ приходим к смешанной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = U_0 - U_1 - \dfrac{x}{l}\,(U_2 - U_1), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Как и ранее, ее решение будем искать в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя ряд в начальное условие, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{l} = U_0 - U_1 - \frac{x}{l}\,(U_2 - U_1).$$

Отсюда определим коэффициенты C_k:

$$C_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left[U_0 - U_1 - \frac{x}{l}(U_2 - U_1)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2}{k\pi}\Big[U_0 - U_1 - \\ - \frac{x}{l}(U_2 - U_1)\Big]\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = \frac{2}{k\pi}\left[U_1 - U_0 + (U_2 - U_0)(-1)^k\right].$$

Таким образом, решение задачи принимает вид

$$u(x,t) = U_1 + \frac{x}{l}(U_2 - U_1) + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[U_1 - U_0 + (U_2 - U_0)(-1)^k\right]e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Заметим, что при $t \to \infty$ температура стремится к стационарному распределению $u_s(x) = U_1 + \dfrac{x}{l}(U_2 - U_1)$. ◄

Пример 7. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, один конец которого $x = 0$ теплоизолирован, а на другом конце $x = l$ происходит конвективный теплообмен с внешней средой, температура которой равна $U_0 = \text{const}$. Начальная температура стержня равна нулю.

Решение. Необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = hU_0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что постоянная функция $W(x,t) = U_0$ удовлетворяет граничным условиям. Сделаем замену $u(x,t) = v(x,t) + U_0$. В результате получим смешанную задачу относительно функции $v(x,t)$ с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + hv\right)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v\big|_{t=0} = -U_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, будем искать в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя в уравнение и разделяя переменные, приходим к соотношениям

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Из граничных условий находим

$$X'(0)T(t) = 0, \quad \big[X'(l) + hX(l)\big]T(t) = 0,$$

откуда в силу того, что $v(x,t) \not\equiv 0$, следуют равенства $X'(0) = 0$, $X'(l) + hX(l) = 0$. Таким образом, для заданной смешанной задачи получим соответствующую задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из граничного условия на левом конце отрезка следует, что $C_2 = 0$, $X(x) = C_1 \cos \lambda x$, $X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x$. Возьмем $C_1 = 1$ и подставим выражения для $X(x)$ и $X'(x)$ в правое граничное условие:

$$-\lambda \sin \lambda l + h \cos \lambda l = 0.$$

Полагая $\mu = \lambda l$, получим $\operatorname{tg} \mu = \dfrac{hl}{\mu}$. Через μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим положительные корни этого уравнения. Тогда собственные значения задачи Штурма — Лиувилля будут равны $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{l}$, а собственные функции $X_k(x) = \cos \dfrac{\mu_k x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение дифференциального уравнения

$$T_k'(t) + \left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0$$

имеет вид $T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}$.

Решение смешанной задачи будем искать в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\mu_k x}{l}.$$

Подставляя ряд в начальное условие, получим разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos\frac{\mu_k x}{l} = -U_0.$$

Согласно общей теории, собственные функции $X_k(x) = \cos\dfrac{\mu_k x}{l}$ ортогональны с весом $\rho(x) = 1$ на отрезке $[0, l]$. Следовательно,

$$C_k = -\frac{U_0}{\|X_k\|^2}\int\limits_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l}\,dx.$$

Найдем квадрат нормы собственной функции $X_k(x)$. Имеем

$$\|X_k\|^2 = \int\limits_0^l X_k^2(x)dx = \int\limits_0^l \cos^2\frac{\mu_k x}{l}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^l \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\mu_k x}{l}\right)dx = \frac{l}{2} + \frac{l}{4\mu_k}\sin 2\mu_k =$$

$$= \frac{l}{2} + \frac{l}{2\mu_k}\,\frac{\operatorname{tg}\mu_k}{1+\operatorname{tg}^2\mu_k} = \frac{l(\mu_k^2 + h^2l^2 + hl)}{2(\mu_k^2 + h^2l^2)}.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l}\,dx = \frac{l}{\mu_k}\sin\mu_k = \frac{l}{\mu_k}\,\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\mu_k}} = \frac{hl^2(-1)^{k-1}}{\mu_k\sqrt{\mu_k^2 + h^2l^2}}.$$

Подставляя полученные выражения в коэффициенты Фурье C_k, окончательно приходим к решению смешанной задачи

$$u(x,t) = U_0 + 2U_0 hl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{\mu_k^2 + h^2 l^2}}{\mu_k(\mu_k^2 + h^2 l^2 + hl)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} \cos\frac{\mu_k x}{l},$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{hl}{\mu}$. ◀

1.3.7. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности стержня

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{31}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{32}$$

Предполагается, что решение $u(x,t)$ ограничено во всей области:

$$\big|u(x,t)\big| \leqslant M, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

Будем искать частное решение уравнения (31) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Подставляя его в (31) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \tag{33}$$

где $(-\lambda^2)$ — числовой параметр. Решая уравнения (33), находим

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}, \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x,$$

где постоянные A и B, вообще говоря, зависят от λ. Поскольку граничные условия отсутствуют, параметр λ остается произвольным. В результате получим частное решение уравнения (31)

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big]. \tag{34}$$

Интегрируя равенство (34) по параметру, получим

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big]d\lambda. \tag{35}$$

Если этот интеграл сходится и его можно дифференцировать один раз по t и два раза по x, то функция $u(x,t)$ является решением уравнения (31).

Выберем функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы выполнялось начальное условие (32). Подставляя (35) в (32), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\big]d\lambda = \varphi(x). \tag{36}$$

Сравнивая интеграл в левой части (36) с интегралом Фурье, видим, что равенство (36) выполняется, если положить

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi, \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (35) и изменяя порядок интегрирования, имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda. \tag{38}$$

Вычислим внутренний интеграл в равенстве (38). Выполним замену переменных

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \mu = \frac{\lambda(\xi - x)}{z} = \frac{\xi - x}{a\sqrt{t}}, \quad d\lambda = \frac{\mu}{\xi - x}\,dz = \frac{dz}{a\sqrt{t}}.$$

В результате будем иметь

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-z^2}\cos\mu z\, dz = \frac{1}{a\sqrt{t}}\, I(\mu). \tag{39}$$

Дифференцируя интеграл $I(\mu)$ по параметру μ, получим

$$I'(\mu) = -\int\limits_{0}^{\infty} e^{-z^2} z\sin\mu z\, dz,$$

причем дифференцирование корректно в силу равномерной сходимости интеграла. Далее, интегрируя по частям, находим

$$I'(\mu) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \sin\mu z\, d\big(e^{-z^2}\big) = -\frac{\mu}{2}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\cos\mu z\, dz = -\frac{\mu}{2}\, I(\mu).$$

Следовательно, функция $I(\mu)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$I'(\mu) + \frac{\mu}{2}\, I(\mu) = 0,$$

интегрируя которое, получим $I(\mu) = Ce^{-\frac{\mu^2}{4}}$.

Чтобы найти постоянную C, положим $\mu = 0$: $C = \int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Поэтому $I(\mu) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{\mu^2}{4}}$. Возвращаясь к равенству (39), получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

Подставляя найденное выражение в (38), окончательно находим формальное решение задачи (31), (32):

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi. \tag{40}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (о существовании решения задачи Коши для уравнения теплопроводности). *Пусть $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная ограниченная функция на действительной оси:*

$$\big|\varphi(x)\big| \leqslant M_1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Тогда решение задачи Коши (31), (32) дается формулой (40).

Функция $\Phi(x,\xi,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$ называется ***фундаментальным решением уравнения теплопроводности***. Это решение дает распределение температуры, вызванное действием мгновенного точечного источника тепла, помещенного в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x = \xi$.

1.4. Применение специальных функций и ортогональных систем многочленов к решению задач математической физики

1.4.1. Особый случай постановки задачи Штурма — Лиувилля

В приложениях часто приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями второго порядка для ***специальных функций*** — цилиндрических и сферических функций. Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\,\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda p(x)y = 0, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

где коэффициент $k(x)$ обращается в нуль, по крайней мере, на одном из концов интервала $(0, l)$. При таком предположении общее решение уравнения (1) при любом значении параметра λ оказывается неограниченным.

Теорема 1 (о существовании неограниченного решения). *Пусть функции $k'(x)$, $q(x)$, $p(x) \in C[0, l]$, причем $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$. Предполагается, что $k(x) = x\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, $\varphi(x) > 0$. Тогда, если $y_1(x)$ — ограниченное при $x \to 0$ решение уравнения (1), то любое другое линейно независимое решение $y_2(x)$ этого уравнения неограничено при $x \to 0$.*

Сформулируем задачу Штурма — Лиувилля в особой постановке. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

где A и B — произвольные постоянные, $y_1(x)$ — ограниченное решение, а в соответствии с теоремой 1 $y_2(x)$ — неограниченное при $x \to 0$ решение.

Поскольку на практике, как правило, изучаются ограниченные решения, то естественным граничным условием будет требование $\bigl|y(0)\bigr| < \infty$, из которого следует, что $B = 0$, т. е. $y(x) = Ay_1(x)$. На правом конце отрезка $[0, l]$ можно поставить любое граничное условие, например, $y(l) = 0$. Таким образом, приходим к особому случаю постановки задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k(x)\,\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda p(x)y = 0, \quad 0 < x < l, \quad k(0) = 0, \\ \bigl|y(0)\bigr| < \infty, \quad y(l) = 0. \end{cases}$$

Если $k(0) = k(l) = 0$, то на обоих концах отрезка $[0, l]$ ставится условие ограниченности решения:

$$\left|y(0)\right| < \infty, \quad \left|y(l)\right| < \infty.$$

1.4.2. Цилиндрические функции Бесселя и их свойства

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{2}$$

называется ***уравнением Бесселя порядка*** p. Здесь p — произвольное действительное или комплексное число, $\operatorname{Re} p \geqslant 0$.

Решение уравнения (2) можно найти в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+m}, \quad a_0 \neq 0. \tag{3}$$

Одно из частных решений уравнения Бесселя получим при $m = p$:

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \tag{4}$$

Ряд (4) называется ***цилиндрической функцией Бесселя первого рода порядка*** p.

Если $m = -p$, находим второе частное решение уравнения Бесселя — ***цилиндрическую функцию Бесселя второго рода порядка*** p:

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \tag{5}$$

Если $p \neq n$, $n = 0, 1, \ldots$, то функции $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ линейно независимы, поскольку их разложения в ряды начинаются с разных степеней x, т. е. их линейная комбинация $\lambda_1 J_p(x) + \lambda_2 J_{-p}(x)$ может тождественно равняться нулю лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Поэтому для нецелых значений p общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x).$$

Если же $p = n$, $n = 0, 1, \ldots$, то в этом случае можно установить линейную зависимость функций $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Таким образом, при целых значениях p с помощью функций $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ нельзя получить общее решение уравнения (2). Поэтому при целых значениях p вместо $J_{-p}(x)$ необходимо выбрать другое, линейно независимое от $J_p(x),$ частное решение. Для этого введем новую функцию

$$N_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}, \tag{6}$$

которая называется ***цилиндрической функцией Вебера — Неймана порядка*** p. Очевидно, она является решением уравнения (2), поскольку представляет собой линейную комбинацию функций $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$. При $p = n$ правая часть равенства (6) принимает неопределенный вид $\dfrac{0}{0}$. Раскроем эту неопределенность по правилу Лопиталя:

$$N_n(x) = \lim_{p\to n} N_p(x) = \lim_{p\to n} \frac{\cos p\pi \dfrac{dJ_p(x)}{dp} - \dfrac{dJ_{-p}(x)}{dp}}{\pi\cos p\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{dJ_p(x)}{dp}\bigg|_{p=n} - \frac{1}{\pi}\,(-1)^n\,\frac{dJ_{-p}(x)}{dp}\bigg|_{p=n}.$$

Вычисляя производные $\dfrac{dJ_p(x)}{dp}$ и $\dfrac{dJ_{-p}(x)}{dp}$ с помощью рядов (4) и (5), приходим к представлению функции $N_n(x)$ при целом положительном n:

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}\,J_n(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}.$$

Функции $J_p(x)$ и $N_p(x)$ линейно независимы при любых значениях p как целых, так и нецелых, следовательно, общее решение уравнения (2) можно записать в виде $y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 N_p(x)$.

Цилиндрические функции Бесселя различных порядков связаны между собой рекуррентными соотношениями:

$$J_{p+1}(x) + J_{p-1}(x) = \frac{2p}{x}\,J_p(x), \tag{7}$$

$$J_p'(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x}\,J_p(x), \tag{8}$$

$$J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x}\,J_p(x). \tag{9}$$

Отметим важные частные случаи. При $p = 0$ из (8) следует, что

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{10}$$

Далее, перепишем формулу (9) в виде

$$xJ_p'(x) + pJ_p(x) = xJ_{p-1}(x)$$

или после умножения на x^{p-1}

$$x^p J_p'(x) + px^{p-1} J_p(x) = x^p J_{p-1}(x).$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d}{dx}\big[x^p J_p(x)\big] = x^p J_{p-1}(x).$$

Интегрируя последнее соотношение, получим

$$x^p J_p(x) = \int\limits_0^x t^p J_{p-1}(t)\,dt.$$

При $p = 1$ это равенство преобразуется к виду

$$xJ_1(x) = \int\limits_0^x tJ_0(t)\,dt. \tag{11}$$

Замечание 1. Формулы (10) и (11), связывающие функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$, используются при решении смешанных задач для уравнений математической физики в цилиндрических координатах. В частности, формула (11) может быть эффективно использована при вычислении интегралов, возникающих в приложениях.

Пример 1. Вычислить интеграл вида $\int\limits_0^x t^3 J_0(t)\,dt.$

Из дифференциального уравнения (2) при $p = 0$ следует тождество

$$J_0(t) = -J_0''(t) - \frac{1}{t}\,J_0'(t),$$

поэтому применимо интегрирование по частям. Имеем

$$\int\limits_0^x t^3 J_0(t)\,dt = -\int\limits_0^x t^3 J_0''(t)\,dt - \int\limits_0^x t^2 J_0'(t)\,dt = -x^3 J_0'(x) + \\ + 2\int\limits_0^x t^2 J_0'(t)\,dt = -x^3 J_0'(x) + 2x^2 J_0(x) - 4\int\limits_0^x tJ_0(t)\,dt = \\ = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\int\limits_0^x t^3 J_0(t)\,dt = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x). \qquad (12)$$

Свойства цилиндрических функций Бесселя.

1. Функции Бесселя $J_p(\lambda x)$ обладают свойством ортогональности с весом $\rho(x) = x$ на отрезке $[0, l]$, а именно, для любого $p > -1$ выполняется равенство

$$\int\limits_0^l xJ_p\left(\frac{\alpha}{l}x\right)J_p\left(\frac{\beta}{l}x\right)dx = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

где α и β — корни одного из уравнений

$$J_p(\mu) = 0, \quad J_p'(\mu) = 0, \quad \mu J_p'(\mu) + hJ_p(\mu) = 0.$$

Заметим, что эти уравнения возникают при решении краевых задач с граничными условиями первого, второго и третьего рода соответственно.

2. Квадрат нормы цилиндрической функции Бесселя равен

$$\left\|J_p\left(\frac{\alpha}{l}x\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2}\left[\big(J_p'(\alpha)\big)^2 + \left(1 - \frac{p^2}{\alpha^2}\right)J_p^2(\alpha)\right].$$

В частности, для функции Бесселя нулевого порядка имеем

$$\left\|J_0\left(\frac{\alpha}{l}x\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2}\left[\big(J_0'(\alpha)\big)^2 + J_0^2(\alpha)\right].$$

3. Нули цилиндрической функции Бесселя простые.

4. Из представления цилиндрической функции Бесселя (4) следует, что если x_0 — нуль функции Бесселя $J_p(x)$, то и $-x_0$ является нулем этой функции. Кроме того, из (4) вытекает свойство четности функций Бесселя с целыми индексами:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x).$$

Это соотношение означает, что при четных n функции Бесселя четные, а при нечетных n — нечетные.

5. При $p > -1$ все нули функции Бесселя действительны. Всякое уравнение $J_p(x) = 0$ имеет счетное множество положительных корней:

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots$$

6. При больших значениях x имеют место асимптотические формулы

$$J_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

1.4.3. Применение цилиндрических функций при решении задач математической физики

Рассмотрим задачу о распределении тепла в бесконечном круговом цилиндре радиусом l с начальной температурой, зависящей только от расстояния r до оси цилиндра, и нулевой температурой на поверхности цилиндра:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \tag{13}$$

$$u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \tag{15}$$

Поставленная смешанная задача обладает цилиндрической симметрией, т. е. $u = u(r,t)$, а оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \text{или} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

В соответствии с методом Фурье будем искать решение уравнения (13) в виде

$$u(r,t) = R(r)T(t). \tag{16}$$

Подставляя (16) в уравнение (13) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\,\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = -\lambda^2.$$

Из граничного условия (14) и соотношения (16) следует, что $R(l) = 0$. Относительно граничного условия в точке $r = 0$ имеем особый случай, когда коэффициент теплопроводности $k(r) = r$ обращается в нуль при $r = 0$. В силу того, что ищется ограниченное решение, необходимо потребовать выполнения условия $\bigl|R(0)\bigr| < \infty$.

Таким образом, приходим к задаче Штурма — Лиувилля в особой постановке

$$\begin{cases} \dfrac{d^2R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \quad 0 < r < l, \\ \bigl|R(0)\bigr| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Введем новую переменную $x = \lambda r$. Тогда

$$\frac{dR}{dr} = \lambda\,\frac{dR}{dx}, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \lambda^2\,\frac{d^2R}{dx^2}.$$

В результате после деления на λ^2 приходим к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + R = 0.$$

Его общее решение имеет вид $R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x)$ или

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Функция Бесселя $J_0(\lambda r)$ ограничена на отрезке $[0, l]$, а функция Вебера — Неймана неограничена в окрестности точки $r = 0$. Для выполнения условия $\bigl|R(0)\bigr| < \infty$ необходимо, чтобы $C_2 = 0$. Как обычно, возьмем $C_1 = 1$. Из второго граничного условия $J_0(\lambda l) = 0$ находим собственные значения

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Собственные функции задачи Штурма — Лиувилля принимают вид

$$R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

причем в силу свойства 1 цилиндрических функций,

$$\int_0^l rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{l}\right)dr = 0, \quad k \neq n.$$

Для функции $T(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$T_k'(t) + \left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0,$$

решение которого $T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}$.

Составим ряд с произвольными коэффициентами:

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right). \tag{17}$$

Подставляя этот ряд в начальное условие (15), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = \varphi(r). \tag{18}$$

Выражение (18) представляет собой разложение заданной функции $\varphi(r)$ в ряд Фурье по функциям Бесселя на отрезке $[0, l]$. Согласно общей теории, его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$A_k = \frac{1}{\left\|J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2} \int_0^l r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)dr, \tag{19}$$

при этом

$$\left\|J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2}\left[J_0'(\mu_k)\right]^2 = \frac{l^2}{2}\,J_1^2(\mu_k),$$

где $J_1(\mu_k)$ — значения функции Бесселя первого порядка в точках μ_k. В результате формула (19) принимает вид

$$A_k = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^l r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)dr, \tag{20}$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Таким образом, решение смешанной задачи (13)–(15) дается формулой (17), в которой коэффициенты A_k вычисляются согласно (20).

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях круглой мембраны радиусом l, закрепленной по краю:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\lambda^2 u=0,\quad 0\leqslant r<l, \tag{21}$$

$$\bigl|u|_{r=0}\bigr|<\infty,\quad u|_{r=l}=0. \tag{22}$$

В силу однозначности искомого решения $u(r,\varphi)$, оно должно быть периодическим по φ с периодом 2π:

$$u(r,\varphi+2\pi)=u(r,\varphi).$$

Краевая задача (21), (22) представляет собой задачу на собственные значения в особой постановке. Будем искать ограниченное решение уравнения (21) в виде

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi). \tag{23}$$

Подставляя (23) в уравнение (21) и разделяя переменные, получим

$$\frac{\Phi''}{\Phi}=-\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\lambda^2r^2R}{R}=-\mu^2.$$

Присоединяя к дифференциальному уравнению для угловой функции $\Phi(\varphi)$ условие 2π-периодичности, приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases}\Phi''+\mu^2\Phi=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi).\end{cases}$$

Нетривиальные решения этой задачи существуют лишь при $\mu=n$ и имеют вид

$$\Phi_n(\varphi)=\cos n\varphi,\quad \Phi_n(\varphi)=\sin n\varphi,\quad n=0,1,\ldots$$

В свою очередь, для радиальной функции $R(r)$ после деления на r^2 снова имеем задачу Штурма — Лиувилля

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0,\quad n=0,1,\ldots, \tag{24}$$

$$\bigl|R(0)\bigr|<\infty,\quad R(l)=0. \tag{25}$$

Выполняя замену переменных $x = \lambda r$, приходим к уравнению Бесселя порядка n:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)R = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$R_n(r) = A_n J_n(\lambda r) + B_n N_n(\lambda r).$$

Из первого граничного условия (25) следует, что $B_n = 0$. Для определенности выберем $A_n = 1$. Второе граничное условие приводит к уравнению $J_n(\lambda l) = 0$, из которого следует, что

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{l}, \quad R_{kn}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n(\mu) = 0$. При этом

$$\int\limits_0^l r J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{l}\right) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) dr = 0, \quad \left\| J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{l}\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2}\left[J_n'\big(\mu_k^{(n)}\big)\right]^2.$$

Возвращаясь к краевой задаче (21), (22), получим, что собственному значению $\lambda_k^{(n)} = \dfrac{\mu_k^{(n)}}{l}$ соответствуют две собственные функции

$$u_{kn}^{(1)}(r, \varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{l}\right)\cos n\varphi, \quad u_{kn}^{(2)}(r, \varphi) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{l}\right)\sin n\varphi,$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Замечание 2. Используя решение задачи (21), (22), нетрудно получить решение смешанной задачи для нестационарного уравнения колебаний круглой мембраны

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right], \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad u(r, \varphi + 2\pi, t) = u(r, \varphi, t), \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = f_1(r, \varphi), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(r, \varphi), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Пример 2. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиусом l, закрепленной по краю, если начальные условия имеют вид $u|_{t=0} = \varphi(r)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$.

Решение. Необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Следуя методу Фурье, решение задачи будем искать в виде произведения $u(r,t) = R(r)T(t)$. После подстановки и разделения переменных получим соотношение

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dR}{dr}}{R} = -\lambda^2.$$

Из граничных условий вытекают условия $\big|R(0)\big| < \infty$, $R(l) = 0$, которые вместе с уравнением для $R(r)$ определяют задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Выполняя замену переменных $x = \lambda r$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + R = 0.$$

Его решение записывается в виде линейной комбинации

$$R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Возвращаясь к переменной r, получим общий вид функции $R(r)$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Из условия $\big|R(0)\big| < \infty$ следует, что $C_2 = 0$, а из второго граничного условия $R(l) = 0$ при $C_1 = 1$ получим $J_0(\lambda l) = 0$. Отсюда

$$\lambda l = \mu_k, \quad \lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Для функции $T(t)$ приходим к дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$T_k''(t) + \left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}.$$

Умножая $T_k(t)$ на собственную функцию $R_k(x)$ и суммируя по всем k, получим ряд

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

Второе начальное условие приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k a}{l}\, B_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = 0,$$

из которого следует, что $B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Подставляя ряд в первое начальное условие, получим соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = \varphi(r),$$

из которого вытекают формулы для коэффициентов A_k:

$$A_k = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_k)}\int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr.$$

Окончательно решение смешанной задачи принимает вид

$$u(r,t) = \frac{2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)}{J_1^2(\mu_k)}\cos\frac{\mu_k a t}{l}\int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. ◄

Пример 3. Дан бесконечный круговой цилиндр радиусом l. Начальная температура внутри цилиндра равна $u|_{t=0} = u_0\left(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\right)$, $u_0 = \mathrm{const}$, а на поверхности цилиндра поддерживается нулевая температура. Найти температуру цилиндра при $t > 0$.

Решение. Текстовая задача эквивалентна смешанной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \left|u\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0\left(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\right), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Ее решение будем искать в виде произведения

$$u(r,t) = R(r)T(t).$$

Разделяя переменные, приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \dfrac{1}{r}\,R'}{R} = -\lambda^2.$$

Учитывая граничные условия, получим задачу Штурма — Лиувилля для радиальной функции $R(r)$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \\ \left|R(0)\right| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Введем новую независимую переменную $x = \lambda r$. Тогда

$$\frac{dR}{dr} = \lambda\,\frac{dR}{dx}, \quad \frac{d^2R}{dr^2} = \lambda^2\,\frac{d^2R}{dx^2},$$

и после замены приходим к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + R = 0.$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x).$$

Возвращаясь к переменной r, получим общий вид функции $R(r)$

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Поскольку цилиндрическая функция $J_0(\lambda r)$ ограничена на отрезке $[0, l]$, а функция Вебера — Неймана $N_0(\lambda r)$ не ограничена в окрестности точки $r = 0$, то из граничных условий следует, что

$$C_2 = 0, \quad C_1 J_0(\lambda l) = 0.$$

Полагая $C_1 = 1$, отсюда находим, что

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Уравнение относительно функции $T(t)$ имеет вид

$$T_k'(t) + \left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Решая его как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, получим

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}.$$

Решение смешанной задачи следует искать в виде ряда

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

Подстановка этого ряда в начальное условие приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = u_0\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right).$$

В соответствии с формулами для коэффициентов разложения в ряд дважды дифференцируемой функции, ограниченной при $r = 0$ и обращающейся в нуль при $r = l$, имеем

$$A_k = \frac{u_0}{\left\| J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2} \int_0^l r\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr = \left[\frac{\mu_k r}{l} = x, dr = \frac{l}{\mu_k} dx\right] =$$

$$= \frac{2u_0}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{\mu_k} \left[\left(\frac{l}{\mu_k}\right)^2 x - \frac{l^2}{\mu_k^4}\, x^3\right] J_0(x)\, dx = \frac{2u_0}{J_1^2(\mu_k)\mu_k^2}\Big[\mu_k J_1(\mu_k) -$$

$$- 2J_0(\mu_k) - \mu_k J_1(\mu_k) + \frac{4}{\mu_k}\, J_1(\mu_k)\Big] = \frac{8u_0}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}.$$

При вычислении коэффициентов A_k использовались интегральное свойство цилиндрических функций Бесселя (11) и формула (12).

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u(r,t) = 8u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\!\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. ◄

Пример 4. Найти радиальное распределение температуры в бесконечном круговом цилиндре радиусом l, если боковая поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре u_0, а начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

Решение. Сформулированной физической модели соответствует смешанная задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \left|u\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = u_0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Заменой $u(r,t) = v(r,t) + u_0$ приходим к однородной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}\right), \\ \left|v\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad v\big|_{r=l} = 0, \\ v\big|_{t=0} = -u_0. \end{cases}$$

Согласно схеме метода Фурье, будем искать решение в виде произведения $v(r,t) = R(r)T(t)$. Подставляя в уравнение и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr}}{R} = -\lambda^2.$$

С учетом граничных условий относительно радиальной функции $R(r)$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \\ \left|R(0)\right| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Ее решение записывается в виде

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Для временнóй функции $T(t)$ дифференциальное уравнение имеет вид

$$T_k'(t) + \left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Решая его как уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, находим

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}.$$

Составим ряд из произведений $T_k(t)$ на функции $R_k(r)$

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

Подставим этот ряд в начальное условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = -u_0.$$

Рассматривая это равенство как разложение функции $f(r) = -u_0$ в ряд по ортогональной с весом $\rho(r) = r$ на отрезке $[0, l]$ системе функций $J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)$ и используя интегральное свойство цилиндрических функций Бесселя (11), для коэффициентов A_k получим

$$A_k = \frac{-u_0}{\left\| J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2} \int_0^l r J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr = -\frac{2u_0}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^l r J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr =$$

$$= \left[\frac{\mu_k r}{l} = x,\ dr = \frac{l}{\mu_k}\, dx\right] = -\frac{2u_0}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{\mu_k} \left(\frac{l}{\mu_k}\right)^2 x J_0(x)\, dx =$$

$$= -\frac{2u_0}{J_1^2(\mu_k)\mu_k^2}\, \mu_k J_1(\mu_k) = -\frac{2u_0}{\mu_k J_1(\mu_k)}.$$

Окончательно приходим к ответу

$$u(r,t) = u_0 - 2u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)}\, e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. ◄

Пример 5. Найти колебания однородной круглой мембраны радиусом l с закрепленным краем, если эти колебания вызваны равномерно распределенным давлением $p = p_0 \sin \omega t$, приложенным к одной стороне мембраны. Предполагается, что частота ω вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот мембраны $\omega_k = \dfrac{\mu_k a}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$ (нерезонансный случай).

Решение. Необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) + \dfrac{p_0}{\rho_0} \sin \omega t, \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \left| u\big|_{r=0} \right| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \end{cases}$$

где ρ_0 — поверхностная плотность мембраны.

Будем искать решение в виде ряда Фурье — Бесселя

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

удовлетворяющего граничным условиям. В свою очередь, правую часть уравнения разложим в ряд по собственным функциям

$$\frac{p_0}{\rho_0} \sin \omega t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

где коэффициенты $f_k(t)$ вычисляются по формулам:

$$f_k(t) = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^l r \, \frac{p_0}{\rho_0} \sin \omega t \, J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr = \\ = \frac{2 p_0 \sin \omega t}{\rho_0 \mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^{\mu_k} x J_0(x) \, dx = \frac{2 p_0 \sin \omega t}{\rho_0 \mu_k J_1(\mu_k)}.$$

Подставляя эти разложения в исходное уравнение и принимая во внимание равенство

$$J_0''\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) + \frac{l}{\mu_k r} J_0'\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = -J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_k''(t)+\frac{\mu_k^2a^2}{l^2}\,u_k(t)\right]J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

Отсюда получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_k''(t)+\omega_k^2u_k(t)=f_k(t),\quad k=1,2,\ldots,$$

где $\omega_k=\dfrac{\mu_k a}{l}$. Из начальных условий следует, что

$$u_k(0)=0,\quad u_k'(0)=0.$$

Тем самым приходим к задаче Коши для определения $u_k(t)$.

Представим $u_k(t)$ как сумму

$$u_k(t)=\widetilde{u}_k(t)+A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t,$$

где $\widetilde{u}_k(t)$ — частное решение неоднородного уравнения. Ищем это решение в виде $\widetilde{u}_k(t)=C_k\sin\omega t$. Подставляя в уравнение и учитывая выражение для коэффициентов $f_k(t)$, находим

$$\widetilde{u}_k(t)=\frac{2p_0}{\rho_0(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\sin\omega t.$$

Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$u_k(t)=\frac{2p_0}{\rho_0(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\sin\omega t+A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t.$$

Из начальных условий вытекает, что

$$A_k=0,\quad B_k=-\frac{2p_0\omega}{\rho_0\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}.$$

Окончательно получим формулы для коэффициентов $u_k(t)$:

$$u_k(t)=\frac{2p_0}{\rho_0(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\sin\omega t-\frac{2p_0\omega}{\rho_0\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\sin\omega_k t.$$

Решение смешанной задачи принимает вид

$$u(r,t)=\frac{2p_0\sin\omega t}{\rho_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)-$$

$$-\frac{2p_0\omega}{\rho_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k(\omega_k^2-\omega^2)\mu_k J_1(\mu_k)}\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

где $\omega_k = \dfrac{\mu_k a}{l}$, μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Решим эту задачу другим способом. Сначала найдем частное решение $w(r,t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{p_0}{\rho_0}\sin\omega t,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left|w|_{r=0}\right| < \infty, \quad w|_{r=l} = 0.$$

Возьмем $w(r,t) = W(r)\sin\omega t$ и подставим в уравнение

$$-\omega^2 W\sin\omega t = a^2\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right)\sin\omega t + \frac{p_0}{\rho_0}\sin\omega t.$$

После очевидных преобразований приходим к соотношению

$$W'' + \frac{1}{r}W' + \frac{\omega^2}{a^2}W + \frac{p_0}{\rho_0 a^2} = 0.$$

Ограниченным решением этого уравнения является функция

$$W(r) = CJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) - \frac{p_0}{\rho_0\omega^2}.$$

В силу второго граничного условия, имеем

$$C = \frac{p_0}{\rho_0\omega^2 J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)}, \quad W(r) = \frac{p_0}{\rho_0\omega^2}\left[\frac{J_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)} - 1\right].$$

Таким образом, решение исходной смешанной задачи следует искать в виде суммы

$$u(r,t) = \frac{p_0}{\rho_0\omega^2}\left[\frac{J_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)} - 1\right]\sin\omega t + v(r,t).$$

Функция $v(r,t)$ является решением однородной смешанной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}\right), \\ \left|v|_{r=0}\right| < \infty, \quad v|_{r=l} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{p_0}{\rho_0\omega}\left[1 - \dfrac{J_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)}\right]. \end{cases}$$

Оно представляется рядом

$$v(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\mu_k at}{l}+B_k\sin\frac{\mu_k at}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

Подставим этот ряд в первое начальное условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)=0.$$

Отсюда следует, что $A_k=0$, $k=1,2,\ldots$. Второе начальное условие приводит к соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k a}{l}\,B_kJ_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)=\frac{p_0}{\rho_0\omega}\left[1-\frac{J_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)}\right].$$

Поскольку собственные функции $J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)$ ортогональны с весом r на отрезке $[0,l]$, находим

$$B_k=\frac{p_0}{\rho_0\omega}\,\frac{l}{\mu_k a}\,\frac{1}{\left\|J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2}\int\limits_0^l rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\left[1-\frac{J_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)}\right]dr=$$

$$=\frac{2p_0}{\rho_0\omega\mu_k alJ_1^2(\mu_k)}\left[\int\limits_0^l rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)dr-\frac{1}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)}\int\limits_0^l rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right]dr.$$

Первый интеграл равен (см. предыдущую задачу)

$$\int\limits_0^l rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)dr=\frac{l^2}{\mu_k^2}\int\limits_0^{\mu_k}xJ_0(x)\,dx=\frac{l^2J_1(\mu_k)}{\mu_k}.$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся тем, что функции $R_1(r)=J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)$ и $R_2(r)=J_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR_1}{dr}\right)+\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2rR_1(r)=0\quad\text{и}\quad\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR_2}{dr}\right)+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2rR_2(r)=0$$

соответственно. Умножая первое из этих равенств на $R_2(r)$, второе — на $R_1(r)$, вычитая одно из другого и интегрируя по $0 \leqslant r \leqslant l$, после несложных преобразований получим

$$\left[\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right] \int\limits_0^l r R_1(r) R_2(r)\, dr + \big[r(R_2 R_1' - R_1 R_2')\big]\Big|_0^l = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\big[r(R_2 R_1' - R_1 R_2')\big]\Big|_0^l = l\big[R_2(l) R_1'(l) - R_1(l) R_2'(l)\big] = -\mu_k J_0\left(\frac{\omega l}{a}\right) J_1(\mu_k),$$

из последнего равенства будем иметь

$$\frac{1}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)} \int\limits_0^l r J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) dr = \frac{\mu_k J_1(\mu_k)}{\left(\dfrac{\mu_k}{l}\right)^2 - \left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2} = \frac{a^2 l^2 \mu_k J_1(\mu_k)}{(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2}.$$

Подставим теперь найденные значения интегралов в выражения для коэффициентов B_k:

$$B_k = \frac{2p_0}{\rho_0 \omega \mu_k a l J_1^2(\mu_k)} \left[\frac{l^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k} - \frac{a^2 l^2 \mu_k J_1(\mu_k)}{(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2}\right] = \\ = -\frac{2p_0 \omega l^3}{\rho_0 a \big[(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2\big] \mu_k^2 J_1(\mu_k)}.$$

Таким образом, приходим к ответу

$$u(r,t) = \frac{p_0}{\rho_0 \omega^2} \left[\frac{J_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)} - 1\right] \sin \omega t - \\ - \frac{2p_0 \omega l^3}{\rho_0 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)}{\big[(a\mu_k)^2 - (\omega l)^2\big] \mu_k^2 J_1(\mu_k)} \sin \frac{\mu_k a t}{l},$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. ◄

Пример 6. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (t^2+1)J_0(\mu_n x), \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \text{где } \mu_n \text{ — положительный корень уравнения } J_0(\mu) = 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Будем искать решение в виде $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, где $W(x,t)$ — частное решение, удовлетворяющее неоднородному уравнению и граничным условиям. Возьмем

$$W(x,t) = (At^2 + B)J_0(\mu_n x)$$

и подставим его в дифференциальное уравнение

$$2AJ_0(\mu_n x) = (At^2+B)\mu_n^2\left[J_0''(\mu_n x) + \frac{1}{\mu_n x}J_0'(\mu_n x)\right] + (t^2+1)J_0(\mu_n x).$$

С учетом того, что $J_0''(\mu_n x) + \dfrac{1}{\mu_n x}J_0'(\mu_n x) = -J_0(\mu_n x)$, будем иметь

$$A\mu_n^2 t^2 + B\mu_n^2 - t^2 - 1 + 2A = 0.$$

Отсюда вытекают выражения для коэффициентов A и B:

$$A = \frac{1}{\mu_n^2}, \quad B = \frac{1}{\mu_n^4}(\mu_n^2 - 2).$$

Окончательно для $W(x,t)$ получим

$$W(x,t) = \left[\mu_n^{-2}t^2 + \mu_n^{-4}(\mu_n^2 - 2)\right]J_0(\mu_n x).$$

Для функции $v(x,t)$ приходим к смешанной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \big|v|_{x=0}\big| < \infty, \quad v|_{x=1} = 0, \\ v|_{t=0} = \mu_n^{-4}(2-\mu_n^2)J_0(\mu_n x), \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ее решение запишем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k \cos \mu_k t + B_k \sin \mu_k t\big) J_0(\mu_k x),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Подставляя ряд в первое начальное условие, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\mu_k x) = \mu_n^{-4}(2 - \mu_n^2) J_0(\mu_n x).$$

В силу ортогональности собственных функций $J_0(\mu_k x)$ с весом x на отрезке $[0,1]$, находим

$$A_n = \mu_n^{-4}(2 - \mu_n^2), \quad A_k = 0, \quad k \neq n.$$

Второе начальное условие приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_k J_0(\mu_k x) = 0,$$

из которого следует, что $B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Следовательно,

$$v(x,t) = \mu_n^{-4}(2 - \mu_n^2) \cos \mu_n t \, J_0(\mu_n x).$$

Таким образом, приходим к решению

$$u(x,t) = \big[\mu_n^{-2} t^2 + \mu_n^{-4}(\mu_n^2 - 2)\big] J_0(\mu_n x) + \mu_n^{-4}(2 - \mu_n^2) \cos \mu_n t \, J_0(\mu_n x). \blacktriangleleft$$

Пример 7. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = \sin^2 t, \quad t \geqslant 0 \\ u|_{t=0} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{J_0(2x)}{2J_0(2)}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Замечая, что

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t,$$

ищем решение как сумму $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где функцию $w(x,t)$ удобно взять в виде

$$w(x,t) = \frac{1}{2} + W(x)\cos 2t.$$

Подставляя $w(x,t)$ в дифференциальное уравнение, получим

$$-4W(x)\cos 2t = W''(x)\cos 2t + \frac{1}{x}\,W'(x)\cos 2t,$$

или

$$W''(x) + \frac{1}{x}\,W'(x) + 4W(x) = 0.$$

Сделаем замену переменных $y = 2x$. Тогда

$$\frac{dW}{dx} = 2\,\frac{dW}{dy}, \quad \frac{d^2W}{dx^2} = 4\,\frac{d^2W}{dy^2}.$$

В результате приходим к уравнению

$$\frac{d^2W}{dy^2} + \frac{1}{y}\,\frac{dW}{dy} + W = 0.$$

Это уравнение Бесселя нулевого порядка. Его ограниченное решение имеет вид $W(y) = CJ_0(y)$ или в «старой» переменной $W(x) = CJ_0(2x)$. Следовательно,

$$w(x,t) = \frac{1}{2} + CJ_0(2x)\cos 2t.$$

Подставляя эту функцию во второе граничное условие, получим, что $C = -\dfrac{1}{2J_0(2)}$. Таким образом, имеем частное решение

$$w(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{J_0(2x)}{2J_0(2)}\cos 2t,$$

удовлетворяющее исходному уравнению и граничным условиям.

Для функции $v(x,t)$ приходим к задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \left|v|_{x=0}\right| < \infty, \quad v|_{x=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Решением смешанной задачи для однородного дифференциального уравнения с однородными граничными и начальными условиями является функция $v(x,t) \equiv 0$. Поэтому окончательно имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{J_0(2x)}{2J_0(2)}\cos 2t. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{4x}\,u + tJ_1(\mu_n\sqrt{x}), \quad 0 \leqslant x < 1, \\ \text{где } \mu_n \text{ — положительный корень уравнения } J_1(\mu) = 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Положим $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$, где в качестве частного решения возьмем

$$W(x,t) = (At+B)J_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

Подставим $W(x,t)$ в исходное дифференциальное уравнение

$$AJ_1(\mu_n\sqrt{x}) = (At+B)\,\frac{\mu_n^2}{4}\bigg[J_1''(\mu_n\sqrt{x}) + \frac{1}{\mu_n\sqrt{x}}\,J_1'(\mu_n\sqrt{x}) - \\ - \frac{1}{\mu_n^2 x}\,J_1(\mu_n\sqrt{x})\bigg] + tJ_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

Принимая во внимание, что

$$J_1''(\mu_n\sqrt{x}) + \frac{1}{\mu_n\sqrt{x}}\,J_1'(\mu_n\sqrt{x}) = -\left(1 - \frac{1}{\mu_n^2 x}\right)J_1(\mu_n\sqrt{x}),$$

из последнего равенства приходим к соотношению

$$A + (At+B)\,\frac{\mu_n^2}{4} - t = 0.$$

Отсюда получим $A = 4\mu_n^{-2}$, $B = -16\mu_n^{-4}$. Таким образом,

$$W(x,t) = \big(4\mu_n^{-2}t - 16\mu_n^{-4}\big)J_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

Для функции $v(x,t)$ имеем смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = x\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{4x}\,v, \\ \big|v|_{x=0}\big| < \infty, \quad v|_{x=1} = 0, \\ v|_{t=0} = 16\mu_n^{-4}J_1(\mu_n\sqrt{x}). \end{cases}$$

Полагая $v(x,t) = X(x)T(t)$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{T} = \frac{x\,\dfrac{d^2X}{dx^2} + \dfrac{dX}{dx} - \dfrac{1}{4x}\,X}{X} = -\lambda^2.$$

С учетом граничных условий для функции $X(x)$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} x\,\dfrac{d^2X}{dx^2} + \dfrac{dX}{dx} + \left(\lambda^2 - \dfrac{1}{4x}\right)X = 0, \\ \big|X(0)\big| < \infty, \quad X(1) = 0. \end{cases}$$

Вводя новую переменную $y = \sqrt{x}$, находим

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{dX}{dy}, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{4x}\,\frac{d^2X}{dy^2} - \frac{1}{4x^{3/2}}\,\frac{dX}{dy},$$

при этом задача Штурма — Лиувилля преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dy^2} + \dfrac{1}{y}\,\dfrac{dX}{dy} + \left(4\lambda^2 - \dfrac{1}{y^2}\right)X = 0, \\ \big|X\big|_{y=0}\big| < \infty, \quad X\big|_{y=1} = 0. \end{cases}$$

Эта задача посредством подстановки $\xi = 2\lambda y$ сводится к задаче Штурма — Лиувилля для уравнения Бесселя первого порядка. Ее решениями являются собственные значения и собственные функции

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{2}, \quad X_k(x) = J_1(\mu_k\sqrt{x}), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения $T_k' + \dfrac{\mu_k^2}{4}T_k = 0$ имеет вид $T_k(t) = A_k e^{-\frac{\mu_k^2}{4}t}$.

Составим ряд

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{\mu_k^2}{4}t} J_1(\mu_k\sqrt{x})$$

и подставим его в начальное условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_1(\mu_k\sqrt{x}) = 16\mu_n^{-4} J_1(\mu_n\sqrt{x}).$$

В силу ортогональности системы собственных функций $J_1(\mu_k\sqrt{x})$ с весом $\rho(x) = 1$ на отрезке $[0,1]$, из последнего соотношения вытекает, что

$$A_n = 16\mu_n^{-4}, \quad A_k = 0, \quad k \neq n.$$

Следовательно,

$$v(x,t) = 16\mu_n^{-4} e^{-\frac{\mu_n^2}{4}\,t} J_1(\mu_n\sqrt{x})$$

и в ответе получим

$$u(x,t) = 16\mu_n^{-4} e^{-\frac{\mu_n^2}{4}\,t} J_1(\mu_n\sqrt{x}) + \bigl(4\mu_n^{-2}t - 16\mu_n^{-4}\bigr) J_1(\mu_n\sqrt{x}). \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти малые радиальные колебания газа, заключенного в бесконечной цилиндрической трубке радиусом l.

Решение. В этом случае будем иметь дело с задачей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \bigl|u\bigr|_{r=0}\bigr| < \infty, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\bigr|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Как и ранее, ищем решение однородной задачи в виде произведения

$$u(r,t) = R(r)T(t).$$

Подставляя его в исходное уравнение и разделяя переменные, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно радиальной $R(r)$ и временно́й $T(t)$ функций:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{R'' + \dfrac{1}{r}\,R'}{R} = -\lambda^2.$$

Из граничного условия $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=l} = 0$ следует, что $R'(l) = 0$. Присоединяя условие ограниченности на оси трубки $\bigl|R(0)\bigr| < \infty$, приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}\,R' + \lambda^2 R = 0, \\ \bigl|R(0)\bigr| < \infty, \quad R'(l) = 0. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из условия ограниченности вытекает, что $C_2 = 0$. Полагая $C_1 = 1$, получим $R(r) = J_0(\lambda r)$.

Второе граничное условие приводит к уравнению

$$J_0'(\lambda l) = 0.$$

С учетом соотношения $J_0'(x) = -J_1(x)$ его можно записать в виде

$$J_1(\lambda l) = 0.$$

Отсюда находим собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи Штурма — Лиувилля:

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Обратим внимание на то, что число $\lambda_0 = 0$ является собственным значением задачи Штурма — Лиувилля, которому соответствует собственная функция $R_0(r) = 1$. Она ортогональна каждой из функций $J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)$ с весом $\rho(r) = r$ на отрезке $[0, l]$. Действительно, проводя замену переменных и используя интегральное свойство цилиндрических функций, будем иметь

$$\int\limits_0^l r J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr = \frac{l^2}{\mu_k^2} \int\limits_0^{\mu_k} x J_0(x)\, dx = \frac{l^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Вернемся к уравнению для функции $T(t)$

$$T_k''(t) + \left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

При $k = 1, 2, \ldots,$ его общее решение имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}.$$

При $k = 0$ получим уравнение $T_0'' = 0$, решением которого является многочлен первой степени

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

Умножая $T_k(t)$ на собственные функции $J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)$ и суммируя по всем $k = 0, 1, \ldots,$ приходим к ряду

$$u(r, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin\frac{\mu_k a t}{l}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

Подставляя его в начальные условия, получим

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = \varphi(r), \quad B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k a}{l} B_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = \psi(r).$$

В соответствии с общей теорией разложения в ряд по ортогональной системе функций находим

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr}{\int\limits_0^l r J_0^2\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr} = \frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_k)} \int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr,$$

$$B_k = \frac{l}{\mu_k a} \frac{\int\limits_0^l r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr}{\int\limits_0^l r J_0^2\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr} = \frac{2}{al\mu_k J_0^2(\mu_k)} \int\limits_0^l r\psi(r) J_0\left(d\frac{\mu_k r}{l}\right) dr,$$

$$A_0 = \frac{\int\limits_0^l r\varphi(r)\, dr}{\int\limits_0^l r\, dr} = \frac{2}{l^2} \int\limits_0^l r\varphi(r)\, dr, \quad B_0 = \frac{\int\limits_0^l r\psi(r)\, dr}{\int\limits_0^l r\, dr} = \frac{2}{l^2} \int\limits_0^l r\psi(r)\, dr.$$

Таким образом, решение смешанной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u(r,t) = \frac{2}{l^2} \int\limits_0^l r\big[\varphi(r) + t\psi(r)\big] dr\, + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ \frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_k)} \Bigg[\int\limits_0^l r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr \Bigg] \cos\frac{\mu_k a t}{l} \,+ \\ + \frac{2}{al\mu_k J_0^2(\mu_k)} \Bigg[\int\limits_0^l r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr \Bigg] \sin\frac{\mu_k a t}{l} \Bigg\} J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \end{aligned}$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. ◄

Пример 10. Найти температуру бесконечного кругового цилиндра радиусом l, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $u_0 = \text{const}$. Начальная температура внутри цилиндра равна $u_1 = \text{const}$.

Решение. Текстовая задача эквивалентна смешанной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \bigl|u|_{r=0}\bigr| < \infty, \quad \left[\dfrac{\partial u}{\partial r} + h\bigl(u - u_0\bigr)\right]\Bigg|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = u_1, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Выполним замену $u(r,t) = v(r,t) + u_0$. Для функции $v(r,t)$ приходим к однородной смешанной задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial r}\right), \\ \bigl|v|_{r=0}\bigr| < \infty, \quad \left[\dfrac{\partial v}{\partial r} + hv\right]\Bigg|_{r=l} = 0, \\ v|_{t=0} = u_1 - u_0. \end{cases}$$

Полагая $v(r,t) = R(r)T(t)$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{R'' + \dfrac{1}{r}\,R'}{R} = -\lambda^2.$$

С учетом граничных условий имеем задачу Штурма — Лиувилля для радиальной функции

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}\,R' + \lambda^2 R = 0, \\ \bigl|R(0)\bigr| < \infty, \quad R'(l) + hR(l) = 0. \end{cases}$$

Из условия ограниченности в точке $r = 0$ следует, что общее решение дифференциального уравнения имеет вид $R(r) = J_0(\lambda r)$. Подставляя его во второе граничное условие, получим

$$\lambda J_0'(\lambda r) + hJ_0(\lambda r) = 0.$$

Пусть μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hlJ_0(\mu) = 0$. Тогда собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из дифференциального уравнения для функции $T(t)$ находим

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t}$$

и запишем решение смешанной задачи в виде ряда

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right).$$

Начальное условие для $v(r,t)$ приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = u_1 - u_0,$$

из которого в силу ортогональности собственных функций $J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)$ с весом r на отрезке $[0,l]$ получим

$$A_k = \frac{1}{\left\|J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2} \int\limits_0^l r(u_1 - u_0) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr = \frac{u_1 - u_0}{\left\|J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2} \frac{l^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k}.$$

Для вычисления квадрата нормы используем формулу

$$\left\|J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2}\left[J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)\right],$$

в которой учтем, что $J_1(\mu_k) = -J_0'(\mu_k) = \dfrac{hl}{\mu_k} J_0(\mu_k)$. Имеем

$$\left\|J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\right\|^2 = \frac{l^2}{2}\left[J_0^2(\mu_k) + \left(\frac{hl}{\mu_k}\right)^2 J_0^2(\mu_k)\right] = \frac{l^2(\mu_k^2 + h^2 l^2) J_0^2(\mu_k)}{2\mu_k^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу для коэффициентов, получим

$$A_k = \frac{2\mu_k^2 (u_1 - u_0)}{l^2(\mu_k^2 + h^2 l^2) J_0^2(\mu_k)} \frac{hl^3 J_0(\mu_k)}{\mu_k^2} = \frac{2(u_1 - u_0) hl}{(\mu_k^2 + h^2 l^2) J_0(\mu_k)}.$$

Таким образом, окончательно приходим к ответу

$$u(r,t) = u_0 + 2(u_1 - u_0) hl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)}{(\mu_k^2 + h^2 l^2) J_0(\mu_k)} e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l}\right)^2 t},$$

где μ_k — положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hl J_0(\mu) = 0$. ◀

Пример 11. Найти распределение температуры в неограниченной цилиндрической трубе $l_1 \leqslant r \leqslant l_2$, если на внутренней и наружной поверхностях трубы поддерживается нулевая температура, а ее начальная температура равна $u_0 = \text{const}$.

Решение. Необходимо решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad l_1 < r < l_2, \quad t > 0, \\ u\big|_{r=l_1} = 0, \quad u\big|_{r=l_2} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \quad l_1 \leqslant r \leqslant l_2. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $u(r,t) = R(r)T(t)$. После разделения переменных приходим к двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} = -\lambda^2.$$

Для функции $R(r)$ получим задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0, \\ R(l_1) = 0, \quad R(l_2) = 0. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Подставляя его в граничные условия, получим

$$\begin{cases} C_1 J_0(\lambda l_1) + C_2 N_0(\lambda l_1) = 0, \\ C_1 J_0(\lambda l_2) + C_2 N_0(\lambda l_2) = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы однородная система линейных алгебраических уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю

$$\begin{vmatrix} J_0(\lambda l_1) & N_0(\lambda l_1) \\ J_0(\lambda l_2) & N_0(\lambda l_2) \end{vmatrix} = J_0(\lambda l_1)N_0(\lambda l_2) - J_0(\lambda l_2)N_0(\lambda l_1) = 0.$$

Пусть μ_k — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu)N_0(\mu b) - J_0(\mu b)N_0(\mu) = 0,$$

где $b = \dfrac{l_2}{l_1}$. Тогда собственными значениями задачи Штурма — Лиувилля будут числа $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{l_1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Полагая $C_1 = N_0(\mu_k b)$, из второго уравнения системы находим $C_2 = -J_0(\mu_k b)$, при этом первое равенство выполняется тождественно. Следовательно, собственные функции имеют вид

$$R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) = N_0(\mu_k b) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) - J_0(\mu_k b) N_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Они образуют ортогональную с весом r систему на отрезке $[l_1, l_2]$.

Из дифференциального уравнения $T_k' + \lambda_k^2 a^2 T_k = 0$ находим

$$T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l_1}\right)^2 t}.$$

Записывая решение в виде ряда

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l_1}\right)^2 t} R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)$$

и подставляя в начальное условие, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) = u_0.$$

Из этого равенства вытекают формулы для коэффициентов A_k:

$$A_k = \frac{1}{\left\| R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) \right\|^2} \int_{l_1}^{l_2} r u_0 R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) dr, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Найдем квадрат нормы собственных функций. Обозначим

$$Y_0\left(\frac{\mu r}{l_1}\right) = N_0(\mu_k b) J_0\left(\frac{\mu r}{l_1}\right) - J_0(\mu_k b) N_0\left(\frac{\mu r}{l_1}\right).$$

Функции $R_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l_1}\right)$ и $Y_0\left(\dfrac{\mu r}{l_1}\right)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dR_0}{dr}\right) + \left(\frac{\mu_k}{l_1}\right)^2 r R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dY_0}{dr}\right) + \left(\frac{\mu}{l_1}\right)^2 r Y_0\left(\frac{\mu r}{l_1}\right) = 0.$$

Умножая первое из равенств на $Y_0\left(\dfrac{\mu r}{l_1}\right)$, второе — на $R_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l_1}\right)$, вычитая одно из другого и интегрируя по r от l_1 до l_2, получим

$$\frac{\mu_k^2-\mu^2}{l_1^2}\int\limits_{l_1}^{l_2} rR_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)Y_0\left(\frac{\mu r}{l_1}\right)dr+$$
$$+\left[\frac{\mu_k}{l_1}\,rY_0\left(\frac{\mu r}{l_1}\right)R_0'\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)-\frac{\mu_k}{l_1}\,rY_0'\left(\frac{\mu r}{l_1}\right)R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)\right]\Bigg|_{l_1}^{l_2}=0.$$

Отсюда с учетом граничных условий следует, что

$$\int\limits_{l_1}^{l_2} rR_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)Y_0\left(\frac{\mu r}{l_1}\right)dr=\frac{l_1^2\big[\mu_k Y_0(\mu)R_0'(\mu_k)-\mu_k bY_0(\mu b)R_0'(\mu_k b)\big]}{\mu_k^2-\mu^2}.$$

Переходя к пределу при $\mu\to\mu_k$ и раскрывая неопределенность в правой части по правилу Лопиталя, будем иметь

$$\left\|R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)\right\|^2=\lim_{\mu\to\mu_k}\frac{l_1^2\big[\mu_k Y_0(\mu)R_0'(\mu_k)-\mu_k bY_0(\mu b)R_0'(\mu_k b)\big]}{\mu_k^2-\mu^2}=$$
$$=\frac{l_1^2}{2\mu_k}\Big\{\mu_k b^2\big[N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k b)-J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k b)\big]^2-$$
$$-\mu_k\big[N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k)-J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k)\big]^2\Big\}.$$

Для первого слагаемого воспользуемся формулой вронскиана цилиндрических функций $J_0(x)$ и $N_0(x)$

$$\begin{vmatrix}J_0(x) & N_0(x)\\ J_0'(x) & N_0'(x)\end{vmatrix}=J_0(x)N_0'(x)-N_0(x)J_0'(x)=\frac{2}{\pi x}.$$

С помощью этого равенства и соотношения

$$\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}=\frac{N_0(\mu_k b)}{N_0(\mu_k)},$$

вытекающего из определения собственных значений задачи Штурма — Лиувилля, преобразуем слагаемое во второй скобке

$$N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k)-J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k)=\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}\big[N_0(\mu_k)J_0'(\mu_k)-$$
$$-J_0(\mu_k)N_0'(\mu_k)\big]=-\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}\,\frac{2}{\pi\mu_k}.$$

Окончательно для квадрата нормы получим выражение

$$\left\|R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)\right\|^2 = \frac{l_1^2}{2\mu_k}\left[\frac{4\mu_k b^2}{\pi^2(\mu_k b)^2} - \frac{J_0^2(\mu_k b)}{J_0^2(\mu_k)}\,\frac{4\mu_k}{\pi^2\mu_k^2}\right] =$$

$$= \frac{l_1^2}{2\mu_k}\left[\frac{4}{\pi^2\mu_k} - \frac{4}{\pi^2\mu_k}\,\frac{J_0^2(\mu_k b)}{J_0^2(\mu_k)}\right] = \frac{2l_1^2\big[J_0^2(\mu_k) - J_0^2(\mu_k b)\big]}{\pi^2\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)}.$$

Вычислим теперь интеграл $\int\limits_{l_1}^{l_2} u_0 r R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)dr$. Учитывая рекуррентные соотношения для цилиндрических функций $J_0(x), N_0(x)$ и применяя рассмотренные выше формулы, будем иметь

$$\left\|R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)\right\|^2 = \int\limits_{l_1}^{l_2} u_0 r\left[N_0(\mu_k b)J_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) - J_0(\mu_k b)N_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right)\right]dr =$$

$$= \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\int\limits_{\mu_k}^{\mu_k b} x\big[N_0(\mu_k b)J_0(x) - J_0(\mu_k b)N_0(x)\big]dx = \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\Big\{\big[\mu_k J_0'(\mu_k) -$$

$$- \mu_k b J_0'(\mu_k b)\big]N_0(\mu_k b) - \big[\mu_k N_0'(\mu_k) - \mu_k b N_0'(\mu_k b)\big]J_0(\mu_k b)\Big\} =$$

$$= \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\Big\{\mu_k b\big[J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k b) - N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k b)\big] - \mu_k\big[J_0(\mu_k b)N_0'(\mu_k) -$$

$$- N_0(\mu_k b)J_0'(\mu_k)\big]\Big\} = \frac{u_0 l_1^2}{\mu_k^2}\left[\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\,\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}\right] = \frac{2u_0 l_1^2}{\pi\mu_k^2}\,\frac{J_0(\mu_k) - J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k)}.$$

В итоге коэффициенты A_k принимают вид

$$A_k = \frac{2u_0 l_1^2\pi^2\mu_k^2 J_0^2(\mu_k)}{2l_1^2\big[J_0^2(\mu_k) - J_0^2(\mu_k b)\big]}\,\frac{J_0(\mu_k) - J_0(\mu_k b)}{\pi\mu_k^2 J_0(\mu_k)} = \frac{u_0\pi J_0(\mu_k)}{J_0(\mu_k) + J_0(\mu_k b)}.$$

Поставляя найденные коэффициенты в ряд, приходим к ответу

$$u(r,t) = u_0\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_k)}{J_0(\mu_k) + J_0(\mu_k b)}\,e^{-\left(\frac{\mu_k a}{l_1}\right)^2 t}R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right),$$

где

$$R_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) = N_0(\mu_k b)J_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right) - J_0(\mu_k b)N_0\left(\frac{\mu_k r}{l_1}\right), \quad b = \frac{l_2}{l_1},$$

μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu)N_0(\mu b) - J_0(\mu b)N_0(\mu) = 0.$ ◄

1.4.4. Ортогональные многочлены Лежандра

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{26}$$

$$\left|y(-1)\right| < \infty, \quad \left|y(1)\right| < \infty. \tag{27}$$

Это задача Штурма — Лиувилля в особой постановке, где $k(x) = 1-x^2$, $k(-1) = k(1) = 0$. Уравнение (26) называется ***уравнением Лежандра***.

Будем искать решение (26) в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{28}$$

Перепишем (26) в виде

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

и подставим в это уравнение ряд (28):

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\big[\lambda - k(k-1) - 2k\big]x^k = 0$$

или после изменения индекса суммирования

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (\lambda - k^2 - k)a_k\big]x^k = 0.$$

В силу единственности разложения функции в степенной ряд, приходим к равенству

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + (\lambda - k^2 - k)a_k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

из которого следует рекуррентное соотношение

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)}\,a_k, \quad a_0, a_1 \text{ — произвольные числа.} \tag{29}$$

При значениях $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ получим частное решение уравнения (26), содержащее только четные степени x: $y_1(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{2m}x^{2m}$, а при $a_0 = 0$,

$a_1 \neq 0$ — частное решение, содержащее только нечетные степени x: $y_2(x) = = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}x^{2m+1}$. Если $\lambda = n(n+1)$, то в силу (29) получим, что $a_{n+2} = 0$. Далее рекуррентно находим

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \ldots = a_{n+2m} = \ldots = 0.$$

Таким образом, при $\lambda = n(n+1)$ ряд (28) обрывается и становится многочленом $y = P_n(x)$ степени n, ограниченным в особых точках $x = \pm 1$.

Полученные многочлены называются ***многочленами Лежандра***. Они и будут собственными функциями задачи (26), (27), соответствующими собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$.

Для многочленов Лежандра $P_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, справедливо дифференциальное представление

$$P_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{30}$$

Формула (30) называется ***формулой Родрига***.

Свойства многочленов Лежандра.

1. Для многочленов Лежандра справедливо рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

2. Многочлены Лежандра $P_n(x)$ ортогональны с весом $\rho(x) = 1$ на отрезке $[-1, 1]$:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)\, dx = 0, \quad n \neq k.$$

3. Уравнение (26) не имеет ограниченных в особых точках $x = \pm 1$ решений, отличных от многочленов Лежандра.

4. Квадрат нормы многочленов Лежандра равен $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

5. Многочлен Лежандра n-й степени есть функция той же четности, что и n: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

6. Все корни уравнения $P_n(x) = 0$ действительны, различны и лежат в интервале $(-1, 1)$.

7. Если функция $f(x) \in C^1[-1, 1]$, то она разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе многочленов Лежандра

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n P_n(x), \quad f_n = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\, dx.$$

Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{dz}{dx}\right]+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)z=0, \quad -1<x<1, \\ \left|z(-1)\right|<\infty, \quad \left|z(1)\right|<\infty. \end{cases} \tag{31}$$

Заметим, что уравнение Лежандра (26) является частным случаем уравнения (31) при $m=0$. Собственные функции задачи (31) выражаются через многочлены Лежандра $P_n(x)$ по формуле

$$Z_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m)}(x),$$

где $P_n^{(m)}(x)$, $m=\overline{0,n}$, — производные порядка m от многочлена $P_n(x)$.

Собственная функция $Z_n^{(m)}(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n=n(n+1)$, называется ***присоединенной функцией Лежандра порядка*** m, $m=\overline{0,n}$, $n=0,1,\ldots$, $Z_n^{(0)}(x)=P_n(x)$.

Присоединенные функции Лежандра обладают свойством ортогональности с весом $\rho(x)=1$ на отрезке $[-1,1]$:

$$\int\limits_{-1}^{1} Z_n^{(m)}(x)Z_k^{(m)}(x)dx=0, \quad n\neq k.$$

При этом $\left\|Z_n^{(m)}\right\|^2=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\left[Z_n^{(m)}(x)\right]^2dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$.

1.4.5. Применение многочленов Лежандра

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях однородной струны длиной l, закрепленной одним концом на неподвижной опоре и свободно вращающейся вокруг точки опоры:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(l^2-r^2\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right], \quad 0<r\leqslant l, \quad t>0, \tag{32}$$

$$u|_{r=0}=0, \quad t\geqslant 0, \tag{33}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(r), \quad 0\leqslant r\leqslant l. \tag{34}$$

Здесь $a^2=\dfrac{\omega^2}{2}$, где ω — угловая скорость вращения струны, $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ — заданные функции.

Будем искать решение в виде $u(r,t) = R(r)T(t)$. Подставляя это выражение в уравнение (32), получим

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{\dfrac{d}{dr}\left[\left(l^2 - r^2\right)\dfrac{dR}{dr}\right]}{R} = -\lambda.$$

В точке $r = l$ коэффициент $k(r) = l^2 - r^2$ вырождается, и задача Штурма — Лиувилля записывается в виде

$$\frac{d}{dr}\left[\left(l^2 - r^2\right)\frac{dR}{dr}\right] + \lambda R = 0, \quad 0 < r < l, \tag{35}$$

$$R(0) = 0, \quad \left|R(l)\right| < \infty. \tag{36}$$

Введем новую переменную, полагая $r = lx$. Тогда $\dfrac{dR}{dr} = \dfrac{1}{l}\dfrac{dR}{dx}$ и от уравнения (35) приходим к уравнению

$$\frac{1}{l}\frac{d}{dx}\left[\left(l^2 - l^2x^2\right)\frac{1}{l}\frac{dR}{dx}\right] + \lambda R = 0$$

или после сокращения на l^2

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{dR}{dx}\right] + \lambda R = 0. \tag{37}$$

Это уравнение Лежандра на отрезке $[0,1]$. Как показано ранее, уравнение (37) имеет ограниченные на отрезке $[-1,1]$ решения, если $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$ (по смыслу задачи смещение струны $u(r,t)$ должно быть ограниченным). Такими ограниченными решениями являются многочлены Лежандра $P_n(x)$.

Возвращаясь к переменной r, получим, что функция

$$R_n(r) = P_n\left(\frac{r}{l}\right)$$

есть решение уравнения (35), ограниченное в точках $r = \pm l$ при $\lambda = n(n+1)$.

Из первого граничного условия (36) имеем $P_n(0) = 0$. Это означает, что необходимо взять многочлены Лежандра только нечетной степени, т. е. $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$

Таким образом, собственными значениями и собственными функциями задачи Штурма — Лиувилля (35), (36) являются

$$\lambda_k = 2k(2k-1), \quad R_k(r) = P_{2k-1}\left(\frac{r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

При $\lambda = \lambda_k$ уравнение для временно́й функции $T(t)$ имеет вид

$$T_k''(t) + a^2\lambda_k T_k(t) = 0.$$

Его общее решение находим по формуле

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{2k(2k-1)}\,at + B_k \sin\sqrt{2k(2k-1)}\,at.$$

Образуем ряд с неопределенными коэффициентами

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k \cos\sqrt{2k(2k-1)}\,at + B_k \sin\sqrt{2k(2k-1)}\,at\Big]P_{2k-1}\left(\frac{r}{l}\right). \quad (38)$$

Выберем коэффициенты A_k и B_k так, чтобы выполнялись начальные условия (34):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k P_{2k-1}\left(\frac{r}{l}\right) = \varphi(r), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2k(2k-1)}\,aB_k P_{2k-1}\left(\frac{r}{l}\right) = \psi(r).$$

Вычислим квадрат нормы $\|P_{2k-1}\|^2$. Имеем

$$\|P_{2k-1}\|^2 = \int_0^l P_{2k-1}^2\left(\frac{r}{l}\right)dr = l\int_0^1 P_{2k-1}^2(\xi)d\xi =$$
$$= \frac{l}{2}\int_{-1}^{1} P_{2k-1}^2(\xi)d\xi = \frac{l}{2}\,\frac{2}{2(2k-1)+1} = \frac{l}{4k-1}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{4k-1}{l}\int_0^l \varphi(r)P_{2k-1}\left(\frac{r}{l}\right)dr,\\ B_k &= \frac{4k-1}{al\sqrt{2k(2k-1)}}\int_0^l \psi(r)P_{2k-1}\left(\frac{r}{l}\right)dr. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, решение смешанной задачи (32)–(34) дается рядом (38), в котором коэффициенты A_k и B_k вычисляются согласно формулам (39).

1.4.6. Многочлены Чебышева — Эрмита

Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda e^{-x^2}y=0,\quad -\infty<x<\infty, \tag{40}$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x^2}y(x)=0,\quad \lim_{x\to\infty}e^{-x^2}y(x)=0. \tag{41}$$

Требуется найти все значения λ, при которых уравнение (40) имеет нетривиальные решения, растущие при $x\to\infty$ не быстрее, чем e^{x^2}.

Будем искать решение (40) в виде степенного ряда

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k. \tag{42}$$

Перепишем уравнение (40) в виде

$$y''-2xy+\lambda y=0 \tag{43}$$

и подставим в это уравнение ряд (42):

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-2\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0.$$

После изменения индекса суммирования получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\big[(k+2)(k+1)a_{k+2}+(\lambda-2k)a_k\big]x^k=0.$$

В силу единственности разложения в степенной ряд получим

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(\lambda-2k)a_k=0,$$

откуда следует реккурентное соотношение

$$a_{k+2}=\frac{2k-\lambda}{(k+2)(k+1)}\,a_k,\quad k=0,1,\ldots \tag{44}$$

При любом λ имеем два линейно независимых решения

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k},\quad y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}.$$

При $\lambda=2n$ оба этих ряда обрываются и становятся многочленами степени n:

$$y(x)=H_n(x),\quad n=0,1,\ldots$$

Поскольку граничные условия (41) для многочленов выполнены, они и будут решениями задачи Штурма — Лиувилля (40), (41).

Для функций $H_n(x)$ имеет место дифференциальное представление

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{45}$$

Многочлены (45) называются ***многочленами Чебышева — Эрмита***.

Свойства многочленов Чебышева — Эрмита.

1. Для многочленов Чебышева — Эрмита справедливо реккурентное соотношение

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

2. Многочлены Чебышева — Эрмита различных степеней ортогональны на промежутке $(-\infty, \infty)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

3. Квадрат нормы многочленов Чебышева — Эрмита равен

$$\|H_n\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

4. Совокупность многочленов Чебышева — Эрмита исчерпывает все решения задачи Штурма — Лиувилля (40), (41).

5. Многочлен Чебышева — Эрмита $H_n(x)$ есть функция той же четности, что и n:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

6. Все корни многочлена Чебышева — Эрмита действительны и различны.

1.4.7. Уравнение Шредингера

Пусть дана задача Штурма — Лиувилля

$$\psi''(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{\mu\omega^2 x^2}{2}\right)\psi(x) = 0, \tag{46}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1. \tag{47}$$

Уравнение (46) называется ***уравнением Шредингера для гармонического осциллятора*** (осциллятор — колеблющаяся система).

Здесь $\psi(x)$ — волновая функция, характеризующая движение элементарной частицы, μ — масса частицы, ω — собственная частота колебаний, E — полная энергия, $\hbar$ — постоянная Планка. Требуется найти такие допустимые значения E, при которых возможны стационарные состояния элементарной частицы.

Введем новую переменную $z = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\hbar}}\,x$. Тогда $\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \dfrac{\omega\mu}{\hbar}\dfrac{d^2\psi}{dz^2}$ и уравнение (46) принимает вид

$$\frac{\omega\mu}{\hbar}\frac{d^2\psi}{dz^2} - \left(\frac{\omega\mu}{\hbar}\right)^2\frac{\hbar}{\omega\mu}\,z^2\psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\,\psi = 0$$

или после деления на $\dfrac{\omega\mu}{\hbar}$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - z^2\psi + \lambda\psi = 0, \quad \lambda = \frac{2E}{\omega\hbar}.$$

Сделаем замену $\psi(z) = y(z)e^{-\frac{z^2}{2}}$. Тогда

$$\frac{d\psi}{dz} = y'e^{-\frac{z^2}{2}} + y(-z)e^{-\frac{z^2}{2}} = (y' - zy)e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \frac{d^2\psi}{dz^2} = (y'' - y - zy')e^{-\frac{z^2}{2}} +$$
$$+ (y' - zy)(-z)e^{-\frac{z^2}{2}} = e^{-\frac{z^2}{2}}\big[y'' - 2zy' + (z^2 - 1)y\big].$$

В результате приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2z\frac{dy}{dz} + (\lambda - 1)y = 0,$$

совпадающему с уравнением (43), в котором вместо параметра λ фигурирует $\lambda - 1$. Его решениями являются собственные функции $y_n(z) = A_nH_n(z)$, соответствующие собственным значениям $\lambda_n = 2n + 1$. Следовательно, решениями уравнения (46) будут функции

$$\psi_n(x) = A_ne^{-\frac{\omega\mu}{2\hbar}x^2}H_n\!\left(\sqrt{\frac{\omega\mu}{\hbar}}\,x\right).$$

Определим постоянные A_n так, чтобы выполнялось условие (47):

$$A_n^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega\mu}{\hbar}x^2}H_n^2\!\left(\sqrt{\frac{\omega\mu}{\hbar}}\,x\right)dx = 1.$$

Выполним замену переменных $t = \sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\hbar}}\,x$. Тогда $dx = \sqrt{\dfrac{\hbar}{\omega\mu}}\,dt$ и условие нормировки запишется в виде

$$A_n^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n^2(t) \sqrt{\frac{\hbar}{\omega\mu}}\,dt = 1.$$

Отсюда с учетом формулы для квадрата нормы многочленов Чебышева — Эрмита получим

$$A_n = \left(\frac{\omega\mu}{\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из уравнения $\dfrac{2E}{\omega\hbar} = 2n + 1$ следует, что $E = E_n = \omega\hbar\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$.

Таким образом, окончательно находим собственные значения и собственные функции задачи (46), (47):

$$E_n = \omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\omega\mu}{\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega\mu}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega\mu}{\hbar}}\,x\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

1.5. Уравнения эллиптического типа

1.5.1. Постановки краевых задач для уравнений эллиптического типа

Простейшим представителем уравнений эллиптического типа является ***уравнение Лапласа***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

где x, y, z — прямоугольные декартовы координаты. Выражение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

называется ***оператором Лапласа***. Неоднородное уравнение вида

$$\Delta u = -f(x, y, z), \tag{2}$$

где $f(x, y, z)$ — заданная функция, называется ***уравнением Пуассона***.

Уравнения Лапласа и Пуассона описывают ***стационарные*** или ***установившиеся процессы***, т. е. процессы, не меняющиеся с течением времени.

Вид оператора Лапласа в левых частях равенств (1) и (2) при переходе к криволинейным координатам меняется. В цилиндрических координатах r, φ, z оператор имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

а в сферических координатах r, θ, φ

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Стационарное распределение температуры в однородной среде описывается уравнением Пуассона

$$\Delta u = -\frac{F(x, y, z)}{k}, \tag{3}$$

где $F(x, y, z)$ — плотность тепловых источников, $k = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности. Если среда неоднородна, то коэффициент теплопроводности зависит от точки (x, y, z), и вместо уравнения (3) получим уравнение

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -F(x, y, z), \tag{4}$$

где дифференциальный оператор можно записать в развернутом виде

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Сформулируем постановку краевых (граничных) задач на примере уравнения Пуассона. Пусть G — конечная область трехмерного пространства с границей Γ. Требуется найти непрерывное в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ решение уравнения

$$\Delta u = -f(P), \quad P = (x, y, z) \in G,$$

удовлетворяющее на границе Γ одному из краевых условий:

1) $u|_\Gamma = \mu_1(P)$ — первая краевая задача (задача Дирихле);

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = \mu_2(P)$ — вторая краевая задача (задача Неймана);

3) $\left.\left[\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h\big(u - \mu_3(P)\big)\right]\right|_\Gamma = 0$ — третья краевая задача.

Здесь $\mu_1(P)$, $\mu_2(P)$ и $\mu_3(P)$ — заданные на границе Γ функции, $h = \mathrm{const} > 0$, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к Γ.

Если область, в которой ищется решение уравнения, ограничена, то краевая задача называется ***внутренней***. Если же эта область является частью пространства, лежащей вне ограниченной области, то краевая задача называется ***внешней***.

Функция $u(P)$, непрерывная в области G вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, называется ***гармонической в области*** G.

1.5.2. Корректность задачи Дирихле. Фундаментальные решения уравнения Лапласа

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(P), \quad P \in G, \tag{5}$$

$$u|_\Gamma = \mu(P). \tag{6}$$

Будем предполагать, что функция $u(P)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

Теорема 1 (о корректности задачи Дирихле). *Если $\mu(P)$ — непрерывная функция, то решение задачи Дирихле (5), (6) единственно и непрерывно зависит от граничного условия (устойчиво относительно граничного условия).*

Доказательство. Пусть имеется два решения $u_1(P)$ и $u_2(P)$. Тогда их разность $v(P) = u_1(P) - u_2(P)$ будет решением однородной краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad P \in G, \\ v|_\Gamma = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $v(P)$ является гармонической в области G функцией, непрерывной в $\overline{G}$ и обращающейся в нуль на границе Γ. Тогда согласно принципу максимума, $v(P) \equiv 0$ во всей области $\overline{G}$. Действительно, если бы в некоторой точке $P \in G$ функция $v(P) > 0$ или $v(P) < 0$, то гармоническая функция имела бы строгий максимум или минимум внутри области G, что противоречит принципу максимума. Тем самым $u_1(P) \equiv u_2(P)$ и единственность решения установлена.

Наряду с задачей (5), (6) рассмотрим «возмущенную» задачу

$$\begin{cases} \Delta \widetilde{u} = -f(P), \quad P \in G, \\ \widetilde{u}|_\Gamma = \widetilde{\mu}(P), \end{cases}$$

где $\left|\mu(P) - \widetilde{\mu}(P)\right| \leqslant \varepsilon$, $P \in \Gamma$. Тогда разность $z(P) = u(P) - \widetilde{u}(P)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta z = 0, \quad P \in G, \\ z|_\Gamma = \mu(P) - \widetilde{\mu}(P). \end{cases}$$

В силу принципа максимума, $\left|z(P)\right| \leqslant \max\limits_{P\in\Gamma} \left|z(P)\right| \leqslant \varepsilon$ или

$$\left|u(P) - \widetilde{u}(P)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Найдем гармонические функции, обладающие цилиндрической или сферической симметрией, т. е. зависящие только от одной переменной r. Решение уравнения Лапласа, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим $u = -\dfrac{C_1}{r} + C_2$. Выбирая в качестве констант $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, получим

$$u = \frac{1}{r}. \tag{7}$$

Функция (7) называется ***фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве***. Эта функция удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$. С точностью до постоянного множителя она представляет собой потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом, помещенным в начало координат.

Решение уравнения Лапласа, обладающее цилиндрической симметрией, находится из уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{du}{dr}\right) = 0$$

и имеет вид $u = C_1 \ln r + C_2$. При $C_1 = -1$, $C_2 = 0$ получим ***фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости***

$$u = \ln\frac{1}{r}. \tag{8}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $r = 0$. С точностью до постоянного множителя она совпадает с потенциалом электростатического поля, создаваемого равномерно заряженной тонкой нитью.

1.5.3. Решение краевых задач для эллипитических уравнений в прямоугольнике

Пусть имеется задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $\Omega = \big\{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\big\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u\big|_{x=a} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \\ u\big|_{y=0} = \psi_1(x), \quad u\big|_{y=b} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases} \tag{9}$$

Решение задачи (9) следует искать в виде суммы $u(x,y) = v(x,y) + {}$ $+ w(x,y)$, где $v(x,y)$ и $w(x,y)$ суть решения краевых задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=a} = 0, \\ v\big|_{y=0} = \psi_1(x), \quad v\big|_{y=b} = \psi_2(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ w\big|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad w\big|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ w\big|_{y=0} = 0, \quad w\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

Каждая из этих задач решается методом разделения переменных с привлечением тригонометрических и гиперболических функций.

Пример 1. В прямоугольнике $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ найти решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = A \sin \dfrac{3\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} = Bx(a-x), \quad u|_{y=b} = 0, \quad A, B = \mathrm{const}. \end{cases}$$

Решение. По каждому из направлений x и y граничные условия на части границы являются неоднородными, поэтому будем искать функцию $u(x,y)$ в виде суммы $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$, где $v(x,y)$ и $w(x,y)$ — решения краевых задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=a} = 0, \\ v|_{y=0} = Bx(a-x), \quad v|_{y=b} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ w|_{x=0} = A \sin \dfrac{3\pi y}{b}, \quad w|_{x=a} = 0, \\ w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

соответственно. Для первой задачи возьмем $v(x,y) = X(x)Y(y)$. Подставляя в исходное уравнение и разделяя переменные, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

Заметим, что с плюсом берется та функция, по аргументу которой заданы однородные граничные условия. Подставим $v(x,y)$ в соответствующие равенства $v|_{x=0} = 0$, $v|_{x=a} = 0$:

$$X(0)Y(y) = 0,\ X(a)Y(y) = 0 \ \Rightarrow\ X(0) = 0,\ X(a) = 0.$$

В результате приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases}$$

Ее решениями будут собственные значения и собственные функции

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{a}, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для $Y(y)$ при найденных значениях λ_k имеем дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) = 0.$$

Дискриминант характеристического уравнения $\mu^2 - \left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2 = 0$ положителен, при этом корни равны $\mu_{1,2} = \pm\dfrac{k\pi}{a}$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид $e^{-\frac{k\pi y}{a}}$, $e^{\frac{k\pi y}{a}}$. Однако в данном случае удобнее в качестве фундаментальной системы взять гиперболическую функцию $\operatorname{sh}\dfrac{k\pi}{a}\,y$ и ее сдвиг $\operatorname{sh}\dfrac{k\pi}{a}\,(b-y)$. Тогда общее решение запишется в виде

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\,y + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y).$$

Перемножая $X_k(x)$ и $Y_k(x)$ и суммируя по всем k, получим ряд

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}\,y + B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{a}(b-y)\right]\sin\frac{k\pi x}{a},$$

сумма которого $v(x,y)$ является гармонической в Ω функцией, удовлетворяющей граничным условиям на боковых сторонах прямоугольника Ω. Потребуем, чтобы для функции $v(x,y)$ выполнялись граничные условия на верхнем и нижнем основаниях:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}\sin\frac{k\pi x}{a} = Bx(a-x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b}{a}\sin\frac{k\pi x}{a} = 0.$$

Из второго равенства следует, что $A_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Рассматривая первое равенство как разложение функции $\varphi(x) = Bx(a-x)$ на отрезке $[0,a]$ в ряд по собственным функциям $X_k(x)$, в котором коэффициентами Фурье будут числа $\varphi_k = B_k \operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}$, получим

$$B_k = \frac{2}{a\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\int_0^a Bx(a-x)\sin\frac{k\pi x}{a}\,dx = \frac{4Ba}{(k\pi)^2\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\int_0^a \sin\frac{k\pi x}{a}\,dx =$$

$$= \frac{4Ba^2}{(k\pi)^3\operatorname{sh}\dfrac{k\pi b}{a}}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{8Ba^2}{(2n+1)^3\pi^3\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Здесь при использовании формулы интегрирования по частям оба раза подстановки обратились в нуль.

Подставляя выражения для коэффициентов в ряд, будем иметь

$$v(x, y) = \frac{8Ba^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \dfrac{(2n+1)\pi}{a}(b-y)}{(2n+1)^3 \operatorname{sh} \dfrac{(2n+1)\pi b}{a}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}.$$

Аналогично решается краевая задача для функции $w(x, y)$. Полагая $w(x, y) = X(x)Y(y)$ и разделяя переменные, для $Y(y)$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^2 Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}$$

с решениями $\lambda_s = \dfrac{s\pi}{b}$, $Y_s(y) = \sin \dfrac{s\pi y}{b}$, $s = 1, 2, \ldots$ Дифференциальное уравнение $X_s'' - \left(\dfrac{s\pi}{b}\right)^2 X_s = 0$ имеет решения

$$X_s(x) = C_s \operatorname{sh} \frac{s\pi}{b} x + D_s \operatorname{sh} \frac{s\pi}{b}(a - x).$$

Составим ряд

$$w(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[C_s \operatorname{sh} \frac{s\pi}{b} x + D_s \operatorname{sh} \frac{s\pi}{b}(a - x) \right] \sin \frac{s\pi y}{b}$$

и подставим его в граничные условия при $x = 0$ и $x = a$:

$$\sum_{s=1}^{\infty} D_s \operatorname{sh} \frac{s\pi a}{b} \sin \frac{s\pi y}{b} = A \sin \frac{3\pi y}{b}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} C_s \operatorname{sh} \frac{s\pi a}{b} \sin \frac{s\pi y}{b} = 0.$$

Отсюда находим

$$C_s = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad D_3 = \frac{A}{\operatorname{sh} \dfrac{3\pi a}{b}}, \quad D_s = 0, \quad s \neq 3$$

(формулы для D_s получаются приравниванием коэффициентов при одинаковых собственных функциях). Таким образом, имеем

$$w(x, y) = \frac{A}{\operatorname{sh} \dfrac{3\pi a}{b}} \operatorname{sh} \frac{3\pi}{b}(a - x) \sin \frac{3\pi y}{b}.$$

Складывая функции $v(x,y)$ и $w(x,y)$, получим ответ

$$u(x,y)=\frac{8Ba^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi}{a}(b-y)}{(2n+1)^3\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}+$$
$$+\frac{A}{\operatorname{sh}\dfrac{3\pi a}{b}}\operatorname{sh}\frac{3\pi}{b}(a-x)\sin\frac{3\pi y}{b}.\ \blacktriangleleft$$

Пример 2. Решить краевую задачу в прямоугольнике:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0,\\ u\big|_{y=0}=A, \quad u\big|_{y=b}=Bx, \quad A,B=\text{const}.\end{cases}$$

Решение. Отметим, что на боковых сторонах прямоугольника $\Omega=$ $=\big\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\big\}$ граничные условия являются однородными, поэтому сразу будем искать нетривиальное решение в виде $u(x,y)=X(x)Y(y)$. После подстановки в дифференциальное уравнение и разделения переменных приходим к равенствам

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2.$$

Из граничных условий при $x=0$ и $x=a$ следует, что $X'(0)=0$, $X'(a)=0$. Присоединяя эти условия к дифференциальному уравнению для функции $X(x)$, получим задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases}X''+\lambda^2X=0,\\ X'(0)=X'(a)=0,\end{cases}$$

решениями которой являются

$$\lambda_k=\frac{k\pi}{a}, \quad k=0,1,\ldots, \quad X_k(x)=\cos\frac{k\pi x}{a}, \quad k=1,2,\ldots, \quad X_0(x)=1.$$

Запишем дифференциальное уравнение для функции $Y(y)$

$$Y_k''(y)-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2Y_k(y)=0.$$

При $k = 1, 2, \ldots,$ его общее решение имеет вид

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a}\, y + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a}\,(b - y),$$

а при $k = 0$ решением дифференциального уравнения $Y_0'' = 0$ будет линейная функция $Y_0(y) = A_0 y + B_0$. Тем самым построена гармоническая в области Ω функция

$$u(x, y) = A_0 y + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a}\, y + B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{a}\,(b - y) \right] \cos \frac{k\pi x}{a},$$

удовлетворяющая граничным условиям при $x = 0$, $x = a$.

Подставим ряд в граничное условие $u|_{y=0} = A$

$$B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} = A.$$

В силу ортогональности собственных функций $X_k(x) = \cos \dfrac{k\pi x}{a}$ с весом $\rho(x) = 1$ на отрезке $[0, a]$ из этого равенства следует, что

$$B_0 = A, \quad B_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Подставляя ряд в граничное условие $u|_{y=b} = Bx$, получим

$$A_0 b + A + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a} \cos \frac{k\pi x}{a} = Bx.$$

Отсюда находим коэффициенты A_k:

$$A_0 b + A = \frac{1}{\|X_0\|^2} \int_0^a Bx\, dx = \frac{1}{a} \frac{Ba^2}{2} = \frac{Ba}{2} \;\Rightarrow\; A_0 = \frac{Ba - 2A}{2b},$$

$$A_k = \frac{2}{a \operatorname{sh} \dfrac{k\pi b}{a}} \int_0^a Bx \cos \frac{k\pi x}{a}\, dx = -\frac{2B}{k\pi \operatorname{sh} \dfrac{k\pi b}{a}} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a}\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ -\dfrac{4Ba}{(2n+1)^2 \pi^2 \operatorname{sh} \dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}, & k = 2n + 1. \end{cases}$$

Окончательно приходим к решению краевой задачи

$$u(x,y)=\frac{Ba-2A}{2b}\,y+A-$$
$$-\frac{4Ba}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi}{a}\,y}{(2n+1)^2\operatorname{sh}\dfrac{(2n+1)\pi b}{a}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{a}. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти потенциал электростатического поля внутри области, ограниченной проводящими пластинами $x=0$, $y=0$ и $y=b$, если пластина $x=0$ заряжена до потенциала $A\left(1-\dfrac{y}{b}\right)$, $A=\mathrm{const}$, а пластины $y=0$ и $y=b$ заземлены. Электрические заряды внутри рассматриваемой области отсутствуют.

Решение. Данная текстовая задача эквивалентна краевой задаче в полуполосе $\Omega=\left\{0\leqslant x\leqslant\infty,\ 0\leqslant y\leqslant b\right\}$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<\infty, \quad 0<y<b,\\ u\big|_{x=0}=A\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \quad u\big|_{y=0}=0, \quad u\big|_{y=b}=0.\end{cases}$$

Полагая $u(x,y)=X(x)Y(y)$ и подставляя это выражение в уравнение, будем иметь

$$-\frac{X''}{X}=\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2.$$

Присоединим к уравнению для $Y(y)$ граничные условия $Y(0)=0$, $Y(b)=0$, являющиеся следствием краевых условий на верхнем и нижнем основаниях полуполосы Ω:

$$\begin{cases}Y''+\lambda^2Y=0,\\ Y(0)=Y(b)=0.\end{cases}$$

Решая эту задачу, находим собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля:

$$\lambda_k=\frac{k\pi}{b}, \quad Y_k(y)=\sin\frac{k\pi y}{b}, \quad k=1,2,\ldots$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение для функции $X(x)$

$$X_k''(x)-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2X_k(x)=0.$$

Выбирая в качестве фундаментальной системы решений стандартный набор функций $e^{-\frac{k\pi x}{b}}$, $e^{\frac{k\pi x}{b}}$, запишем общее решение в виде

$$X_k(x) = A_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{\frac{k\pi x}{b}}.$$

Перемножая $X_k(x)$ и $Y_k(x)$, получим частные решения

$$u_k(x,y) = \left(A_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} + B_k e^{\frac{k\pi x}{b}}\right)\sin\frac{k\pi y}{b},$$

удовлетворяющие соотношениям $u_k(x,0)=0$, $u_k(x,b)=0$. Из ограниченности функций $u_k(x,y)$ на бесконечности следует, что $B_k=0$.

Составим ряд

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k\pi x}{b}} \sin\frac{k\pi y}{b}$$

и подчиним его граничному условию при $x=0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi y}{b} = A\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Отсюда вытекают формулы для коэффициентов A_k:

$$A_k = \frac{2}{b}\int_0^b A\left(1-\frac{y}{b}\right)\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy = -\frac{2A}{k\pi b}\,(b-y)\cos\frac{k\pi y}{b}\bigg|_0^b = \frac{2A}{k\pi}.$$

Таким образом, в ответе получим

$$u(x,y) = \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,e^{-\frac{k\pi x}{b}}\sin\frac{k\pi y}{b}. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти стационарное распределение температуры в прямоугольной пластине $\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$, если стороны $x=a$ и $y=b$ покрыты тепловой изоляцией, стороны $x=0$ и $y=0$ поддерживаются при нулевой температуре, а в пластине выделяется тепло с плотностью $Q=\text{const}$.

Решение. Будем решать неоднородную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{Q}{K}, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

где K — коэффициент теплопроводности. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля по направлению x для соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(a) = 0. \end{cases}$$

Ее собственные функции $X_k(x) = \sin \dfrac{(2k+1)\pi x}{2a}$, $k = 0, 1, \ldots$ Будем искать решение в виде ряда Фурье

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a}.$$

Коэффициенты разложения $u_k(y)$ определим так, чтобы ряд удовлетворял уравнению и граничным условиям при $y = 0$ и $y = b$. Правую часть также разложим в ряд по собственным функциям

$$-\frac{Q}{K} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a},$$

где коэффициенты f_k вычисляются по формулам

$$f_k = \frac{2}{a} \int_0^a \left(-\frac{Q}{K}\right) \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a}\, dx = -\frac{4Q}{K(2k+1)\pi}.$$

Подставляя ряды в дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ u_k''(y) - \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right]^2 u_k(y) - f_k \right\} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2a} = 0.$$

Это соотношение будет выполнено, если все коэффициенты разложения равны нулю

$$u_k''(y) - \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right]^2 u_k(y) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Из граничных условий $u|_{y=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$ вытекают равенства

$$u_k(0) = 0, \quad u_k'(b) = 0.$$

В итоге приходим к семейству краевых задач для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функций $u_k(y)$. В качестве частного решения возьмем $\widetilde{u}_k(y) = C_k$. Подставляя в уравнение, с учетом значений f_k получим

$$\widetilde{u}_k(y) = \frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3}.$$

Тогда общее решение можно представить в виде суммы

$$u_k(y) = \frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3} + A_k \operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{2a}\, y + B_k \operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{2a}\,(b-y).$$

Из граничных условий следует, что

$$A_k = 0, \quad B_k = -\frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3 \operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}}.$$

Таким образом, для коэффициентов разложения имеем

$$u_k(y) = \frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi}{2a}\,(b-y)}{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}}\right].$$

Окончательно приходим к решению краевой задачи

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16a^2Q}{K(2k+1)^3\pi^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi}{2a}\,(b-y)}{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}. \blacktriangleleft$$

1.5.4. Метод разделения переменных для круговых и цилиндрических областей

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для круга:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{10}$$

$$u\big|_{r=a} = f(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{11}$$

Нетривиальные решение этой задачи будем искать методом разделения переменных, полагая

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{12}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (10) и разделяя переменные, получим

$$-\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\lambda^2.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ получим задачу на собственные значения

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda^2\Phi=0,\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi).\end{cases}\tag{13}$$

Задача (13) имеет нетривиальные периодические решения только при $\lambda=\lambda_n=n,\ \ n=0,1,\ldots$ Эти решения имеют вид

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Рассмотрим уравнение для радиальной функции при $n\geqslant 1:$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-n^2R=0.\tag{14}$$

Частные решения уравнения ищем в виде степенной функции $R(r)=r^p$. Для определения p получим соотношение

$$r^2p(p-1)r^{p-2}+rpr^{p-1}-n^2r^p=0,$$

откуда $p^2-n^2=0$ или $p=\pm\,n.$ Следовательно, уравнение (14) имеет два линейно независимых решения $R_n(r)=r^n$ и $R_n(r)=r^{-n}.$

Если $n=0,$ то уравнение (14) принимает вид

$$rR''+R'=0\quad\Rightarrow\quad R_0(r)=A_0+B_0\ln r.$$

Решение внутренней задачи Дирихле должно быть ограничено в центре круга при $r=0.$ Поэтому из найденных решений следует взять лишь $R_n(r)=r^n,\ \ n=0,1,\ldots$

Таким образом, в соответствии с равенством (12) частные решения уравнения (10) можно записать в виде

$$u_n(r,\varphi)=r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\qquad n=0,1,\ldots$$

В силу линейности и однородности уравнения (10) суперпозиция частных решений

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\tag{15}$$

также будет удовлетворять исходному уравнению. Выполняя граничные условия (11), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi). \tag{16}$$

Сравнивая (16) с разложением функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе функций, приходим к решению внутренней задачи Дирихле (10), (11):

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{17}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Замечание 1. Решение краевой задачи для уравнения (10) с граничным условием $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi)$ (задача Неймана) дается рядом

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + C, \tag{19}$$

где C — произвольная постоянная. Условием разрешимости задачи Неймана является равенство $\alpha_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0$.

Решение третьей краевой задачи с граничным условием $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=a} = f(\varphi)$ имеет вид

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+ah)a^{n-1}} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \tag{20}$$

При решении краевых задач для внешности круга вместо (15) следует использовать ряд $u(r,\varphi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$.

Для краевой задачи внутри кругового кольца $a < r < b$ гармоническая функция принимает вид

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Преобразуем найденное решение внутренней краевой задачи к более простому виду. Подставляя выражения для коэффициентов α_n и β_n в формулу (17) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi \, d\psi \cdot \cos n\varphi + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi \, d\psi \cdot \sin n\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \psi)\right] d\psi. \quad (21)$$

Найдем сумму ряда, стоящего в скобках. Обозначая через $t = \dfrac{r}{a}$, $\alpha = \varphi - \psi$, получим

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n e^{in\alpha}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \frac{te^{i\alpha}}{1 - te^{i\alpha}}\right) = \\ = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{1 + te^{i\alpha}}{1 - te^{i\alpha}}\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{1 - t^2 + 2it \sin\alpha}{1 + t^2 - 2t\cos\alpha}\right) = \\ = \frac{1 - t^2}{2(1 + t^2 - 2t\cos\alpha)}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и возвращаясь к переменным r, φ и ψ, приходим к равенству

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi)} \, d\psi. \quad (23)$$

Формула (23), дающая решение задачи Дирихле в круге $r < a$, называется ***интегралом Пуассона для круга***. При $r = a$ представление (23) теряет смысл. Но поскольку ряд (17), из которого получен интеграл Пуассона, является непрерывной функцией в замкнутом круге $r \leqslant a$, то $\lim\limits_{r\to a,\varphi\to\varphi_0} u(r,\varphi) = f(\varphi_0)$. Таким образом, функция, определяемая формулой

$$u(r,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi)}\,d\psi, & r < a, \\ f(\varphi), & r = a, \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ при $r < a$, непрерывна в замкнутом круге $r \leqslant a$ и принимает на границе $r = a$ заданные значения $f(\varphi)$.

Применение метода Фурье для решения эллиптических уравнений, описывающих стационарное распределение температуры в конечном цилиндре, требует использования цилиндрических функций Бесселя.

Рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры в круговом цилиндре радиусом l и высотой h, если температура нижнего основания и боковой поверхности равна нулю, а температура верхнего основания зависит только от расстояния точки до оси цилиндра:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \tag{24}$$

$$\bigl|u|_{r=0}\bigr| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \tag{25}$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \tag{26}$$

В соответствии с методом Фурье будем искать решение в виде произведения $u(r,z) = R(r)Z(z)$. Подставим его в уравнение и разделим переменные:

$$\frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.$$

С учетом граничных условий (25) относительно радиальной функции $R(r)$ получим задачу Штурма — Лиувилля в особой постановке

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0, \\ \bigl|R(0)\bigr| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Вводя новую переменную $x = \lambda r$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + R = 0,$$

общее решение которого записывается в виде $R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x)$, или

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Подставляя $R(r)$ в граничные условия и учитывая, что функция $N_0(r)$ не ограничена в точке $r = 0$, получим

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Обратимся к дифференциальному уравнению для функции $Z(z)$. С учетом найденных λ_k имеем

$$Z_k''(z) - \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 Z_k(z) = 0.$$

Решение этого уравнения запишем в виде линейной комбинации гиперболических функций

$$Z_k(z) = A_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k}{l} z + B_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{l} z.$$

Образуем ряд

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k}{l} z + B_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{l} z\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)$$

и подставим его в граничное условие $u|_{z=0} = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $A_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Из граничного условия на верхнем основании цилиндра находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k h}{l} J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = f(r).$$

Из последнего равенства вытекает формула для коэффициентов B_k:

$$B_k = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_k) \operatorname{sh} \dfrac{\mu_k h}{l}} \int_0^l r f(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr.$$

С учетом найденных значений коэффициентов окончательно приходим к ответу:

$$u(r,z)=\frac{2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k}{l}z}{J_1^2(\mu_k)\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k h}{l}}\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)\int\limits_0^l rf(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)dr.$$

Пример 5. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r=1}=A$, $u|_{r=2}=B\sin 2\varphi$, $A,B=\mathrm{const}$.

Решение. Имеем краевую задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \quad 1<r<2,\\ u|_{r=1}=A, \quad u|_{r=2}=B\sin 2\varphi.\end{cases}$$

Ее решение представляется рядом

$$u(r,\varphi)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\big(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\big)+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\big(C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi\big).$$

Подставим этот ряд в граничные условия:

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\big)+\sum_{n=1}^{\infty}\big(C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi\big)=A,$$

$$A_0+B_0\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\big(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\big)+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\big(C_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi\big)=B\sin 2\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, приходим к соотношениям:

$$A_0=A, \quad A_n+C_n=0, \quad B_n+D_n=0, \quad n=1,2,\ \ldots,$$

$$A_0+B_0\ln 2=0, \quad 2^nA_n+2^{-n}C_n=0, \quad n=1,2,\ \ldots,$$

$$4B_2+\frac{1}{4}\,D_2=B, \quad 2^nB_n+2^{-n}D_n=0, \quad n\neq 2.$$

Отсюда следует, что

$$A_0 = A, \quad B_0 = -\frac{A}{\ln 2}, \quad A_n = C_n = 0, \quad n = 1, 2, \ \ldots,$$
$$B_2 = \frac{4B}{15}, \quad D_2 = -\frac{4B}{15}, \quad B_n = D_n = 0, \quad n \neq 2.$$

Таким образом, гармоническая в кольце функция имеет вид

$$u(r, \varphi) = A - \frac{A \ln r}{\ln 2} + \frac{4B}{15}\Big(r^2 - \frac{1}{r^2}\Big) \sin 2\varphi. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в круговом секторе $0 < r < a$, $0 < \varphi < \alpha$, и удовлетворяющую граничным условиям $u|_{\varphi=0} = 0$, $u|_{\varphi=\alpha} = 0$, $u|_{r=a} = f(\varphi)$.

Решение. Краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad u|_{r=a} = f(\varphi), \end{cases}$$

будем решать методом Фурье, полагая $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставляя это решение в дифференциальное уравнение, разделяя переменные и используя граничные условия $u|_{\varphi=0} = 0$, $u|_{\varphi=\alpha} = 0$, приходим к задаче Штурма — Лиувилля для угловой функции $\Phi(\varphi)$

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\alpha) = 0, \end{cases}$$

и дифференциальному уравнению для функции $R(r)$

$$R''(r) + \frac{1}{r}\,R'(r) - \frac{1}{r^2}\,\lambda^2 R(r) = 0.$$

Общее решение уравнения для функции $\Phi(\varphi)$ имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A \cos \lambda\varphi + B \sin \lambda\varphi.$$

Из первого граничного условия находим, что $B = 0$. Подставляя решение во второе граничное условие, получим собственные значения $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{\alpha}$,

$n = 1, 2, \ldots$ Им соответствуют собственные функции $\Phi_n(\varphi) = A_n \sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}$, ортогональные с весом $\rho(\varphi) = 1$ на отрезке $[0, \alpha]$:

$$\int\limits_0^\alpha \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \left\|\sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}\right\|^2 = \dfrac{\alpha}{2}, & n = k. \end{cases}$$

Уравнение для радиальной функции

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda_n^2 R(r) = 0$$

при найденных собственных значениях λ_n с учетом условия ограниченности в центре круга $r = 0$ имеет решения $R_n(r) = r^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. Составляя произведения угловых и радиальных функций, получим набор частных решений вида $u_n(r, \varphi) = A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}$.

Образуем ряд

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}$$

и потребуем выполнения граничного условия при $r = a$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} = f(\varphi).$$

Отсюда вытекает соотношение для коэффициентов A_n:

$$A_n = \frac{2}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}} \int\limits_0^\alpha f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi.$$

Окончательно приходим к ответу

$$u(r, \varphi) = \frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} \int\limits_0^\alpha f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -r^2\cos 2\varphi, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Решение. Представим решение задачи в виде $u(r,\varphi) = v(r,\varphi) + w(r,\varphi)$, где $w(r,\varphi)$ — частное решение уравнения Пуассона. В качестве функции $w(r,\varphi)$ возьмем $w(r,\varphi) = W(r)\cos 2\varphi$. Тогда

$$W''(r)\cos 2\varphi + \frac{1}{r}\,W'(r)\cos 2\varphi - \frac{4}{r^2}\,W(r)\cos 2\varphi = -r^2\cos 2\varphi,$$

или

$$r^2W''(r) + rW'(r) - 4W(r) + r^4 = 0.$$

В итоге приходим к уравнению Эйлера, решение которого ищем в виде $W(r) = Cr^4$. Подставляя $W(r)$ в уравнение, находим

$$12Cr^4 + 4Cr^4 - 4Cr^4 + r^4 = 0 \;\Rightarrow\; C = -\frac{1}{12}.$$

Таким образом, частным решением неоднородного дифференциального уравнения будет функция $w(r,\varphi) = -\dfrac{1}{12}\,r^4\cos 2\varphi$.

Относительно функции $v(r,\varphi)$ необходимо решить краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \\ v|_{r=a} = \dfrac{a^4}{12}\,\cos 2\varphi. \end{cases}$$

Решение внутренней задачи Дирихле имеет вид

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\big(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\big).$$

Из граничного условия вытекает соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n\big(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\big) = \frac{a^4}{12}\,\cos 2\varphi,$$

откуда находим, что

$$B_n = 0, \quad n = 1,2,\ldots, \quad A_2 = \frac{a^2}{12}, \quad A_n = 0, \quad n \neq 2.$$

Следовательно, $v(r,\varphi) = \dfrac{a^2}{12}\,r^2\cos 2\varphi$, и решением исходной краевой задачи будет функция

$$u(r,\varphi) = \frac{a^2}{12}\,r^2\cos 2\varphi - \frac{1}{12}\,r^4\cos 2\varphi. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре $\Omega = \big\{(r, \varphi, z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, к нижнему основанию которого подводится постоянный тепловой поток q, а боковая поверхность и верхнее основание поддерживаются при нулевой температуре.

Решение. Сформулированная текстовая задача эквивалентна краевой задаче для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = -\dfrac{q}{K}, \quad K = \mathrm{const} > 0, \quad u|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

В соответствии с методом Фурье будем искать решение в виде произведения $u(r, z) = R(r)Z(z)$. Подставим его в уравнение и разделим переменные:

$$\frac{R'' + \dfrac{1}{r}\,R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.$$

С учетом граничных условий относительно радиальной функции $R(r)$ получим задачу Штурма — Лиувилля в особой постановке

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}\,R' + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R(l) = 0. \end{cases}$$

Вводя новую переменную $x = \lambda r$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dR}{dx} + R = 0,$$

общее решение которого записывается в виде $R(x) = C_1 J_0(x) + C_2 N_0(x)$ или

$$R(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Подставляя в граничные условия и учитывая, что функция $N_0(r)$ не ограничена в точке $r = 0$, получим

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\bigg(\frac{\mu_k r}{l}\bigg), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Отметим, что собственные функции $J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)$ образуют ортогональную с весом r на отрезке $[0, l]$ систему функций.

Обратимся к дифференциальному уравнению для функции $Z(z)$. С учетом найденных λ_k имеем

$$Z_k''(z) - \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 Z_k(z) = 0.$$

Решение этого уравнения удобно записать в виде линейной комбинации гиперболических функций

$$Z_k(z) = A_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}z + B_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h - z).$$

Образуем ряд

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}z + B_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h - z)\right] J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right)$$

и подставим его в граничное условие $u\big|_{z=h} = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh}\frac{\mu_k h}{l}\, J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = 0 \;\Rightarrow\; A_k = 0,\; k = 1, 2, \ldots$$

Из граничного условия на нижнем основании цилиндра имеем

$$-\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\mu_k}{l} \operatorname{ch}\frac{\mu_k h}{l}\, J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) = -\frac{q}{K}.$$

Отсюда вытекают формулы для коэффициентов B_k:

$$B_k = \frac{ql}{K\mu_k \operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}} \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_k)} \int_0^l r J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right) dr =$$

$$= \frac{2q}{lK\mu_k J_1^2(\mu_k) \operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}} \frac{l^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k} = \frac{2ql}{K\mu_k^2 J_1(\mu_k) \operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}}.$$

С учетом найденных значений коэффициентов окончательно приходим к ответу:

$$u(r, z) = \frac{2ql}{K}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_1(\mu_k) \operatorname{ch}\dfrac{\mu_k h}{l}} \operatorname{sh}\frac{\mu_k}{l}(h - z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right). \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре $\Omega = \big\{(r,\varphi,z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, если температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для тепла чехлом, а температура верхнего основания равна $u\big|_{z=h} = f(r)$. Рассмотреть частный случай, когда $f(r) = u_0 r^2$.

Решение. Необходимо решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad u\big|_{z=h} = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Подставляя произведение $u(r,z) = R(r)Z(z)$ в исходное уравнение и разделяя переменные, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно радиальной $R(r)$ и координатной $Z(z)$ функций

$$\frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.$$

Из граничного условия $\dfrac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=l} = 0$ следует, что $R'(l) = 0$. С учетом условия ограниченности на оси цилиндра $\big|R(0)\big| < \infty$ приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0, \\ \big|R(0)\big| < \infty, \quad R'(l) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции этой задачи имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}, \quad R_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где μ_k — неотрицательные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует собственная функция $R_0(r) = 1$, ортогональная с весом $\rho(r) = r$ функциям $J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{l}\right)$, $k = 1, 2, \dots,$ на отрезке $[0, l]$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение для функции $Z(z)$

$$Z_k''(z) - \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 Z_k(z) = 0.$$

При $k=0$ получим уравнение $Z_0''=0$, решением которого является многочлен первой степени

$$Z_0(z)=A_0z+B_0.$$

Для значений $k=1,2,\dots,$ общее решение можно записать в виде

$$Z_k(z)=A_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k}{l}z+B_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k}{l}(h-z).$$

Составим ряд из произведений $Z_k(z)$ на функции $R_k(r)$:

$$u(r,z)=A_0z+B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k}{l}z+B_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k}{l}(h-z)\Big]J_0\Big(\frac{\mu_kr}{l}\Big).$$

Подставляя его в граничные условия на нижнем и верхнем основаниях цилиндра, получим

$$B_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_kh}{l}\,J_0\left(\frac{\mu_kr}{l}\right)=0\ \Rightarrow\ B_k=0,\ k=0,1,\dots,$$

$$A_0h+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_kh}{l}\,J_0\left(\frac{\mu_kr}{l}\right)=f(r)\Rightarrow A_0=\frac{1}{h\|R_0(r)\|^2}\int\limits_0^l rf(r)\,dr=$$

$$=\frac{2}{hl^2}\int\limits_0^l rf(r)\,dr,\quad A_k=\frac{2}{l^2J_0^2(\mu_k)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_kh}{l}}\int\limits_0^l rf(r)J_0\left(\frac{\mu_kr}{l}\right)dr.$$

Таким образом, получим решение краевой задачи в виде ряда

$$u(r,z)=\frac{2z}{hl^2}\int\limits_0^l rf(r)\,dr+\frac{2}{l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_kz}{l}\,J_0\left(\dfrac{\mu_kr}{l}\right)}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_kh}{l}\,J_0^2(\mu_k)}\int\limits_0^l rf(r)J_0\left(\frac{\mu_kr}{l}\right)dr.$$

В частном случае, когда $f(r)=u_0r^2$, имеем

$$A_0=\frac{2u_0}{hl^2}\int\limits_0^l r^3dr=\frac{u_0l^2}{2h},\quad A_k=\frac{2u_0}{l^2J_0^2(\mu_k)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_kh}{l}}\int\limits_0^l r^3J_0\left(\frac{\mu_kr}{l}\right)dr=$$

$$=\frac{2u_0l^4\mu_k^{-4}}{l^2J_0^2(\mu_k)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_kh}{l}}\big[2\mu_k^2J_0(\mu_k)+(\mu_k^3-4\mu_k)J_1(\mu_k)\big]=\frac{4u_0l^2}{\mu_k^2J_0(\mu_k)\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\mu_kh}{l}}.$$

Окончательно приходим к ответу

$$u(r,z) = \frac{u_0 l^2 z}{2h} + 4u_0 l^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k z}{l}}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_k h}{l}\,\mu_k^2 J_0(\mu_k)}\, J_0\!\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. ◀

Пример 10. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре $\Omega = \big\{(r,\varphi,z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, если нижнее основание цилиндра имеет нулевую температуру, верхнее основание теплоизолировано, а температура боковой поверхности равна $u\big|_{r=l} = f(z)$. Рассмотреть частный случай, когда $f(z) = \dfrac{Az}{h}$, $A = \mathrm{const}$.

Решение. В данной ситуации имеем дело с краевой задачей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u\big|_{r=0}\big| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = f(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

Полагая $u(r,z) = R(r)Z(z)$ и разделяя переменные, получим

$$-\frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} = \frac{Z''}{Z} = -\lambda^2.$$

Здесь необходимо рассмотреть задачу Штурма — Лиувилля для координатной функции $Z(z)$

$$\begin{cases} Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad 0 < z < h, \\ Z(0) = 0, \quad Z'(h) = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2h}, \quad Z_k(z) = \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

В свою очередь, для радиальной функции $R(r)$ приходим к дифференциальному уравнению

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \lambda^2 R = 0,$$

которое с помощью замены $x = \lambda r$ приводится к виду

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - R = 0.$$

Решение этого уравнения можно представить как линейную комбинацию линейно независимых частных решений

$$R(x) = AI_0(x) + BK_0(x),$$

где $I_0(x) = J_0(ix)$ — цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка от чисто мнимого аргумента, $K_0(x)$ — функция Макдональда, причем $I_0(0) = 1$, $K_0(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Возвращаясь к переменной r и учитывая найденные значения λ_k, получим

$$R_k(r) = A_k I_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\right] + B_k K_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\right].$$

Таким образом, построены частные решения

$$u_k(r,z) = \left\{A_k I_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\right] + B_k K_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\right]\right\} \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h},$$

удовлетворяющие однородным граничным условиям на нижнем и верхнем основаниях цилиндра. Из условия $\left|u_k(0,z)\right| < \infty$ и неограниченности функции Макдональда в окрестности точки $r = 0$ сразу следует, что $B_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$

Составим ряд

$$u(r,z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k I_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}$$

и потребуем выполнения граничного условия на боковой поверхности цилиндра

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k I_0\left[\frac{(2k+1)\pi l}{2h}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h} = f(z).$$

Последнее соотношение представляет собой разложение заданной функции $f(z)$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\{Z_k(z)\}$ на отрезке $[0,h]$, причем $\|Z_k\|^2 = \dfrac{h}{2}$. Коэффициенты A_k вычисляются по формулам

$$A_k = \frac{2}{hI_0\left[\dfrac{(2k+1)\pi l}{2h}\right]} \int\limits_0^h f(z) \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\, dz, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Окончательно будем иметь

$$u(r,z)=\frac{2}{h}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^h f(z)\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\,dz}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi l}{2h}\right]}I_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}.$$

Рассмотрим частный случай, когда $f(z)=\dfrac{Az}{h}$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_0^h\frac{Az}{h}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\,dz=-\frac{2A}{(2k+1)\pi}\int\limits_0^h z\,d\left[\cos\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\right]=$$

$$=\frac{4Ah}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\bigg|_0^h=\frac{4Ah(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Таким образом, решение запишется в виде

$$u(r,z)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\,\frac{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi r}{2h}\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi l}{2h}\right]}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}.\ ◀$$

1.5.5. Решение краевых задач для шаровых областей

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре радиусом a с центром в начале координат:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\qquad(27)$$

$$u|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\qquad(28)$$

Следуя схеме метода Фурье, ищем решение уравнения (27) в виде

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi).$$

Подставляя это решение в (27) и разделяя переменные, получим уравнение в частных производных

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0\qquad(29)$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0. \tag{30}$$

Подробнее остановимся на уравнении (29). Потребуем, чтобы функция $Y(\theta, \varphi)$ была ограниченной в области $0 \leqslant r \leqslant a$ и удовлетворяла условию периодичности по переменной φ: $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$. Полагая $Y(\theta, \varphi) = \Phi(\varphi) W(\theta)$, получим

$$-\frac{\sin\theta \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \dfrac{dW}{d\theta}\right) + \lambda \sin^2\theta \, W}{W} = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\mu^2. \tag{31}$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ с учетом условия периодичности приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Нетривиальными решениями этой задачи при $\mu = m$ являются функции $\Phi_m(\varphi) = \cos m\varphi$, $m = 0, 1, \ldots$, и $\Phi_m(\varphi) = \sin m\varphi$, $m = 1, 2, \ldots$

Второе из уравнений (31) запишется в виде

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dW}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) W = 0. \tag{32}$$

Присоединим к уравнению (32) условия ограниченности

$$\bigl|W(0)\bigr| < \infty, \quad \bigl|W(\pi)\bigr| < \infty. \tag{33}$$

Сделаем замену переменных $x = \cos\theta$. Тогда $\dfrac{dW}{d\theta} = -\sin\theta \dfrac{dW}{dx}$ и уравнение принимает вид

$$-\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta \frac{dW}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) W = 0$$

или с учетом равенства $\sin^2\theta = 1 - x^2$

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dW}{dx}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] W = 0. \tag{34}$$

При этом граничные условия преобразуются к виду

$$\bigl|W(-1)\bigr| < \infty, \quad \bigl|W(1)\bigr| < \infty. \tag{35}$$

Краевая задача (34), (35) представляет собой задачу Штурма — Лиувилля для присоединенных функций Лежандра. Ее ограниченные при $\lambda_n = n(n+1)$ решения записываются в виде

$$W_n(x) = Z_n^{(m)}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x),$$

где $P_n^{(m)}(x)$ — производная m-го порядка от многочлена Лежандра $P_n(x)$.

Возвращаясь к переменной θ, находим собственные функции задачи (34), (35):

$$W_n(\theta) = Z_n^{(m)}(\cos\theta), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = \overline{0, n}. \tag{36}$$

Таким образом, для каждого значения n найдены $n+1$ решений уравнения (32): $Z_n^{(0)}(\cos\theta), Z_n^{(1)}(\cos\theta), \ldots, Z_n^{(n)}(\cos\theta)$.

Составляя произведения функций (36) на функции $\Phi_m(\varphi)$, получим множество решений уравнения (29):

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = Z_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi) = Z_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi,$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad m = \overline{0, n}. \tag{37}$$

Эти решения называются ***сферическими функциями***. Они обладают свойством ортогональности на поверхности сферы:

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin\theta\, Y_{n_1}^{(m_1)}(\theta,\varphi) Y_{n_2}^{(m_2)}(\theta,\varphi)\, d\varphi\, d\theta = 0, \quad n_1 \neq n_2 \text{ или } m_1 \neq m_2.$$

Приведем явный вид некоторых сферических функций:

$$Y_0^{(0)}(\theta,\varphi) = 1, \quad Y_1^{(0)}(\theta,\varphi) = \cos\theta, \quad Y_1^{(1)}(\theta,\varphi) = \sin\theta\,\cos\varphi,$$

$$Y_1^{(-1)}(\theta,\varphi) = \sin\theta\,\sin\varphi, \quad Y_2^{(0)}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right),$$

$$Y_2^{(1)}(\theta,\varphi) = 3\sin\theta\,\cos\theta\,\cos\varphi, \quad Y_2^{(-1)}(\theta,\varphi) = 3\sin\theta\,\cos\theta\,\sin\varphi,$$

$$Y_2^{(2)}(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\,\cos 2\varphi, \quad Y_2^{(-2)}(\theta,\varphi) = 3\sin^2\theta\,\sin 2\varphi,$$

и при любом n имеем

$$Y_n^{(n)}(\theta,\varphi) = C_n\sin^n\theta\,\cos n\varphi, \quad Y_n^{(-n)}(\theta,\varphi) = C_n\sin^n\theta\,\sin n\varphi,$$

где C_n — некоторая константа.

Перейдем к дифференциальному уравнению (30). Его решение имеет вид степенной функции $R(r) = r^p$. После подстановки имеем

$$p(p-1)r^p + 2pr^p - n(n+1)r^p = 0$$

или

$$p^2 + p - n(n+1) = 0.$$

Отсюда находим, что $p_1 = n$, $p_2 = -(n+1)$ и, следовательно,

$$R_n(r) = r^n, \quad R_n(r) = r^{-(n+1)}.$$

Таким образом, получены частные решения уравнения (27):

$$u_n(r,\theta,\varphi) = r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \quad u_n(r,\theta,\varphi) = r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$
$$n = 0, 1, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n.$$

Поскольку рассматривается внутренняя краевая задача, то ее решение ищем в виде ряда с неопределенными коэффициентами

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} r^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi). \tag{38}$$

Для нахождения A_{nm} используем граничное условие (28):

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} a^n Y_n^{(m)}(\theta,\varphi). \tag{39}$$

Соотношение (39) представляет собой разложение заданной функции $f(\theta,\varphi)$ в ряд Фурье по сферическим функциям $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$.

Коэффициенты разложения A_{nm} вычисляются по формулам

$$A_{nm} = \frac{1}{a^n \left\| Y_n^{(m)} \right\|^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta\, f(\theta,\varphi) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)\, d\varphi\, d\theta, \tag{40}$$

где

$$\left\| Y_n^{(m)} \right\|^2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \left[Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) \right]^2 d\varphi\, d\theta.$$

Если $m = 0$, то последнее выражение равно $\left\| Y_n^{(m)} \right\|^2 = \dfrac{4\pi}{2n+1}$. При $|m| \geqslant 1$, то справедлива формула

$$\left\| Y_n^{(m)} \right\|^2 = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле для шара (27), (28) дается формулой (38), в которой коэффициенты A_{nm} вычисляются согласно (40).

Замечание 2. На практике в качестве функций $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ в равенстве (38) берутся только те функции, которые присутствуют в разложении $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям.

Замечание 3. При решении внешней задачи Дирихле, как и других внешних краевых задач, вместо соотношения (38) необходимо использовать ряд

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} B_{nm} r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi).$$

Функцию, гармоническую в шаровом слое $a < r < b$ и принимающую заданные значения на границе слоя, следует искать в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-(n+1)}\right] Y_n^{(m)}(\theta, \varphi).$$

Пример 11. Найти функцию, гармоническую внутри шара радиусом a и такую, что $u|_{r=a} = \cos 2\theta$.

Решение. Поскольку граничное условие не зависит от переменной φ, то решение задачи также не зависит от φ, т. е. $u = u(r, \theta)$. В этом случае необходимо рассмотреть краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u|_{r=a} = \cos 2\theta. \end{cases}$$

Полагая $u(r, \theta) = R(r)W(\theta)$, после подстановки в уравнение и разделения переменных, получим

$$-\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR}{dr}\right)}{R} = \frac{\dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \dfrac{dW}{d\theta}\right)}{W} = -\lambda,$$

причем дифференциальное уравнение для функции $W(\theta)$ решается при условиях ограниченности в области $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Таким образом, для $W(\theta)$ приходим к краевой задаче

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \dfrac{dW}{d\theta}\right) + \lambda W = 0, \\ \left|W(0)\right| < \infty, \quad \left|W(\pi)\right| < \infty. \end{cases}$$

Введем новую независимую переменную $x = \cos\theta$. Тогда отрезок $[0, \pi]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, $\dfrac{d}{d\theta} = -\sin\theta\,\dfrac{d}{dx}$, и уравнение принимает вид

$$\frac{1}{\sin\theta}(-\sin\theta)\frac{d}{dx}\left[\sin\theta(-\sin\theta)\frac{dW}{dx}\right] + \lambda W = 0,$$

или с учетом равенства $\sin^2\theta = 1 - x^2$

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dW}{dx}\right] + \lambda W = 0.$$

Граничные условия преобразуются к виду

$$\bigl|W(-1)\bigr| < \infty, \quad \bigl|W(1)\bigr| < \infty.$$

Полученное дифференциальное уравнение и краевые условия составляют задачу Штурма — Лиувилля для уравнения Лежандра. Ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ решения этой задачи существуют только при $\lambda = n(n+1)$ и имеют вид

$$W_n(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Приведем явный вид некоторых многочленов $P_n(x)$:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1),$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}\,(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Многочлены Лежандра образуют ортогональную с весом $\rho(x) = 1$ систему функций на отрезке $[-1, 1]$:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m, \quad \|P_n\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Возвращаясь к переменной θ, находим собственные значения и собственные функции:

$$\lambda_n = n(n+1), \quad W_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Перейдем к задаче для радиальной функции $R(r)$, которую можно записать в виде

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0.$$

Это дифференциальное уравнение имеет два набора нетривиальных решений: $R_n(r) = r^n$ и $R_n(r) = r^{-(n+1)}$.

Перемножая функции $R_n(r)$ и $W_n(\theta)$, получим частные решения уравнения Лапласа

$$u_n(r,\theta) = \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(\cos\theta)$ — многочлены Лежандра. Поскольку рассматривается внутренняя задача Дирихле, то гармоническую внутри шара функцию необходимо искать в виде

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta).$$

Подставим ряд в граничное условие и воспользуемся тригонометрической формулой двойного аргумента:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

Правая часть этого равенства представляет собой линейную комбинацию многочленов Лежандра $P_0(\cos\theta)$ и $P_2(\cos\theta)$:

$$2\cos^2\theta - 1 = C_1 P_0(\cos\theta) + C_2 P_2(\cos\theta) = C_1 + \frac{C_2}{2}(3\cos^2\theta - 1).$$

Отсюда вытекает, что $C_1 = -\dfrac{1}{3}$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$. Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta) = -\frac{1}{3}\,P_0(\cos\theta) + \frac{4}{3}\,P_2(\cos\theta).$$

Учитывая свойство ортогональности многочленов Лежандра, приравняем коэффициенты при одинаковых собственных функциях:

$$A_0 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = \frac{4}{3a^2}, \quad A_n = 0, \quad n \neq 0, \quad n \neq 2.$$

Окончательно гармоническая внутри шара функция имеет вид

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3a^2}\,r^2 P_2(\cos\theta). \blacktriangleleft$$

Пример 12. Найти функцию, гармоническую вне единичного шара и такую, что $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta$.

Решение. Рассмотрим внешнюю краевую задачу

$$\begin{cases}\Delta u = 0, \quad r > 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta,\end{cases}$$

где оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Ее решение записывается в виде ряда

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_{nm} r^{-(n+1)} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Подставляя ряд в граничное условие, получим

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n+1)B_{nm}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta.$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\sin\theta\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,Y_1^{(1)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,Y_1^{(-1)}.$$

Следовательно, только коэффициенты $B_{1,1}$ и $B_{1,-1}$ будут отличны от нуля. Имеем

$$-2B_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -2B_{1,-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad B_{1,1} = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad B_{1,-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Таким образом,

$$u(r,\theta,\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,r^{-2}Y_1^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,r^{-2}Y_1^{(-1)} = -\frac{1}{2}\,r^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta.$$

Окончательно получим, что искомая гармоническая вне единичного шара функция имеет вид

$$u(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{2}\,r^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\sin\theta + C,$$

где C — произвольная постоянная. ◀

Пример 13. Найти решение краевой задачи в шаровом слое

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = 3\sin 2\varphi \, \sin^2\theta, \quad u|_{r=2} = 3\cos\theta. \end{cases}$$

Решение. Общий вид гармонической в шаровом слое функции дается рядом

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-(n+1)}\right] Y_n^{(m)}(\theta,\varphi).$$

Поскольку

$$3\sin 2\varphi \, \sin^2\theta = Y_2^{(-2)}(\theta,\varphi), \quad \cos\theta = Y_1^{(0)}(\theta,\varphi),$$

то все коэффициенты, кроме $A_{2,-2}, B_{2,-2}, A_{1,0}, B_{1,0}$, будут равны нулю. Решая две системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_{2,-2} + B_{2,-2} = 1, \\ 4A_{2,-2} + \dfrac{1}{8}\, B_{2,-2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_{1,0} + B_{1,0} = 0, \\ 2A_{1,0} + \dfrac{1}{4}\, B_{1,0} = 3, \end{cases}$$

являющиеся результатом подстановки ряда в граничные условия, находим

$$A_{2,-2} = -\frac{1}{31}, \quad B_{2,-2} = \frac{32}{31}, \quad A_{1,0} = \frac{12}{7}, \quad B_{1,0} = -\frac{12}{7}.$$

В итоге приходим к ответу

$$u(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{12}{7}\, r - \frac{12}{7}\, r^{-2}\right)\cos\theta + \left(\frac{96}{31}\, r^{-3} - \frac{3}{31}\, r^2\right)\sin 2\varphi \, \sin^2\theta. \blacktriangleleft$$

1.5.6. Уравнение Гельмгольца

Уравнение вида

$$\Delta v + \lambda v = -f(x,y,z), \quad \lambda \neq 0, \tag{41}$$

называется ***уравнением Гельмгольца***. Уравнение Гельмгольца играет важную роль в математической физике ввиду значимости задач, приводящих к этому уравнению.

Установим связь уравнения Гельмгольца с уравнениями гиперболического и параболического типов. Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,y,z) e^{i\omega t} \tag{42}$$

и будем искать специальные решения этого уравнения, имеющие ту же частоту колебаний, что и внешние силы, т. е. решения вида

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z)e^{i\omega t},$$

где $v(x, y, z)$ — амплитуда установившихся колебаний. Подставляя u в уравнение (42), получим

$$-\omega^2 v e^{i\omega t} = a^2 \Delta v e^{i\omega t} + f(x, y, z)e^{i\omega t},$$

откуда следует, что

$$\Delta v + \frac{\omega^2}{a^2}\, v = -\frac{1}{a^2}\, f(x, y, z).$$

В итоге имеем уравнение Гельмгольца с положительным коэффициентом $\lambda = \dfrac{\omega^2}{a^2}$. Таким образом, решение уравнения Гельмгольца при положительном λ есть ***амплитуда установившихся колебаний***.

Пусть теперь дано уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t),$$

в котором функция $u(x, y, z, t)$ имеет смысл концентрации вещества, а функция $f(x, y, z, t)$ есть плотность источников диффузии. Если рассматривать процессы диффузии, сопровождающиеся распадом молекул газа, то при формулировке уравнения диффузии это эквивалентно наличию отрицательных источников: $f(x, y, z, t) = ku(x, y, z, t)$, $k < 0$.

В случае стационарного диффузионного процесса приходим к уравнению Гельмгольца с отрицательным коэффициентом

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \lambda = \frac{k}{a^2} < 0.$$

Таким образом, уравнение (41) с отрицательным λ описывает стационарный процесс диффузии, сопровождаемый распадом вещества.

Рассмотрим решения уравнения Гельмгольца, обладающие сферической симметрией. Соответствующее уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) + \lambda u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{r}\frac{d^2(ru)}{dr^2} + \lambda u = 0.$$

Введем новую переменную, полагая $u = \dfrac{w}{r}$. Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \lambda w = 0.$$

При $\lambda = -k^2 < 0$ это уравнение имеет два линейно-независимых решения $w = e^{-kr}$ и $w = e^{kr}$. Соответствующие фундаментальные решения уравнения Гельмгольца принимают вид

$$u_1(r) = \frac{e^{-kr}}{r}, \quad u_2(r) = \frac{e^{kr}}{r}.$$

В окрестности точки $r = 0$ оба решения ведут себя эквивалентным образом, т. е. обращаются в бесконечность. При $r \to \infty$ решение $u_1(r)$ экспоненциально стремится к нулю и в терминах диффузионного процесса имеет смысл концентрации вещества, возникшей за счет источника диффузии в точке $r = 0$. Второе решение $u_2(r)$ экспоненциально возрастает и его можно интерпретировать как концентрацию вещества, возникшую за счет источника на бесконечности.

Случай $\lambda = k^2 > 0$ соответствует установившимся волновым процессам. Тогда $w = e^{-ikr}$ и $w = e^{ikr}$ и фундаментальные решения уравнения Гельмгольца имеют вид

$$u_1(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad u_2(r) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Амплитуде $u_1(r)$ соответствует установившееся колебание

$$u(r,t) = u_1(r)e^{i\omega t} = \frac{1}{r}\, e^{i(\omega t - kr)},$$

которое представляет собой сферическую волну, расходящуюся от источника в точке $r = 0$. Амплитуде $u_2(r)$ соответствует установившееся колебание

$$u(r,t) = u_2(r)e^{i\omega t} = \frac{1}{r}\, e^{i(\omega t + kr)},$$

которое определяет сферическую волну, сходящуюся из бесконечности в точку $r = 0$.

Свойства решения уравнения (41) существенно зависят от знака коэффициента λ. Рассмотрим задачу Дирихле для однородного уравнения (41):

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad P = (x, y, z) \in G, \\ u|_{\Gamma} = \mu(P), \end{cases} \tag{43}$$

где $\overline{G} = G \cup \Gamma$ — ограниченная область с границей Γ.

Теорема 2 (принцип максимума для уравнения Гельмгольца). *При $\lambda < 0$ для решения задачи (43) справедлив принцип максимума, т. е. решение $u(P)$ не может достигать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения во внутренних точках области $\overline{G}$.*

Следствие 3. *Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца*

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = -f(P), \quad P \in G, \quad \lambda < 0, \\ u|_\Gamma = \mu(P), \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Заметим, что в случае $\lambda = 0$ имеем задачу Дирихле для уравнения Пуассона, единственность которой ранее была доказана. При $\lambda > 0$ задача Дирихле для уравнения Гельмгольца не обладает свойством единственности. Рассмотрим, например, краевую задачу в прямоугольнике

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{44}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{45}$$

где Γ — граница прямоугольника. Будем решать эту задачу методом разделения переменных. Ищем решение в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставляя его в (44) и разделяя переменные, получим

$$-\frac{X'' + \lambda X}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\mu^2.$$

Подставим теперь решение в граничные условия (45):

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0. \tag{46}$$

Присоединяя вторую пару условий (46) к соответствующему дифференциальному уравнению для координатной функции $Y(y)$, приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} Y'' + \mu^2 Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Решениями этой задачи являются

$$\mu_k = \frac{k\pi}{b}, \quad Y_k(y) = \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Далее, присоединяя первую пару граничных условий (46) к дифференциальному уравнению для функции $X(x)$, получим задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + (\lambda - \mu_k^2)X = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases}$$

Как мы знаем, нетривиальные решения этой задачи существуют только при $\lambda - \mu_k^2 > 0$. Они имеют вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda - \mu_k^2}\, x + C_2 \sin \sqrt{\lambda - \mu_k^2}\, x.$$

Из граничных условий следует, что $C_1 = 0$, $C_2 \sin \sqrt{\lambda - \mu_k^2}\, a = 0$. Полагая $C_2 = 1$, получим

$$\sqrt{\lambda - \mu_k^2} = \frac{n\pi}{a} \;\Rightarrow\; \lambda_k^{(n)} = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad k, n = 1, 2, \ldots$$

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, окончательно получим решение задачи (44), (45):

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad u_k^{(n)}(x, y) = \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad k, n = 1, 2, \ldots$$

Вторым решением задачи является тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$, т. е. при $\lambda > 0$ задача Дирихле для уравнения Гельмгольца действительно не обладает свойством единственности.

1.5.7. Об особенностях решения краевых задач для уравнение Гельмгольца

Рассмотрим внутреннюю краевую задачу для шара $r \leqslant a$, решение которой обладает сферической симметрией:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{du}{dr} + k^2 u = 0, \quad r < a, \\ u|_{r=a} = A, \quad A = \mathrm{const} \neq 0. \end{cases} \tag{47}$$

Общее решение уравнения Гельмгольца (47) имеет вид

$$u(r) = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r},$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные. Для того чтобы решение задачи было ограниченным в точке $r = 0$, необходимо положить

$C_2 = -C_1$ (это условие является и достаточным). Следовательно, общее решение можно записать в виде

$$u(r) = \frac{C_1}{r}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right), \tag{48}$$

где константа C_1 определяется из граничного условия.

Рассмотрим случай действительных значений k. Тогда

$$u(r) = B\,\frac{\sin(kr)}{r}, \quad B = 2iC_1. \tag{49}$$

Подставляя в граничное условие, получим, что постоянная B должна удовлетворять соотношению

$$B\,\frac{\sin(ka)}{a} = A. \tag{50}$$

Это возможно, если значения k не являются корнями уравнения

$$\sin(ka) = 0. \tag{51}$$

В тоже время для $k_n = \dfrac{n\pi}{a}$, $k = 1, 2, \ldots$, равенство (51) будет выполнено и, следовательно, при $A \neq 0$ не существует чисел B, удовлетворяющих соотношению (50).

Наряду с задачей (47) рассмотрим соответствующую ей однородную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\,\dfrac{du}{dr} + k^2u = 0, \quad r < a, \\ u\big|_{r=a} = 0. \end{cases} \tag{52}$$

При значениях k, удовлетворяющих условию (51), она имеет ненулевые решения $B_1\dfrac{\sin(k_1r)}{r}, B_2\dfrac{\sin(k_2r)}{r}, \ldots$, где $B_1, B_2, \ldots$ — произвольные комплексные числа. При всех других значениях k из формулы (50) следует, что $B = 0$, т. е. однородная задача (52) имеет только тривиальное решение $u(r) \equiv 0$.

Таким образом, приходим к следующей альтернативе: либо однородная задача (52) при данном значении k не имеет решений, отличных от тривиального, и тогда неоднородная задача (47) имеет единственное решение, определяемое формулами (49), (50), либо однородная задача (52) имеет нетривиальное решение, и тогда неоднородная задача (47) неразрешима.

Функции

$$u_n(r) = \frac{\sin(k_nr)}{r}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

являющиеся нетривиальными решениями краевой задачи (52), называются ***собственными функциями задачи (47)***, а числа k_n^2, при которых задача (52) имеет нетривиальные решения, — ***собственными значениями задачи (47)***.

1.5.8. Метод Фурье для уравнения Гельмгольца в полярных и сферических координатах

Пусть дана задача Неймана для уравнения Гельмгольца в круге

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \tag{53}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi). \tag{54}$$

Предполагается, что число k не является собственным значением однородной краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0.$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения (53) в виде произведения $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, учитывая ограниченность в точке $r = 0$ радиальной функции и 2π-периодичность угловой функции. Подставим $u(r,\varphi)$ в уравнение (53) и разделим переменные:

$$-\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + k^2 r^2 R}{R} = \frac{\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} = -\lambda^2.$$

Присоединяя к дифференциальному уравнению для угловой функции $\Phi(\varphi)$ условие 2π-периодичности, приходим к задаче Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu^2\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Нетривиальные решения этой задачи имеют вид

$$\lambda_n = n, \quad \Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Для радиальной функции получим уравнение

$$r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - n^2)R = 0.$$

Его линейно независимыми решениями являются

$$R_n(r) = J_n(kr), \quad R_n(r) = N_n(kr), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $J_n(x)$ и $N_n(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Вебера — Неймана соответственно. Поскольку рассматривается внутренняя краевая задача, то для выполнения условия ограниченности в окрестности точки $r = 0$ необходимо взять только функции $R_n(r) = J_n(kr)$.

Таким образом, получены частные решения уравнения Гельмгольца

$$u_n(r, \varphi) = J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Запишем искомое решение в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(kr)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \tag{55}$$

и потребуем выполнения граничного условия (54):

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} kJ_n'(ka)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Рассматривая последнее равенство как разложение заданной функции $f(\varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье, приходим к выражениям для коэффициентов A_n и B_n:

$$\begin{gathered} A_0 = \frac{1}{2\pi k J_0'(ka)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi k J_n'(ka)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \\ B_n = \frac{1}{\pi k J_n'(ka)} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{56}$$

Формулы (55), (56) дают решение внутренней задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в круге.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в шаре

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \end{cases} \tag{57}$$

по-прежнему считая, что число k не является собственным значением соответствующей краевой задачи с однородным граничным условием.

Запишем исходное дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0.$$

Полагая $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$, после разделения переменных получим два дифференциальных уравнения:

$$-\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)+k^2r^2R}{R}=\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\,\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\,\dfrac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y}=-\lambda.$$

Решая уравнение для функции $Y(\theta,\varphi)$ при условиях ограниченности по θ и 2π-периодичности по φ, приходим к сферическим функциям при $\lambda_n=n(n+1)$:

$$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)=Z_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi,\quad Y_n^{(-m)}(\theta,\varphi)=Z_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi,$$
$$n=0,1,\ldots,\quad m=\overline{0,n}.$$

Относительно радиальной функции имеем дифференциальное уравнение

$$R''+\frac{2}{r}\,R'+\left[k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]R=0.$$

Введем новую функцию $W(r)=\sqrt{r}R(r)$. Тогда

$$R'=\left(Wr^{-1/2}\right)'=W'r^{-1/2}-\frac{1}{2}\,Wr^{-3/2},\quad R''=W''r^{-1/2}-\frac{1}{2}\,W'r^{-3/2}-$$
$$-\frac{1}{2}\,W'r^{-3/2}+\frac{3}{4}\,Wr^{-5/2}=W''r^{-1/2}-W'r^{-3/2}+\frac{3}{4}\,Wr^{-5/2}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получим

$$W''r^{-1/2}-W'r^{-3/2}+\frac{3}{4}\,Wr^{-5/2}+\frac{2}{r}\left(W'r^{-1/2}-\frac{1}{2}\,Wr^{-3/2}\right)+$$
$$+\left[k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]Wr^{-1/2}=0$$

или

$$W''r^{-1/2}+W'r^{-3/2}-\frac{1}{4}\,Wr^{-5/2}+\left[k^2-\frac{n^2+n}{r^2}\right]Wr^{-1/2}=0.$$

Разделив на $r^{-1/2}$, приходим к уравнению

$$W''+\frac{1}{r}\,W'+\left[k^2-\frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right]W=0. \tag{58}$$

Уравнение (58) заменой $x = kr$ сводится к уравнению Бесселя полуцелого порядка

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dW}{dx} + \left[1 - \frac{(n+1/2)^2}{x^2}\right]W = 0.$$

Его ограниченными в окрестности точки $x = 0$ решениями являются функции $W_n(x) = J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ или $W_n(r) = J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$. Тогда

$$R_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Умножая найденные радиальные функции $R_n(r)$ на сферические функции $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ и $Y_n^{(-m)}(\theta, \varphi)$, получим набор частных решений уравнения Гельмгольца

$$u_{mn}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = \overline{-n, n}.$$

Составим ряд с числовыми коэффициентами

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{1}{\sqrt{r}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) \tag{59}$$

и определим коэффициенты A_{nm} так, чтобы выполнялось граничное условие $u|_{r=a} = f(\theta, \varphi)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \frac{1}{\sqrt{a}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(ka) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Отсюда получим

$$A_{nm} = \frac{\sqrt{a}}{J_{n+\frac{1}{2}}(ka)} \frac{1}{\left\|\mathrm{Y}_n^{(m)}\right\|^2} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta f(\theta, \varphi) Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)\, d\varphi\, d\theta.$$

При найденных значениях коэффициентов A_{nm} ряд (59) является решением краевой задачи (57).

1.5.9. Объемный потенциал и его свойства

Пусть в ограниченной области трехмерного пространства Ω с границей S помещен электрический заряд с плотностью $\rho(P) = \rho(x, y, z)$. Определим потенциал электростатического поля в произвольной точке P_0 (точке наблюдения). Для этого разобьем область Ω на достаточно малые области

τ_k. Сделаем естественное предположение, что действие заряженной области τ_k эквивалентно действию точечного заряда величиной $\rho(P_k)d\tau_k$, $P_k \in \tau_k$, $k = \overline{1,n}$, заключенного в малом объеме $d\tau_k$. Потенциал поля, созданного такой системой точечных зарядов, равен

$$u_n(P_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho(P_k)}{r_{P_kP_0}}\, d\tau_k, \tag{60}$$

где $r_{P_kP_0} = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 + (z_k - z_0)^2}$. Выражение в правой части (60) есть интегральная сумма для тройного интеграла

$$u(P_0) = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}}\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}}\, d\tau_P. \tag{61}$$

Функция $\dfrac{1}{r_{PP_0}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$, представляющая собой потенциал поля точечного заряда, помещенного в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, является решением уравнения Лапласа, зависящим от параметров x_0, y_0, z_0. Интеграл по параметрам вида (61) называется ***объемным*** или ***ньютоновским потенциалом***. Он дает потенциал распределенных объемных зарядов в точке наблюдения P_0. Точка P_0 может быть взята как внутри, так и во внешности области Ω.

Исследуем свойства объемного потенциала в предположении, что плотность заряда $\rho(P)$ — ограниченная кусочно-непрерывная в области Ω функция: $\big|\rho(P)\big| \leqslant M$.

1. Объемный потенциал непрерывен по координатам точки P_0 во всем трехмерном пространстве.

Действительно, если точка $P_0 \notin \overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, то интеграл (61) является собственным. Поскольку подынтегральная функция, как функция точки P, непрерывна в точке P_0, то в этой точке непрерывен и сам интеграл.

Пусть P_0 — внутренняя точка области Ω. В этом случае интеграл $u(P_0)$ является несобственным. Возьмем шар $\Omega(P_0;\delta)$ радиусом δ с центром в точке P_0, $\Omega(P_0;\delta) \subset \overline{\Omega}$. Пусть $P_1 \in \Omega(P_0;\delta)$. Рассмотрим разность

$$u(P_0) - u(P_1) = \iiint\limits_{\Omega(P_0;\delta)} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}}\, d\tau_P - \iiint\limits_{\Omega(P_0;\delta)} \frac{\rho(P)}{r_{PP_1}}\, d\tau_P + \\ + \iiint\limits_{\Omega \setminus \Omega(P_0;\delta)} \rho(P)\left(\frac{1}{r_{PP_0}} - \frac{1}{r_{PP_1}}\right) d\tau_P = I_1 + I_2 + I_3. \tag{62}$$

Оценим интеграл I_2 с учетом включения $\Omega(P_0;\delta)\subset\Omega(P_1;2\delta)$:

$$|I_2|\leqslant\iiint\limits_{\Omega(P_0;\delta)}\frac{\bigl|\rho(P)\bigr|}{r_{PP_1}}\,d\tau_P\leqslant M\iiint\limits_{\Omega(P_0;\delta)}\frac{d\tau_P}{r_{PP_1}}\leqslant M\iiint\limits_{\Omega(P_1;2\delta)}\frac{d\tau_P}{r_{PP_1}}.$$

Переходя в интеграле к сферическим координатам $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=$ $=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$, получим

$$M\iiint\limits_{\Omega(P_1;2\delta)}\frac{d\tau_P}{r_{PP_1}}=M\int\limits_0^{2\delta}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}r_{PP_1}dr_{PP_1}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=8\pi M\delta^2.$$

Таким образом, $|I_2|\leqslant 8\pi M\delta^2$. Для первого интеграла аналогично можно установить, что

$$|I_1|\leqslant 2\pi M\delta^2.$$

Зафиксируем теперь δ так, что $10\pi M\delta^2<\dfrac{\varepsilon}{2}$ или $\delta<\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{20\pi M}}$. Если $P\in\Omega\setminus\Omega(P_0;\delta)$, то, выбирая точку P_1 достаточно близко к P_0, можно получить неравенство

$$\left|\frac{1}{r_{PP_0}}-\frac{1}{r_{PP_1}}\right|<\frac{\varepsilon}{2MV(\Omega)},$$

где $V(\Omega)$ — объем области Ω. Тогда

$$|I_3|\leqslant M\iiint\limits_{\Omega\setminus\Omega(P_0;\delta)}\left|\frac{1}{r_{PP_0}}-\frac{1}{r_{PP_1}}\right|d\tau_P<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Подставляя полученные оценки в (62), находим, что

$$\bigl|u(P_0)-u(P_1)\bigr|<\varepsilon$$

для любого наперед заданного $\varepsilon>0$. Тем самым установлена непрерывность объемного потенциала внутри области Ω.

Наконец, пусть $P_0\in S$. Поступим следующим образом. Возьмем более широкую область $\Omega_1\supset\overline{\Omega}$ и положим

$$\rho_1(P)=\begin{cases}\rho(P), & P\in\overline{\Omega},\\ 0, & P\in\Omega_1\setminus\overline{\Omega}.\end{cases}$$

Тогда объемный потенциал принимает вид

$$u(P_0)=\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\rho_1(P)}{r_{PP_0}}\,d\tau_P.$$

Точка P_0 будет уже внутренней по отношению к области Ω_1 и, следовательно, объемный потенциал в этой точке непрерывен.

2. Объемный потенциал имеет непрерывные частные производные первого порядка по координатам точки P_0 во всем трехмерном пространстве.

В самом деле, в каждой точке P_0 частные производные вычисляются путем дифференцирования по параметру под знаком интеграла:

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} = \iiint\limits_{\Omega} \rho(P)\frac{x - x_0}{r^3_{PP_0}}\,d\tau_P, \quad \frac{\partial u}{\partial y_0} = \iiint\limits_{\Omega} \rho(P)\frac{y - y_0}{r^3_{PP_0}}\,d\tau_P,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z_0} = \iiint\limits_{\Omega} \rho(P)\frac{z - z_0}{r^3_{PP_0}}\,d\tau_P. \tag{63}$$

Опустим подробное доказательство и ограничимся лишь проверкой факта существования интегралов вида (63). Имеем

$$\left|\iiint\limits_{\Omega} \rho(P)\frac{x - x_0}{r^3_{PP_0}}\,d\tau_P\right| \leqslant M\iiint\limits_{\Omega}\left|\frac{x - x_0}{r_{PP_0}}\right|\frac{1}{r^2_{PP_0}}\,d\tau_P \leqslant M\iiint\limits_{\Omega}\frac{d\tau_P}{r^2_{PP_0}} \leqslant$$
$$\leqslant M\iiint\limits_{\Omega(P_0;R)}\frac{d\tau_P}{r^2_{PP_0}} = M\int\limits_0^R\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr_{PP_0} = 4\pi MR.$$

3. Объемный потенциал является гармонической функцией по координатам точки P_0 вне области $\overline{\Omega}$.

Действительно, если $P_0 \notin \overline{\Omega}$, то интеграл (61) является собственным. Поэтому оператор Лапласа можно вносить под знак интеграла:

$$\Delta u(P_0) = \Delta\left(\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(P)}{r_{PP_0}}\,d\tau_P\right) = \iiint\limits_{\Omega}\rho(P)\Delta\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)d\tau_P = 0,$$

поскольку для точек $P_0 \notin \overline{\Omega}$ имеем $\Delta\left(\dfrac{1}{r_{PP_0}}\right) = 0$.

4. Если плотность зарядов $\rho(P)$ имеет непрерывные производные первого порядка, то объемный потенциал имеет вторые производные по координатам точки P_0 в области Ω и удовлетворяет уравнению

$$\Delta u(P_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} = -4\pi\rho(P_0), \quad P_0 \in \Omega.$$

5. При стремлении точки наблюдения P_0 к бесконечности объемный потенциал стремится к нулю.

Применяя к интегралу (61) теорему о среднем значении, получим

$$u(P_0) = \frac{1}{r_{\overline{P}P_0}} \iiint\limits_{\Omega} \rho(P) d\tau_P = \frac{m}{r_{\overline{P}P_0}}, \tag{64}$$

где $\overline{P} \in \Omega$, $m = \iiint\limits_{\Omega} \rho(P) d\tau_P$ — суммарный заряд. Из формулы (64) непосредственно вытекает свойство 5.

Замечание 4. В двумерном случае (на плоскости) роль объемного потенциала выполняет ***логарифмический потенциал***

$$u(x_0, y_0) = \iint\limits_{\Omega} \rho(x, y) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \, dxdy.$$

Для логарифмического потенциала выполняются все перечисленные свойства. В частности, имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2} = -2\pi\rho(x_0, y_0), \quad (x_0, y_0) \in \Omega.$$

1.5.10. Поверхностные потенциалы простого и двойного слоя

Пусть на достаточно гладкой поверхности S распределены заряды с плотностью $\rho(P)$. В результате возникает электростатическое поле, потенциал которого равен

$$u(P_0) = \iint\limits_{S} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} \, ds_P, \tag{65}$$

где P_0 — точка наблюдения. Интеграл вида (65) называется ***потенциалом простого слоя***.

Перечислим свойства потенциала простого слоя.

1. Потенциал простого слоя непрерывен всюду в точках поверхности S.

2. Потенциал простого слоя является гармонической функцией по координатам точки P_0 вне поверхности S.

Действительно, для точек $P_0 \notin S$ интеграл (65) является собственным, поэтому

$$\Delta u(P_0) = \Delta\left(\iint\limits_{S} \frac{\rho(P)}{r_{PP_0}} \, ds_P\right) = \iint\limits_{S} \rho(P) \Delta\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) ds_P = 0.$$

3. Нормальные производные потенциала простого слоя имеют разрыв первого рода в точках поверхности S со скачком, равным $4\pi\rho(P)$.

4. Если поверхность S ограничена, то потенциал простого слоя стремится к нулю при стремлении точки наблюдения к бесконечности.

Применим к интегралу (65) теорему о среднем значении:

$$u(P_0) = \frac{1}{r_{\overline{P}P_0}} \iint\limits_S \rho(P) ds_P = \frac{m}{r_{\overline{P}P_0}},$$

где $\overline{P} \in S,\ m = \iint\limits_S \rho(P) ds_P$ — суммарный заряд. Отсюда следует свойство 4.

Перейдем к определению потенциала двойного слоя. Пусть в точках P_1 и P_2 расположены заряды величиной $-e$ и $+e$ (так называемый ***электростатический диполь***), расстояние между которыми равно Δl. Величина $N = e\Delta l$ называется ***моментом диполя***. Потенциал, создаваемый диполем в точке наблюдения P_0, равен

$$u(P_0) = \frac{e}{r_{P_2P_0}} - \frac{e}{r_{P_1P_0}} = \frac{N}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_{P_2P_0}} - \frac{1}{r_{P_1P_0}}\right).$$

Если Δl мало по сравнению с расстоянием до точки наблюдения P_0, то в последнем равенстве можно записать

$$u(P_0) = N\frac{d}{d\vec{l}}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right),$$

где производная берется по координатам точки P в направлении оси диполя, $P(x, y, z)$ — некоторая средняя точка отрезка Δl.

Пусть теперь на гладкой двухсторонней поверхности S распределены заряды: на одной стороне — положительные, на другой — отрицательные. Фактически это означает, что в каждой точке поверхности имеется диполь, и эта точка характеризуется заданием плотности распределения дипольного момента $\nu(P)$. При этом оси диполей направлены по нормали к поверхности. Потенциал такого поля равен

$$u(P_0) = \iint\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) ds_P. \tag{66}$$

Интеграл вида (66) называется ***потенциалом двойного слоя***. В случае замкнутых поверхностей под нормалью $\vec{n}_P$ будем понимать внутреннюю нормаль к поверхности S.

Перечислим свойства потенциала двойного слоя.

1. Потенциал двойного слоя определен всюду.

2. Потенциал двойного слоя является гармонической функцией всюду вне поверхности S. Действительно, если $P_0 \notin S$, то

$$\Delta u(P_0) = \Delta \iint\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) ds_P =$$

$$= \iint\limits_S \nu(P) \Delta\left[\frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)\right] ds_P = \iint\limits_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left[\Delta\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)\right] ds_P = 0.$$

3. Потенциал двойного слоя можно представить в виде

$$u(P_0) = \iint\limits_S \nu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_0}, \vec{n}_P)}{r^2_{PP_0}}\, ds_P.$$

4. Если плотность моментов $\nu(P)$ непрерывна на поверхности S, то потенциал двойного слоя имеет разрыв первого рода в точках поверхности S со скачком $4\pi\nu(P)$.

В случае двух независимых переменных поверхностные потенциалы простого и двойного слоя принимают вид ***криволинейных потенциалов простого и двойного слоя***:

$$u(x_0, y_0) = \int\limits_\Gamma \rho(x, y) \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\, d\gamma_P,$$

$$u(x_0, y_0) = \int\limits_\Gamma \nu(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_P}\left(\ln \frac{1}{r_{PP_0}}\right) d\gamma_P = \int\limits_\Gamma \nu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PP_0}, \vec{n}_P)}{r_{PP_0}}\, d\gamma_P,$$

где $\rho(x, y)$ — плотность распределения двумерного заряда, $\nu(P)$ — плотность распределения дипольного момента, $P_0 = (x_0, y_0)$ — точка наблюдения. Эти потенциалы связаны с описанием электростатических полей, созданных зарядами, равномерно распределенными на бесконечных цилиндрических поверхностях.

1.5.11. Первая и вторая формулы Грина

Пусть трехмерная область Ω ограничена кусочно-гладкой поверхностью S, $\vec{a}$ — произвольное векторное поле, $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности S. Тогда справедлива формула Остроградского — Гаусса

$$\iint\limits_S (\vec{a}\cdot\vec{n})ds = \iiint\limits_\Omega \operatorname{div}\vec{a}\,d\tau, \tag{67}$$

где ds — элемент поверхности, $d\tau$ — элемент объема.

В прямоугольных декартовых координатах формула (67) имеет вид

$$\iint\limits_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,ds =$$
$$= \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)d\tau, \tag{68}$$

где $\cos\alpha = \cos(\vec{n},\vec{i})$, $\cos\beta = \cos(\vec{n},\vec{j})$, $\cos\gamma = \cos(\vec{n},\vec{k})$ — направляющие косинусы внешней нормали.

Пусть $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ — функции, непрерывные вместе со своими производными до второго порядка включительно в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega\cup S$. Возьмем специального вида векторное поле, когда

$$a_x = u\,\frac{\partial v}{\partial x},\quad a_y = u\,\frac{\partial v}{\partial y},\quad a_z = u\,\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Тогда с учетом равенств

$$\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\nabla u\cdot\nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \operatorname{grad} v = \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

из формулы (68) приходим к ***первой формуле Грина***

$$\iint\limits_S u\,\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\,ds = \iiint\limits_\Omega (u\Delta v + \nabla u\nabla v)\,d\tau, \tag{69}$$

где $\Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Меняя местами функции u и v, будем иметь

$$\iint\limits_S v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,ds = \iiint\limits_\Omega (v\Delta u + \nabla v\nabla u)\,d\tau. \tag{70}$$

Вычитая из (69) равенство (70), получим ***вторую формулу Грина***

$$\iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) ds = \iiint\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau. \tag{71}$$

Аналогичные формулы имеют место для функций двух переменных $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. В частности, вторая формула Грина имеет вид

$$\int\limits_\Gamma \left(u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) dl = \iint\limits_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dxdy,$$

где Γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, ограничивающая область Ω, dl — элемент дуги кривой Γ, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\beta$ — производная по направлению внешней нормали к Γ.

1.5.12. Интегральное представление для гармонических функций

Напомним, что функция $u = u(P)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в области Ω, называется ***гармонической функцией***. Ранее нами были получены гармонические всюду, кроме точки $r = 0$, функции $u = \dfrac{1}{r}$ и $u = \ln\dfrac{1}{r}$. Они представляют собой фундаментальные решения уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости соответственно. Наряду с этими функциями будем рассматривать также их сдвиги

$$\frac{1}{r_{PP_0}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

$$\ln\frac{1}{r_{PP_0}} = \ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

которые гармоничны всюду, кроме точки $P = P_0$.

Найдем интегральное представление для функции $u = u(x,y,z) = u(P)$, непрерывной вместе со своими производными до второго порядка включительно в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ с достаточно гладкой границей S. Пусть $P_0 \in \Omega$ — внутренняя точка области Ω. Возьмем шар $\Omega(P_0;\delta)$ радиусом δ с центром в точке P_0, $S(P_0;\delta)$ — соответствующая поверхность шара. Применим вторую формулу Грина (71) в области $\Omega \backslash \Omega(P_0;\delta)$, полагая в качестве $v(P)$ функцию $v(P) = \dfrac{1}{r_{PP_0}}$ и учитывая при этом, что $\Delta\left(\dfrac{1}{r_{PP_0}}\right) = 0$

всюду в $\Omega\backslash\Omega(P_0;\delta)$:

$$\iint\limits_S \left[u\,\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) - \frac{1}{r_{PP_0}}\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right]ds +$$
$$+\iint\limits_{S(P_0;\delta)} \left[u\,\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right) - \frac{1}{r_{PP_0}}\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right]ds = \iiint\limits_{\Omega\backslash\Omega(P_0;\delta)} \left(-\frac{1}{r_{PP_0}}\,\Delta u\right)d\tau. \quad (72)$$

Установим, какой вид примет равенство (72), если в нем перейти к пределу при $\delta\to 0$. Вычислим производную по внешней нормали на поверхности $S(P_0;\delta)$. Поскольку внешняя нормаль к границе области $\Omega\backslash\Omega(P_0;\delta)$ направлена вдоль радиуса внутрь шара $\Omega(P_0;\delta)$, то

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)\Bigg|_{S(P_0;\delta)} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)\Bigg|_{r=\delta} = \frac{1}{\delta^2}.$$

Отсюда имеем

$$I_1 = \iint\limits_{S(P_0;\delta)} u\,\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\left(\frac{1}{r_{PP_0}}\right)ds = \frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S(P_0;\delta)} u\,ds = \frac{1}{\delta^2}\,u(\overline{P})\cdot 4\pi\delta^2 = 4\pi u(\overline{P}),$$

где $\overline{P}\in S(P_0;\delta)$. Здесь мы применили теорему о среднем значении функции на поверхности сферы. Очевидно, что

$$\lim_{\delta\to 0} I_1 = \lim_{\delta\to 0} 4\pi u(\overline{P}) = 4\pi u(P_0).$$

В свою очередь, для второго интеграла по сфере в левой части равенства (72) в силу ограниченности нормальной производной имеем

$$|I_2| = \left|\iint\limits_{S(P_0;\delta)} \left(-\frac{1}{r_{PP_0}}\,\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)ds\right| \leqslant \iint\limits_{S(P_0;\delta)} \frac{1}{r_{PP_0}}\left|\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right|ds \leqslant$$
$$\leqslant M\iint\limits_{S(P_0;\delta)} \frac{1}{r_{PP_0}}\,ds = \frac{M}{\delta}\,4\pi\delta^2 = 4\pi M\delta.$$

Поскольку правая часть последнего равенства стремится к нулю при $\delta\to 0$, то $\lim\limits_{\delta\to 0} I_2 = 0$.

Таким образом, существует предел левой части равенства (72). Следовательно, существует и предел правой части. По определению несобственного интеграла имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\iiint\limits_{\Omega\backslash\Omega(P_0;\delta)} \left(-\frac{1}{r_{PP_0}}\Delta u\right)d\tau = \iiint\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{r_{PP_0}}\Delta u\right)d\tau.$$

В результате указанного предельного перехода при $\delta \to 0$ приходим к ***основному интегральному представлению для функции в пространстве***

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[\frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right] ds - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega \frac{\Delta u}{r_{PP_0}} d\tau.$$

В частности, если $u(P)$ — гармоническая в области $\overline{\Omega}$ функция, то интегральное представление принимает вид

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[\frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right] ds. \tag{73}$$

Замечание 5. Пусть S — некоторая область на плоскости (x, y), ограниченная замкнутой кривой Γ, а $\vec{n}$ — внешняя по отношению к области S нормаль к этой кривой. Полагая во второй формуле Грина $v = \ln \dfrac{1}{r_{PP_0}}$, где $r_{PP_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ и проводя аналогичные рассуждения, можно получить основное интегральное представление для гармонической функции на плоскости

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\Gamma \left[\ln \frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\ln \frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right] dl.$$

1.5.13. Основные свойства гармонических функций

1. Если $u(P)$ — гармоническая в области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ функция, то

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = 0. \tag{74}$$

Действительно, подставляя во вторую формулу Грина (71) какую-либо гармоническую функцию $u(P)$ и функцию $v(P) \equiv 1$, получим

$$\iint\limits_S \left(0 - 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds = \iiint\limits_\Omega 0 \cdot d\tau,$$

откуда и вытекает формула (74).

2. Теорема о среднем значении. Если функция $u(P)$ гармоническая в области $\overline{\Omega}$, а P_0 — какая-либо точка, лежащая внутри области $\overline{\Omega}$, то имеет место формула

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi\delta^2} \iint\limits_{S(P_0;\delta)} u(P)\, ds, \tag{75}$$

где $S(P_0;\delta)$ — сфера радиусом δ с центром в точке P_0, целиком лежащая в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Используем интегральное представление (73) для шара $\overline{\Omega}(P_0;\delta)$:

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S(P_0;\delta)} \left[\frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}} - u(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right] ds.$$

Принимая во внимание, что на сфере $S(P_0;\delta)$

$$\frac{1}{r_{PP_0}} = \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \right) = -\frac{1}{r_{PP_0}^2} = -\frac{1}{\delta^2},$$

с учетом свойства 1 получим

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi\delta} \iint\limits_{S(P_0;\delta)} \frac{\partial u(P)}{\partial \vec{n}}\, ds + \frac{1}{4\pi\delta^2} \iint\limits_{S(P_0;\delta)} u(P)\, ds = \frac{1}{4\pi\delta^2} \iint\limits_{S(P_0;\delta)} u(P)\, ds,$$

что и требовалось доказать.

3. Принцип максимума. Если функция $u(P) \neq \mathrm{const}$ гармонична в области Ω и непрерывна в области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, то она достигает своего наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения на границе S.

Обозначим через M_Ω наибольшее значение функции $u(P)$ в $\overline{\Omega}$, а через M_S — наибольшее значение функции $u(P)$ на S. Необходимо доказать, что $M_\Omega = M_S$. Предположим, что $M_\Omega > M_S$ и максимум достигается в некоторой точке P_0, т. е. $u(P_0) = M_\Omega$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(P) = u(P) + \frac{M_\Omega - M_S}{6d^2} \Big[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \Big],$$

где d — диаметр области Ω. Очевидно, что для всех точек $P \in \Omega$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < d^2,$$

$v(P_0) = u(P_0) = M_\Omega$. С другой стороны, на границе области S

$$v(P) < M_S + \frac{M_\Omega - M_S}{6} = \frac{5M_S}{6} + \frac{M_\Omega}{6} < M_\Omega.$$

Следовательно, непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $v(P)$ должна достигать наибольшего значения в некоторой внутренней точке P_1 области Ω. В этой точке

$\Delta v \leqslant 0$, поскольку в точке максимума ни одна из производных $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ не может быть положительной. В то же время

$$\Delta v = \Delta u + \frac{M_\Omega - M_S}{d^2} = \frac{M_\Omega - M_S}{d^2} > 0.$$

Полученное противоречие свидетельствует о том, что $M_\Omega = M_S$. Применяя этот результат к функции $-u(P)$, доказываем вторую часть теоремы.

4. Если функция $f(z)$ аналитична в области Ω, то ее действительная и мнимая части гармоничны в области Ω.

В самом деле, пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют производные любого порядка. Запишем условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое равенство по x, второе по y и складывая полученные соотношения, имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

Дифференцируя первое равенство по y, второе по x и вычитая одно из другого, находим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (x,y) \in \Omega.$$

1.5.14. Решение краевых задач методом функций Грина

Пусть область Ω ограничена достаточно гладкой поверхностью S и пусть функция $u = u(P)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$. Тогда имеет место основное интегральное представление (см. § 7.2)

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[\frac{1}{r_{PP_0}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{r_{PP_0}} \right) \right] ds - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_\Omega \frac{\Delta u}{r_{PP_0}} d\tau, \tag{76}$$

где P_0 — внутренняя точка области Ω. С другой стороны, согласно второй формуле Грина имеем

$$\iint\limits_S \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds = \iiint\limits_\Omega (u \Delta v - v \Delta u)\, d\tau.$$

В частности, если $v(P)$ — гармоническая в Ω функция, то последнее соотношение принимает вид

$$\iint\limits_S \left(u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds + \iiint\limits_\Omega v \Delta u\, d\tau = 0. \tag{77}$$

Вычитая (77) из (76), получим

$$u(P_0) = \iint\limits_S \left[\left(\frac{1}{4\pi r_{PP_0} + v} \right) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\,\frac{\partial}{\partial \vec{n}} \left(\frac{1}{4\pi r_{PP_0}} + v \right) \right] ds -$$

$$- \iiint\limits_\Omega \left(\frac{1}{4\pi r_{PP_0}} + v \right) \Delta u\, d\tau, \tag{78}$$

где $v(P)$ — произвольная гармоническая в области Ω функция.

Определение 1. ***Функцией Грина задачи Дирихле*** называется функция $G(P, P_0)$, удовлетворяющая условиям

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{PP_0}} + v(P), \tag{79}$$

$$G(P, P_0)|_S = 0, \tag{80}$$

где $v(P)$ — гармоническая в Ω функция.

Очевидно, что нахождение функции Грина $G(P, P_0)$ для области Ω эквивалентно решению специальной задачи Дирихле

$$\Delta v = 0, \quad P \in \Omega, \tag{81}$$

$$v(P)|_S = -\frac{1}{4\pi r_{PP_0}}. \tag{82}$$

С учетом равенств (79), (80) представление (78) принимает вид

$$u(P_0) = -\iint\limits_S u\,\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\, ds - \iiint\limits_\Omega G \Delta u\, d\tau. \tag{83}$$

Если предположить, что для данной области Ω найдена функция Грина $G(P, P_0)$ (или, что то же самое, решена специальная задача Дирихле (81), (82)), то решение общей задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(P_0), \quad P_0 \in \Omega, \tag{84}$$

$$u|_S = \varphi(P_0), \tag{85}$$

сразу определяется с помощью формулы (83):

$$u(P_0) = -\iint\limits_S \varphi(P)\,\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\,ds_P + \iiint\limits_\Omega f(P)G(P,P_0)\,d\tau_P. \tag{86}$$

Здесь интегрирование ведется по координатам точки P.

Замечание 6. Аналогично можно ввести функцию Грина на плоскости. Она определяется соотношениями

$$G(P,P_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0}} + v(P), \quad G(P,P_0)|_\Gamma = 0,$$

где $v(P) = v(x,y)$ — гармоническая в Ω функция двух переменных. Функция Грина позволяет выписать решение задачи Дирихле (84),(85) в виде

$$u(P_0) = -\int\limits_\Gamma \varphi(P)\,\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\,dl_P + \iint\limits_\Omega f(P)G(P,P_0)\,d\tau_P.$$

Дадим физическую интерпретацию функции Грина для задачи Дирихле. Пусть S — поверхность, ограничивающая область Ω. Поместим в точке P_0 внутри Ω единичный заряд величиной $\dfrac{1}{4\pi}$, индуцирующий некоторое распределение зарядов на поверхности S. Потенциал электростатического поля в области Ω будет равен сумме потенциала самого точечного заряда $\dfrac{1}{4\pi r_{PP_0}}$ и потенциала $v(P,P_0)$ зарядов, индуцированных на проводящей поверхности. Таким образом, функцию Грина можно интерперетировать как потенциал поля, создаваемого точечным зарядом, помещенным внутри заземленной проводящей поверхности. В рамках данной интерпретации функцию Грина называют ***функцией точечного источника***.

1.5.15. Построение функции Грина для простейших областей

Пример 14. Построить функцию Грина и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

Возьмем в качестве области Ω верхнее полупространство, ограниченное плоскостью xOy. Поместим в точке $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ единичный заряд, создающий при отсутствии проводящей плоскости поле с потенциалом $\dfrac{1}{4\pi r_{PP_0}}$. Поскольку $G(P,P_0) = \dfrac{1}{4\pi r_{PP_0}} + v(P)$, то задача сводится к отысканию функции

$v(P)$, гармонической в полупространстве $z > 0$ и равной $-\dfrac{1}{4\pi r_{PP_0}}$ на границе $z = 0$. Такой функцией, очевидно, является функция $v(P) = -\dfrac{1}{4\pi r_{PP_0'}}$, где P_0' — точка, симметричная точке P_0 относительно проводящей плоскости $z = 0$. Суммарный потенциал двух точечных зарядов, помещенных в точках P_0 и P_0', и будет равен функции Грина для полупространства

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{PP_0}} - \frac{1}{4\pi r_{PP_0'}}. \tag{87}$$

Действительно, функция $G(P, P_0)$ гармонична всюду в полупространстве $z > 0$, кроме точки P_0, а в точках плоскости $z = 0$ имеем $r_{PP_0} = r_{PP_0'}$ и, следовательно, $G(P, P_0)|_S = 0$.

Рассмотрим теперь задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad z > 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \tag{88}$$

$$u|_{z=0} = \varphi(x, y). \tag{89}$$

Согласно формуле (86), ее решение запишется в виде

$$u(P_0) = -\iint\limits_S \varphi(P)\,\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\,ds_P. \tag{90}$$

Учитывая соотношения

$$r_{PP_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_{PP_0'} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2},$$

вычислим производную по нормали в точке $z = 0$. Поскольку

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} = -\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{z - z_0}{r^3_{PP_0}} - \frac{z + z_0}{r^3_{PP_0'}}\right),$$

в результате будем иметь

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{z=0} = -\frac{z_0}{2\pi\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2\right]^{3/2}}.$$

Возвращаясь к равенству (90), окончательно получим решение задачи (88), (89)

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x, y)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2\right]^{3/2}}\,dxdy.$$

Пример 15. Построить функцию Грина для шара.

Пусть P_0 — внутренняя точка шара радиусом R, P — произвольная точка на сфере S. Поместим в точке P_0 единичный заряд. Тогда на проводящей сфере индуцируется заряд, потенциал которого равен потенциалу точечного заряда, помещенного в инверсной точке P_0' относительно сферы, так что выполняется равенство $OP_0 \cdot OP' = R^2$ или $\dfrac{OP_0}{OP} = \dfrac{OP}{OP_0'}$. Треугольники OPP_0 и OPP_0' имеют общий угол, при этом выполняются условия пропорциональности сторон, содержащих этот угол. Следовательно, эти треугольники подобны и можно записать

$$\frac{OP_0}{OP} = \frac{OP}{OP_0'} = \frac{PP_0}{PP_0'}.$$

Обозначим $OP_0 = \rho_0$, $PP_0 = r_{PP_0}$, $PP_0' = r_{PP_0'}$ и выделим первое и третье соотношения. Во всех точках сферы выполняется равенство

$$\frac{\rho_0}{R} = \frac{r_{PP_0}}{r_{PP_0'}} \quad \Rightarrow \quad r_{PP_0'} = \frac{R}{\rho_0} r_{PP_0}. \tag{91}$$

Тогда функцию Грина для шара можно записать в виде

$$G(P, P_0) = \frac{1}{4\pi r_{PP_0}} - \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{4\pi r_{PP_0'}}. \tag{92}$$

Действительно, функция $v(P) = -\dfrac{R}{\rho_0} \dfrac{1}{4\pi r_{PP_0'}}$ гармонична всюду в замкнутом шаре. Если же $P \in S$, то с учетом (91) имеем

$$G(P, P_0)|_S = \frac{1}{4\pi r_{PP_0}} - \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{4\pi \dfrac{R}{\rho_0} r_{PP_0}} = 0.$$

Как и в случае полупространства, функция Грина для шара (92) представляет собой суммарный потенциал двух точечных зарядов, помещенных в точках P_0 и P_0'.

Пример 16. Построить функцию Грина для круга.

Учитывая, что функция Грина на плоскости задается формулой

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PP_0}} + v(P)$$

и проводя аналогичные предыдущему примеру рассуждения, приходим к функции Грина для круга

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PP_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{PP_0'}} \right),$$

где P_0' — инверсный образ точки P_0 относительно окружности Г.

Описанный в примерах способ построения функции Грина получил название ***метода электростатических изображений***.

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. Задачи по теме «Классификация уравнений в частных производных второго порядка»

Определить тип и привести к канонической форме уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 6\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

2. $2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

3. $4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

4. $2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - u = 0.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0.$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

8. $2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - u = 0.$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 4u = 0.$

Определить тип и привести к канонической форме уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3+\sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y\,\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

16. $y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

17. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\,\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

18. $e^{2x}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2e^{x+y}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{2y}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xu.$

19. $y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -y\,\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2)^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y(1+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

21. $xy^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^2\,\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

22. $(1+x^2)^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2x(1+x^2)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

Привести к канонической форме уравнения второго порядка в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения.

23. $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - 16x^4u.$

24. $\operatorname{sgn} y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$ **25.** $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

26. $y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$ **27.** $x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

28. $x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos(2x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\cos x\,\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

2.2. Задачи по теме «Уравнения гиперболического типа»

30. Однородная струна длиной l натянута между двумя точками $x = 0$ и $x = l$. В точке $x = c$ струна оттягивается на небольшое расстояние h от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Определить отклонение $u(x, t)$ струны для любого момента времени.

31. Один конец $x = 0$ стержня закреплен жестко, а другой $x = l$ закреплен упруго. Найти продольные колебания стержня при произвольных начальных условиях.

Решить смешанные задачи.

32. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin \dfrac{4\pi x}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

33. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos \dfrac{\pi x}{2l}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos \dfrac{3\pi x}{2l} + \cos \dfrac{7\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin \dfrac{3\pi x}{2l}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin \dfrac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

35. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 1 + \cos\dfrac{3\pi x}{l}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

37. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = hx(1-x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

38. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = hx, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

39. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

40. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos(3x) + 2\cos(7x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

41. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = hx(\pi - x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

42. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(l-x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(l-x)t^2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\operatorname{sh} x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin 2x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

48. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + hxe^{-t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

49. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h \sin t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

50. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + he^{-t} \cos \dfrac{\pi x}{2l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

51. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin^2 x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

52. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 10u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin 2x \cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

53. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1 - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

54. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=2} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{x}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$

56. Стержень длиной l, конец которого $x = 0$ жестко закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ к его свободному концу $x = l$ приложена постоянная сила Q, действующая вдоль стержня. Найти смещение $u(x, t)$ точек стержня при $t > 0$.

57. Решить задачу о вынужденных поперечных колебаниях струны, закрепленной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию возмущающей гармонической силы, вызывающей смещение, равное $A \sin \omega t$, $A = \mathrm{const}$. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

Решить смешанные задачи.

58. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=\pi} = t^3, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = e^{-t}, \quad u|_{x=\pi} = t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin x \cos x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

60. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = Ae^{-t}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{Aa \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{l}{a}}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\dfrac{Aa \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{l}{a}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

61. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4t(\sin x - x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 3, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + t, \qquad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 3, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x + \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

62. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x(t+4) + \cos\dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t + 1, \quad u\big|_{x=\pi} = \pi(t+1), \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

63. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3x - 2t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = \pi t, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = e^{-x}\sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

2.3. Задачи по теме «Уравнения параболического типа»

Задача 64. Растворенное вещество с постоянной начальной концентрацией u_0 диффундирует из раствора, заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = h$, в растворитель, ограниченный плоскостями $x = h$ и $x = l$. Определить процесс выравнивания концентрации, предполагая, что границы $x = 0$ и $x = l$ непроницаемы для вещества.

Решить смешанные задачи.

65. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin \dfrac{7\pi x}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

66. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant l/2, \\ l - x, & l/2 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \end{cases}$$

67. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2 - 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

68. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin \dfrac{3\pi x}{2l} + \sin \dfrac{7\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

69. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos \dfrac{\pi x}{2l} + \cos \dfrac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

70. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

71. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \sin(2x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

72. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

73. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 + \cos(2x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

74. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 9u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\sin^2 t \cos(3t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 7u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{13}{4}\sin\dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + q, \quad 0 \leqslant r < b, \quad t > 0, \\ \left|u\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad u\big|_{r=b} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant b, \quad q = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$$

Задача 77. Дан однородный тонкий стержень $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, начальная температура которого равна $u|_{t=0} = \dfrac{Ax}{l}$, $A = \text{const}$. На конце стержня $x = 0$ температура поддерживается равной нулю, а на конце $x = l$ изменяется по закону $u|_{x=l} = Ae^{-t}$. Найти нестационарное распределение температуры в стержне.

Решить смешанные задачи.

78. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 2\pi t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

79. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin(2x)\cos x - x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

80. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 9u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\sin^2 t\cos(3t) - 18x^2 - 4, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 4\pi, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 2x^2 + 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

81. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 1 + t, \quad u|_{x=\pi} = 1 + t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 1 + e^x \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

82. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} - h(u - U_0)\right]\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad h, U_0 = \text{const} > 0. \end{cases}$$

2.4. Задачи по теме «Применение специальных функций и ортогональных систем многочленов к решению задач математической физики»

Задача 83. Доказать рекуррентное соотношение

$$J_p'(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x}\, J_p(x).$$

Задача 84. Вычислить интеграл

$$\int_0^l r\, J_0(ar) J_0(br)\, dr, \quad a, b = \text{const}.$$

Задача 85. Найти колебания однородной круглой мембраны радиусом l, закрепленной по краю, если начальная скорость равна нулю, а начальное отклонение $u\big|_{t=0} = h\left(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\right)$, $h = \text{const}$.

Задача 86. Дан неограниченный круговой цилиндр радиусом l. Найти распределение температуры внутри цилиндра при $t > 0$, если на поверхности цилиндра поддерживается нулевая температура, а начальная температура цилиндра равна $u\big|_{t=0} = AJ_0\left(\dfrac{\mu_n r}{l}\right)$, $A = \text{const}$, где μ_n — положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Решить смешанные задачи.

87. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \left|u\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_0, & 0 \leqslant r \leqslant l, \quad u_0 = \text{const}. \end{cases}$$

88. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < l, \quad t > 0, \\ \left|u\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & h > 0 \text{ — малое число}. \end{cases}$$

$$
\textbf{89.}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 \leqslant x < l, \quad t > 0, \\ \left|u|_{x=0}\right| < \infty, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = f(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}
$$

Задача 90. Найти колебания однородной круглой мембраны радиусом l с закрепленным краем, если эти колебания вызваны равномерно распределенным постоянным давлением p_0, действующим на одну сторону мембраны с момента времени $t = 0$.

Задача 91. Найти колебания однородной круглой мембраны радиусом l, вызванные движением ее края по закону $u|_{r=l} = A\sin\omega t$. Предполагается, что $\omega \neq \dfrac{\mu_k a}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Задача 92. Найти колебания однородной круглой мембраны радиусом l с закрепленным краем. Колебания совершаются в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, и вызваны равномерно распределенным давлением $p = p_0 \sin\omega t$, $p_0 = \mathrm{const}$, приложенным к одной стороне мембраны. Предполагается, что $\omega \neq \dfrac{\mu_k a}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Задача 93. Найти распределение температуры в бесконечном круговом цилиндре радиусом l, если начальная температура внутри цилиндра равна $u_0 r^2$, $u_0 = \mathrm{const}$, а боковая поверхность поддерживается при постоянной температуре u_1.

Задача 94. Имеется неограниченный цилиндр радиусом l, на поверхности которого поддерживается постоянная концентрация вещества u_0. Начальная концентрация $u(r,t)$ внутри цилиндра равна нулю. Определить количества вещества $Q(t) = 2\pi \displaystyle\int_0^l r u(r,t)\,dr$, продиффундировавшего внутрь цилиндра в момент времени t, на единицу длины.

Решить смешанные задачи (μ_1 и μ_n — положительные корни соответствующих уравнений $J_p(\mu) = 0$, $p = \overline{0,3}$.)

95. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sin t\, J_0(\mu_n x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

96. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = \cos 2t, \\ u|_{t=0} = \dfrac{J_0(2x)}{J_0(2)}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

97. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = t - 1, \\ u|_{t=0} = J_0(\mu_1 x) - 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

98. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cos t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 1 - \dfrac{J_0(x)}{J_0(1)}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

99. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sin 3t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 1, \\ u|_{t=0} = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{J_0(3x)}{3J_0(3)}. \end{cases}$$

100. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\cos 2t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = \dfrac{J_0(2x)}{2J_0(2)} - \dfrac{1}{2} + J_0(\mu_1 x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

101. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \sin t\, J_0(\mu_1\sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

102. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + e^t J_1(\mu_n x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

103. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = \sin 2t \cos t, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{J_1(x)}{2J_1(1)} + \dfrac{3J_1(3x)}{2J_1(3)}. \end{cases}$$

104. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{4u}{x^2} + \cos t\, J_2(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

105. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + tJ_0(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

106. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + \sin t\, J_1(\mu_n x), \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

107. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{9u}{4x}, \quad 0 < x < 1, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = J_3(\mu_n\sqrt{x}). \end{cases}$$

Задача 108. Найти распределение температуры в бесконечном круговом цилиндре радиусом l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Начальная температура внутри цилиндра равна $u_0 r^2$, $u_0 = \mathrm{const}$.

Задача 109. Решить задачу об остывании бесконечного кругового цилиндра радиусом l, если начальная температура равна $u_0 = \mathrm{const}$, а на его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности q.

Задача 110. Найти распределение температуры в бесконечном круговом цилиндре радиусом l, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру. Начальная температура внутри цилиндра равна $u_0 r^2$, $u_0 = \mathrm{const}$.

Задача 111. Начальная температура внутри бесконечного кругового цилиндра $0 \leqslant r \leqslant l$ равна $u_0 = \mathrm{const}$, а на боковой поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $u_1 + bt$, где u_1 и b — константы. Найти температуру цилиндра при $t > 0$.

Задача 112. Найти распределение температуры в неограниченной цилиндрической трубе $l_1 \leqslant r \leqslant l_2$, если через ее внешнюю поверхность подается снаружи постоянный тепловой поток плотностью q, а внутренняя поверхность трубы поддерживается при нулевой температуре. Начальная температура трубы равна $u|_{t=0} = 0$.

2.5. Задачи по теме «Уравнения эллиптического типа»

Задача 113. Найти потенциал электростатического поля в прямоугольнике $\Omega = \left\{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\right\}$, если вдоль стороны $x = 0$ потенциал равен v_0, а три другие стороны заземлены. Электрические заряды внутри прямоугольника отсутствуют.

Задача 114. Найти стационарное распределение температуры внутри прямоугольной пластины $\Omega = \left\{0 \leqslant x \leqslant a,\, 0 \leqslant y \leqslant b\right\}$, если к стороне $y = b$ подводится постоянный тепловой поток q, а остальные три стороны поддерживаются при постоянной температуре u_0.

Задача 115. Найти потенциал электростатического поля в коробке прямоугольного сечения $\Omega = \left\{-a \leqslant x \leqslant a,\ -b \leqslant y \leqslant b\right\}$, две противоположные грани которой $x = -a$ и $x = a$ имеют потенциал v_0, а две другие $y = -b$ и $y = b$ заземлены.

Решить краевые задачи.

116.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = A, \quad u\big|_{x=a} = By, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=b} = 0, \quad A, B = \mathrm{const}. \end{cases}$$

117.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = Ay(b-y), \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=b} = Bx(a-x), \quad A, B = \mathrm{const}. \end{cases}$$

118.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = \sin\dfrac{2\pi y}{b} + \sin\dfrac{7\pi y}{b}, \quad u\big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = \sin\dfrac{\pi x}{a}, \quad u\big|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

119.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < \infty, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = 0, \\ u\big|_{y=0} = A\left(1 - \dfrac{x}{a}\right), \quad u\big|_{y=\infty} = 0, \quad A = \mathrm{const}. \end{cases}$$

120. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=\infty} = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

121. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad 0 < x < a, \quad -\dfrac{b}{2} < y < \dfrac{b}{2}, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=-b/2} = 0, \quad u|_{y=b/2} = 0. \end{cases}$$

122. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\dfrac{q}{a}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = -\dfrac{q}{b}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0, \quad q = \text{const} > 0. \end{cases}$$

Задача 123. Найти решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри единичного круга, если заданы граничные условия:

1) $u|_{r=1} = \cos^2\varphi$; 2) $u|_{r=1} = \cos^4\varphi$; 3) $u|_{r=1} = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi$.

Задача 124. Найти решение краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга радиусом a, если заданы граничные условия:

1) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = A\cos\varphi$; 2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = A\cos 2\varphi$; 3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sin^3\varphi$.

Задача 125. Найти решение краевой задачи для уравнения Лапласа вне круга радиусом a, если заданы граничные условия:

1) $u|_{r=a} = A + B\sin\varphi$; 2) $u|_{r=a} = \sin^3\varphi$; 3) $u|_{r=a} = A\cos^2\varphi$.

Задача 126. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что выполняются граничные условия:

1) $u|_{r=1} = A\cos 2\varphi, \quad u|_{r=2} = B$;

2) $u|_{r=1} = 1 + \cos^2\varphi, \quad u|_{r=2} = \sin^2\varphi$;

3) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = A\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = A\sin 2\varphi + B$.

Решить краевые задачи.

127. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ u\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\big|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad u\big|_{r=a} = A\varphi, \quad A = \mathrm{const}. \end{cases}$$

128. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 < \varphi < \alpha, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad u\big|_{r=a} = \operatorname{sgn}\left(\varphi - \dfrac{\alpha}{2}\right). \end{cases}$$

129. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -4r, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u\big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

130. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\dfrac{1}{2}\, r^2 \sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant r < a, \\ u\big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

131. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -12r^2 \cos 2\varphi, \quad 1 < r < 2, \\ u\big|_{r=1} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

Задача 132. Найти стационарное распределение температуры в цилиндре $\Omega = \big\{(r, \varphi, z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, если нижнее основание цилиндра имеет температуру u_0, а на остальной поверхности температура равна нулю.

Задача 133. Найти стационарную температуру $u(r, z)$ внутренних точек цилиндра $\Omega = \big\{(r, \varphi, z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, если в цилиндре имеются источники тепла объемной плотности Q, а температура поверхности цилиндра равна нулю.

Задача 134. Найти потенциал электростатического поля внутри полого цилиндра $\Omega = \big\{(r, \varphi, z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, оба основания которого заземлены, а боковая поверхность заряжена до потенциала v_0.

Решить краевые задачи.

135. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + h_0 u\right)\Big|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = -q, \quad u|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \quad h_0 = \text{const} > 0. \end{cases}$$

136. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = f(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

137. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ u|_{r=a} = \cos^2\theta. \end{cases}$$

138. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ \left(u - \dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \sin^2\theta. \end{cases}$$

139. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ u|_{r=1} = 1 - \cos 2\theta, \quad u|_{r=2} = 2\cos\theta. \end{cases}$$

140. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = (\sin\theta + \sin 2\theta)\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

141. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=a} = \sin\left(3\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin^3\theta. \end{cases}$$

142. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \left(u + \dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \sin\theta(\sin\varphi + \cos\varphi\,\cos\theta + \sin\theta). \end{cases}$$

143. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \left(u - \dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = \sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}\,\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

144. $$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=a} = \sin 100\varphi\,\sin^{100}\theta. \end{cases}$$

145. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = 7\sin\theta\,\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 7\cos\theta. \end{cases}$

146. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = 12\sin\theta\,\cos^2\dfrac{\theta}{2}\,\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 0. \end{cases}$

147. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \left.\left(3u + \dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=1} = 5\sin^2\theta\,\sin 2\varphi, \quad u|_{r=2} = -\cos\theta. \end{cases}$

2.6. План практических занятий

1. Приведение к канонической форме уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

А.: 1—5.
Д.: 6—9.

2. Приведение к канонической форме уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

А.: 15—17, 26, 27.
Д.: 18—20, 28, 29.

3. Приведение к канонической форме уравнений второго порядка с тремя независимыми переменными.

А.: 10—12.
Д.: 13, 14.

4. Контрольная работа № 1.

5. Задачи Штурма — Лиувилля в простейшем случае.

А. Решить простейшие задачи Штурма — Лиувилля с различными сочетаниями граничных условий первого, второго и третьего рода.

1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \quad h = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad h = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$

Д. Решить простейшие задачи Штурма — Лиувилля с различными сочетаниями граничных условий первого, второго и третьего рода.

1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \quad 0<x<l, \\ X(0)=0, \quad X'(l)+hX(l)=0, \quad h=\text{const}>0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \quad 0<x<l, \\ X'(0)-hX(0)=0, \quad X'(l)=0, \quad h=\text{const}>0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \quad 0<x<l, \\ X'(0)-hX(0)=0, \quad X'(l)+hX(l)=0, \quad h=\text{const}>0. \end{cases}$

6. Метод разделения переменных для однородного уравнения колебаний струны.

А.: 32, 34, 35.

Однородная струна длиной l, жестко закрепленная в концевых точках $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, осью симметрии которой служит прямая $x=l/2$, а вершиной точка $(l/2;q)$. Определить смещение $u(x,t)$ точек струны от положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

Д.: 30, 31, 33, 36.

7. Метод Фурье для однородных смешанных задач с гиперболическим оператором общего вида.

А.: 37, 39.

Решить смешанную задачу.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ u\big|_{x=0}=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}=0, \qquad t\geqslant 0, \\ u\big|_{t=0}=qx, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Д.: 38, 40, 41.

8. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения колебаний струны.

А.: 42, 44, 47, 49, 51.

Д.: 43, 46, 48, 50, 52.

9. Смешанные задачи для уравнения колебаний струны с неоднородными граничными условиями.

А.: 53, 56, 57, 60.
Д.: 54, 55, 58, 59.

10. Смешанные задачи о вынужденных колебаниях струн и стержней в общей постановке. I.

А.: 61, 63.
Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x + 8e^t\cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 2t, \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t, \qquad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Д.: 62.
Решить смешанные задачи:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8u + 2x(1-4t) + \cos(3x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t, \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi t}{2}, \qquad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 7\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2t - 7x - e^{-x}\sin(3x), \quad 0 < x < \pi, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = \pi t, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

11. Смешанные задачи о вынужденных колебаниях струн и стержней в общей постановке. II.

А. Методом неопределенных коэффициентов найти вспомогательную функцию $W(x,t)$ для смешанных задач с заданными неоднородными граничными условиями.

$$1)\quad \text{I} - \text{III}. \quad u\big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = \mu_2(t).$$

$$2)\quad \text{III} - \text{I}.\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t),\quad u|_{x=l} = \mu_2(t).$$

Найти продольные колебания однородного стержня, конец $x = 0$ которого закреплен жестко, а к концу $x = l$ приложена сила $F(t) = A\sin\omega t$, $A = \text{const}$, действующая вдоль стержня. Начальные условия нулевые. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

Д. Методом неопределенных коэффициентов найти вспомогательную функцию $W(x,t)$ для смешанных задач с заданными неоднородными граничными условиями.

$$1)\quad \text{II} - \text{III}.\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_1(t),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = \mu_2(t),$$

$$2)\quad \text{III} - \text{II}.\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t),\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \mu_2(t),$$

$$3)\quad \text{III} - \text{III}.\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\Big|_{x=0} = \mu_1(t),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = \mu_2(t).$$

Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\Big|_{x=0} = \alpha, \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\Big|_{x=l} = -\alpha, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad h, \alpha = \text{const}. \end{cases}$$

12. Контрольная работа № 2.

13. Метод разделения переменных для однородного уравнения теплопроводности.

А.: 64, 65, 68.

1) Дан однородный тонкий стержень длиной l, начальная температура которого равна $u_0 = \text{const}$. Конец $x = l$ стержня теплоизолирован, а на конце $x = 0$ и боковой поверхности стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей нулевую температуру. Определить температуру точек стержня при $t > 0$.

2) Дан однородный шар радиусом b, центр которого расположен в начале координат. Внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура $u|_{t=0} = b^2 - r^2$. Определить температуру $u(r,t)$ внутри шара при $t > 0$.

Д.: 66, 67, 69, 70.

Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 4u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2 - \pi x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

14. Метод Фурье для неоднородного уравнения теплопроводности.

А.: 71, 72, 75.

Найти нестационарное распределение температуры в плоском слое толщиной l, внутри которого при $t > 0$ действует источник тепла с постоянной плотностью Q, а его поверхность поддерживается при нулевой температуре. Начальная температура во внутренних точках слоя равна нулю.

Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 5u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\sin(2x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Д.: 73, 74, 76.

Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = e^x \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

15. Смешанные задачи для уравнения теплопроводности с неоднородностями в уравнении и граничных условиях. I.

А.: 77—79.

Д.: 80—82.

Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt(2-t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 2t^2, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 2t^2, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

16. Смешанные задачи для уравнения теплопроводности с неоднородностями в уравнении и граничных условиях. II.

А. 1) Решить задачу об остывании однородного тонкого стержня длиной l, начальная температура которого равна $u|_{t=0} = l - x$. Конец стержня $x = 0$ теплоизолирован, а конец $x = l$ поддерживается при постоянной температуре $u_0 = \mathrm{const}$.

2) Сфера радиусом b содержит растворенное вещество с начальной концентрацией $u_0 = \mathrm{const}$. Концентрация на поверхности сферы поддерживается постоянной, равной $u_1 > u_0$. Найти количество абсорбированного вещества при $t > 0$.

3) Найти распределение температуры в однородном шаре радиусом b, на поверхности которого задан постоянный тепловой поток q, а начальная температура равна $u|_{t=0} = u_0$, $u_0 = \mathrm{const}$.

Д. Найти распределение температуры в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на конце стержня $x = 0$ температура равна $u|_{x=0} = At$, $A = \mathrm{const}$, а на конце $x = l$ поддерживается нулевая температура. Начальная температура стержня равна нулю.

Решить смешанные задачи:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=1} = u_0 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = Ax(l-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin(2x)\cos x - x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

17. Контрольная работа № 3.

18. Цилиндрические функции и их свойства.

А. 1) Установить справедливость равенства

$$\frac{d}{dx}\big[x^\nu J_\nu(x)\big] = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

С его помощью доказать рекуррентное соотношение

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{1}$$

2) Вычислить интегралы

$$\int\limits_0^x t^\nu J_{\nu-1}(t)\,dt, \quad \int\limits_0^x tJ_0(t)\,dt, \quad \int\limits_0^x t^2 J_1(t)\,dt, \quad \int\limits_0^x t^3 J_0(t)\,dt.$$

3) Вычислить интеграл $\int\limits_0^l xJ_0(ax)J_0(bx)\,dx$, $a, b = \text{const}$, $a \neq b$. Рассмотреть случай, когда $a = \dfrac{\mu_k}{l}$, $b = \dfrac{\mu_n}{l}$, где μ_k и μ_n — положительные корни одного из уравнений

$$J_0(\mu) = 0, \quad J'_0(\mu) = 0, \quad \mu J'_0(\mu) + hJ_0(\mu) = 0.$$

4) Показать, что функции

$$u_n(r,\varphi) = I_n(\lambda r)\cos(n\varphi), \quad v_n(r,\varphi) = I_n(\lambda r)\sin(n\varphi), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $I_n(x)$ — цилиндрическая функция порядка n от чисто мнимого аргумента, т. е. $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 u = 0.$$

Д. 1) Установить справедливость равенства

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

С его помощью получить рекуррентное соотношение

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{2}$$

2) Используя формулы (1) и (2), доказать равенства

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x} J_\nu(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) = J_{\nu-1}(x) - 2J'_\nu(x).$$

3) Используя свойства гамма-функции, доказать тождества

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

4) Вычислить интеграл $\int\limits_0^l x J_0^2(ax)\,dx$, $a = \text{const}$. Найти квадрат нормы цилиндрических функций Бесселя $\left\| J_0\left(\frac{\mu_k x}{l}\right)\right\|^2$, где μ_k — положительный корень одного из уравнений

$$J_0(\mu) = 0, \quad J_0'(\mu) = 0, \quad \mu J_0'(\mu) + hJ_0(\mu) = 0.$$

19. Применение цилиндрических функций к решению однородных смешанных задач.

А.: 85, 86, 89.
Д.: 87, 88.

Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиусом l, закрепленной по краю, если начальные скорости ее точек равны нулю, а начальное отклонение $u|_{t=0} = hJ_0\left(\frac{\mu_n r}{l}\right)$, $h = \text{const}$. Здесь μ_n — положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

20. Метод разделения переменных для неоднородных дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах. I.

А.: 90, 94, 109.
Д.: 91, 93, 110.

21. Метод разделения переменных для неоднородных дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах. II.

А.: 95, 96, 98, 99, 106.
Д.: 97, 100, 102, 103, 105.

22. Контрольная работа № 4.

23. Решение краевых задач для эллиптических уравнений в прямоугольных областях.

А.: 113, 116, 118, 119, 121.
Д.: 114, 115, 117, 120, 122.

24. Метод Фурье для круговых областей.

А.: 123 (3), 124 (3), 125 (1), 126 (3), 127, 130.
Д.: 123 (1,2), 124 (1,2), 125 (2,3), 126 (1,2), 131.

25. Метод разделения переменных для цилиндрических областей.

А.: 132, 133.

Найти стационарное распределение температуры в конечном цилиндре $\Omega = \big\{(r, \varphi, z) : 0 \leqslant r \leqslant l,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h\big\}$, если температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность цилиндра покрыта непроницаемым для тепла чехлом, а температура верхнего основания равна $u\big|_{z=h} = f(r)$. Рассмотреть частный случай, когда $f(r) = u_0 r^2$.

Д.: 134—136.

26. Решение краевых задач для шаровых областей.

А.: 137, 138, 140, 142, 143, 145.
Д.: 139, 141, 144, 146, 147.

27. Контрольная работа № 5.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Тренировочный вариант контрольной работы № 1

1. Привести к канонической форме уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos x\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. Привести к канонической форме уравнение с тремя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

3.2. Примерные варианты контрольной работы № 1

Вариант 1

1. Привести к канонической форме уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. Привести к канонической форме уравнение с тремя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 5\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Вариант 2

1. Привести к канонической форме уравнение

$$y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3. Привести к канонической форме уравнение с тремя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Вариант 3

1. Привести к канонической форме уравнение

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\,\frac{\partial u}{\partial x}-y\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3. Привести к канонической форме уравнение с тремя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Вариант 4

1. Привести к канонической форме уравнение

$$e^{2x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2e^{x+y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e^{2y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xu.$$

2. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип уравнения:

$$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2\,\frac{\partial u}{\partial x}-2\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

3. Привести к канонической форме уравнение с тремя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-6\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3.3. Тренировочный вариант контрольной работы № 2

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{5\pi x}{2l} + 4\sin\dfrac{7\pi x}{2l}, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(l-x)t^2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4t(\sin x - x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u\Big|_{x=0} = 3, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + t, \qquad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = 3, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x + \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3.4. Примерные варианты контрольной работы № 2

Вариант 1

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = v_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad v_0 = \mathrm{const}. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t \sin \dfrac{5x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sin \dfrac{x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3x - 2t, \quad 0 < x < \pi, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = \pi t, \\ u\big|_{t=0} = e^{-x} \sin x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = h(1 - x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad h = \mathrm{const}. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}\cos(2x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 7\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2t - 7x - e^{-x}\sin(3x), \quad 0 < x < \pi, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\Big|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad v_0 = \mathrm{const}. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos t \sin(4x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 2t, \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = A\cos x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1 + B\cos(3x), \quad A, B = \text{const}. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \cos \dfrac{7x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \cos \dfrac{x}{2}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8u + 2x(1-4t) + \cos(3x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = t, \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi t}{2}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3.5. Тренировочный вариант контрольной работы № 3

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad u_0 = \mathrm{const} > 0. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x \sin x - t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 1 + t, \quad u|_{x=\pi} = 1 + t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2(3 - t) - 2x + 2\sin x \sin(2x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 2, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^3 + \pi, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3.6. Примерные варианты контрольной работы № 3

Вариант 1

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = u_0, \quad u_0 = \mathrm{const}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 9u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\sin^2 t\cos(3x) - 9x^2 - 2, \quad 0 < x < \pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 2\pi, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = x^2 + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt(1-2t) + 2\sin(2x)\cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = q, \quad q = \mathrm{const}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=1} = t, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 2e^x \sin(\pi x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt(2-t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 2t^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\pi} = 2t^2, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 2\cos(3x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = q, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = q, \quad q = \mathrm{const}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 6u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t(1-3t) - 6x + \cos x \cos(2x), \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 1, \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + \dfrac{\pi}{2}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(1-t) + \sin(2x), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = \pi t, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = 2\sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -q, \quad u|_{x=l} = 0, \quad q = \text{const}, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt(2-t) + \cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t^2, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = t^2, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 2\cos(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt(1-2t) + 2\sin(2x)\cos x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3.7. Тренировочный вариант контрольной работы № 4

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (t^2+1)\,J_0(\mu_n x), \quad \mu_n \text{ — положительный} \\ \text{корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \left| u|_{x=0} \right| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\cos(2t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \left| u|_{x=0} \right| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \dfrac{J_0(2x)}{2J_0(2)} - \dfrac{1}{2} + J_0(\mu_n x), \quad \mu_n \text{ — положительный} \\ \text{корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + \sin t J_1(\mu_n x), \quad \mu_n \text{ — положительный} \\ \text{корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \left| u|_{x=0} \right| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3.8. Примерные варианты контрольной работы № 4

Вариант 1

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2t^2 + t + 1)J_0(\mu_1 x), \quad \mu_1 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\cos t, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 2 - \dfrac{2J_0(x)}{J_0(1)} + 4J_0(\mu_1 x), \quad \mu_1 \text{ — положительный} \\ \text{корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + (\sin t + \cos t)J_1(\mu_1 x), \quad \mu_1 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_1(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (t^2+t+2)J_0(\mu_2 x), \quad \mu_2 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \cos(3t), \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \dfrac{J_0(3x)}{9J_0(3)} - \dfrac{1}{9} + 2J_0(\mu_2 x), \quad \mu_2 \text{ — положительный} \\ \text{корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + (2\sin t + \cos t)J_1(\mu_2 x), \quad \mu_2 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_1(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2t^2 + 2t + 1)J_0(\mu_3 x), \quad \mu_3 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\sin(2t), \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \dfrac{3J_0(2x)}{2J_0(2)} - \dfrac{3}{2} + 2J_0(\mu_3 x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \mu_3 \text{ — положительный корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + (\sin t + 2\cos t)J_1(\mu_3 x), \quad \mu_3 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_1(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + (t^2+2t+2)J_0(\mu_4 x), \quad \mu_4 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \sin(4t), \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{J_0(4x)}{4J_0(4)} + 4J_0(\mu_4 x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \mu_4 \text{ — положительный корень уравнения} \quad J_0(\mu) = 0. \end{cases}$$

3. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{u}{x^2} + (2\sin t + 3\cos t)J_1(\mu_4 x), \quad \mu_4 \text{ — положи-} \\ \text{тельный корень уравнения} \quad J_1(\mu) = 0, \quad 0 \leqslant x < 1, \quad t > 0, \\ \big|u|_{x=0}\big| < \infty, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

3.9. Тренировочный вариант контрольной работы № 5

1. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = \sin\dfrac{3\pi y}{b} + \sin\dfrac{4\pi y}{b}, \quad u\big|_{x=a} = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \\ u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=b} = \sin\dfrac{\pi x}{a} + \sin\dfrac{5\pi x}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$$

2. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad a < r < b, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u\big|_{r=a} = A\cos\varphi, \quad u\big|_{r=b} = B\sin 2\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

3. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = -q, \qquad u\big|_{z=h} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant l, \\ \left|u\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h. \end{cases}$$

4. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u\big|_{r=1} = \sin\theta\sin\varphi\,(5 + 6\cos\theta), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 12\sin 2\theta\sin\varphi. \end{cases}$$

3.10. Примерные варианты контрольной работы № 5

Вариант 1

1. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = \sin\dfrac{\pi y}{b} + \sin\dfrac{6\pi y}{b}, \quad u\big|_{x=a} = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \\ u\big|_{y=0} = \sin\dfrac{2\pi x}{a}, \quad u\big|_{y=b} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$$

2. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \left(u - \dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = A\sin^2\varphi, \quad A = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

3. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \left|u\big|_{r=0}\right| < \infty, \quad u\big|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ u\big|_{z=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} = q, \quad q = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

4. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u\big|_{r=1} = 2\cos 2\varphi\, \sin^2\theta, \quad u\big|_{r=2} = 2\cos\varphi\, \sin\theta. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=a} = \sin\dfrac{2\pi y}{b}, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \\ u\big|_{y=0} = \sin\dfrac{7\pi x}{a}, \quad u\big|_{y=b} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$$

2. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r > a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = A\cos 2\varphi, \quad A = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

3. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \left|u|_{r=0}\right| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = u_0, \quad u_0 = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

4. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = 3\cos\varphi\,\sin\theta, \quad u|_{r=2} = 2\cos 2\varphi\,\sin^2\theta. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = \sin\dfrac{3\pi y}{b}, \quad u|_{x=a} = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \\ u|_{y=0} = \sin\dfrac{2\pi x}{a} + \sin\dfrac{5\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$$

2. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = A\cos\varphi, \quad u|_{r=2} = 1 + B\sin 2\varphi, \quad A, B = \mathrm{const}. \end{cases}$$

3. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = -q, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = 0, \quad q = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

4. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = \sin\theta\,(\sin\varphi + \sin\theta). \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = \sin\dfrac{\pi y}{b} + \sin\dfrac{4\pi y}{b}, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \\ u|_{y=0} = \sin\dfrac{3\pi x}{a} + \sin\dfrac{7\pi x}{a}, \quad u|_{y=b} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \end{cases}$$

2. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 1 < r < 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = A, \quad u|_{r=2} = B\sin 2\varphi, \quad A, B = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

3. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leqslant r < l, \quad 0 < z < h, \\ \big|u|_{r=0}\big| < \infty, \quad u|_{r=l} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h} = q, \quad q = \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant r \leqslant l. \end{cases}$$

4. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ u|_{r=1} = \sin\theta\,(\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta). \end{cases}$$

3.11. Вопросы к экзамену

1. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

2. Теорема о характеристиках. Приведение дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными к канонической форме.

3. Классификация дифференциальных уравнений второго порядка со многими независимыми переменными.

4. Постановки задач для уравнений гиперболического типа.

5. Метод Даламбера.

6. Корректность задачи Коши для уравнения колебаний струны. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных функций.

7. Метод разделения переменных для однородного уравнения колебаний струны. Физическая интерпретация решения.

8. Достаточный признак существования классического решения смешанной задачи по методу Фурье.

9. Понятие обобщенного решения.

10. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения колебаний струны. Общий случай неоднородной смешанной задачи.

11. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

12. Общая схема метода Фурье для уравнения колебаний струны с переменными коэффициентами.

13. Единственность решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны.

14. Колебания прямоугольной мембраны.

15. Вывод уравнения теплопроводности.

16. Постановки задач для уравнений параболического типа.

17. Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

18. Следствия из принципа максимума для уравнения теплопроводности.

19. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

20. Метод Фурье для однородного уравнения теплопроводности. Физическая интерпретация решения.

21. Метод Фурье для неоднородного уравнения теплопроводности. Общий случай неоднородной смешанной задачи.

22. Граничные условия третьего рода для уравнения теплопроводности.

23. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности.

24. Особый случай постановки задачи Штурма — Лиувилля.

25. Цилиндрические функции Бесселя.

26. Распределение тепла в бесконечном круговом цилиндре.

27. Собственные колебания круглой мембраны.

28. Многочлены Лежандра.

29. Присоединенные функции Лежандра.

30. Применение многочленов Лежандра при решении смешанных задач.

31. Многочлены Чебышева — Эрмита.

32. Уравнение Шредингера.

33. Постановки краевых задач для уравнений эллиптического типа.

34. Корректность задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

35. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

36. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.

37. Метод разделение переменных для круговых областей.

38. Интеграл Пуассона для круга.

39. Стационарное распределение тепла в цилиндре конечных размеров.

40. Сферические функции. Ортогональность сферических функций.

41. Решение краевых задач для шаровых областей.

42. Уравнение Гельмгольца. Связь уравнения Гельмгольца с уравнениями гиперболического и параболического типов.

43. Фундаментальные решения уравнения Гельмгольца.

44. Принцип максимума для уравнения Гельмгольца. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.

45. Особенности решения краевых задач для уравнения Гельмгольца.

46. Метод Фурье для уравнения Гельмгольца в полярных координатах.

47. Метод разделения переменных для уравнения Гельмгольца в сферических координатах.

48. Объемный потенциал. Непрерывность объемного потенциала.

49. Свойства объемного потенциала.

50. Поверхностный потенциал простого слоя и его свойства.

51. Поверхностный потенциал двойного слоя и его свойства.

52. Первая и вторая формулы Грина.

53. Основное интегральное представление для гармонических функций.

54. Свойства гармонических функций.

55. Решение краевых задач методом функций Грина.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Егоров, А. А. Метод Фурье решения смешанных задач для неоднородных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами: учебно-методическая разработка для студентов физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий / А. А. Егоров, И. В. Рыбаченко; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической физики. — Минск: БГУ, 2021. — 58 с. — URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/268377.

2. Емельянов, В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач : учебное пособие для студ. высших учебных заведений, обуч. по направлениям подготовки «Техническая физика» и «Прикладная механика» / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. — Изд. 4-е, стер. — Санкт-Петербург; Москва ; Краснодар : Лань, 2024. — 213 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/390614.

3. Карчевский, М. М. Лекции по уравнениям математической физики : учебное пособие [для вузов] / М. М. Карчевский. — Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2022. — 163 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/321200.

4. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики : учебное пособие для студентов высших учебных заведений по математическим специальностям / В. И. Корзюк. — Изд. 2-е, испр. и доп. — Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2021. — 479 с.

5. Палин, В. В. Методы математической физики. Лекционный курс : учебное пособие для вузов, для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям / В. В. Палин, Е. В. Радкевич ; МГУ им. М. В. Ломоносова. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2021. — 222 с.

Дополнительная литература

1. Будак, Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — М.: Физматлит, 2003. — 688 с.

2. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1984. — 367 с.

3. Кошляков, Н. С. Основные дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Физматгиз, 1962. — 767 с.

4. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. — М.-Л.: Гостехиздат. — 1951.

5. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1966. — 474 с.

6. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1981. — 435 с.

7. Никифоров, А. Ф. Основы специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. — М.: Наука, 1974. — 470 с.

8. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 1968. — 112 с.

9. Деревич, И. В. Практикум по уравнениям математической физики: учебное пособие / И. В. Деревич. — СПб.: Лань, 2018. — 428 с.

10. Егоров, А. А. Практикум по методам математической физики. Часть 2: учеб.-метод. пособие / А. А. Егоров, И. В. Рыбаченко. Минск: БГУ, 2014. — 119 с.

11. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 2004. — 798 с.

12. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. — СПб.: Лань, 2010. — 358 с.

13. Русак, В. Н. Математическая физика / В. Н. Русак. — М.: Комкнига, 2006. — 245 с.

4.2. Электронные ресурсы

1. Егоров, А. А. Практикум по методам математической физики. Часть 1 [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / А. А. Егоров, И. В. Рыбаченко. — 2013. — Режим доступа : http://elib.bsu.by/handle/123456789/32147. — Дата доступа : 23.10.2024.

2. Егоров, А А. Практикум по методам математической физики. Часть 2 [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / А. А. Егоров, И. В. Рыбаченко. — 2014. — Режим доступа : http://elib.bsu.by/handle/123456789/97888. — Дата доступа : 23.10.2024.

3. Задачи по математической физике и их решение [Электронный ресурс] : пособие для студ. физического фак. спец. 1-31 04 01 «Физика» / [авт.-сост. В. Н. Русак, Н. К. Филиппова]. — 2007. — Режим доступа : http://elib.bsu.by/handle/123456789/2103. — Дата доступа : 23.10.2024.

4. Численные методы [Электронный ресурс] : методические указания к лабораторному практикуму : в 2 ч. / БГУ, Факультет радиофизики и компьютерных технологий, Каф. информатики и компьютерных систем. — 2019. — Режим доступа : http://elib.bsu.by/handle/123456789/220897. — Дата доступа : 23.10.2024.

4.3. Учебная программа по дисциплине «Уравнения математической физики»

Деревяго, А. Н. Уравнения математической физики: учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для специальностей: 7-07-0533-01 Фундаментальная физика (профилизации специальности: Теоретическая физика и астрофизика, Экспериментальная физика); 7-07-0533-02 Ядерные физика и технологии (профилизации специальности: Физика ядерных реакторов и установок, Ядерная физика и электроника) № УД-1668/н/ А. Н. Деревяго, А. А. Егоров. — URI документа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/322321. — Дата публикации: 15-июл-2024.