

**О МОДИФИКАЦИИ УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ГЛАДКОСТИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ
ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА**

А.Н. Таныгина

Белорусский государственный университет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
anastminsk@gmail.com

Пусть X и Y — банаховы пространства, f и g — определенные на замкнутом шаре $\overline{B(x_0, R)} \subset X$ и принимающие значения из Y нелинейные операторы, причем f дифференцируем в каждой внутренней точке шара $B(x_0, R)$, а g — недифференцируемый оператор. Одним из наиболее эффективных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

является обобщенный метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

где x_0 — заданное начальное приближение.

Среди известных оценок скорости сходимости последовательных приближений (2) к решению уравнения (1) наиболее точными являются оценки, полученные в работе [1], где для анализа скорости сходимости процесса (2) был применен метод мажорант Л.В. Канторовича [2]. В случае, когда $g = 0$, наиболее точные оценки скорости сходимости процесса (2) были получены в работах А. Гальперина и З. Ваксмана [3, 4] при новом предположении о гладкости оператора f , названном авторами регулярной гладкостью, а в работе [5] эти результаты были обобщены на уравнения вида

(1) при предположении, что оператор f является регулярно гладким, а оператор g удовлетворяет модифицированному условию Липшица

$$\|g(x'') - g(x')\| \leq \psi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x', x'' \in \overline{B(x_0, t)}, \quad (3)$$

где ψ — неубывающая функция на промежутке $[0, R]$.

Следует отметить, что смысл понятия регулярной гладкости из [3, 4] является достаточно сложным и в ходе рассуждений в работе [4] на самом деле используется не свойство регулярной гладкости, а другое, вытекающее из него условие. В работе [6] было показано, что условие регулярной гладкости для оператора f может быть заменено более простым условием, где приращение производной оператора f оценивается приращением непрерывной строго возрастающей вогнутой функции $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ со свойством $\omega(0) = 0$:

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+ + \|x'' - x'\|) - \omega((\chi - r - \|x'' - x'\|)^+). \quad (4)$$

Здесь $x', x'' \in \overline{B(x_0, R)}$, $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$, $r = \|x' - x_0\|$, $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}$. Также предполагается без ограничения общности, что $f'(x_0) = I$.

При увеличении χ величина $(\chi - r - \|x'' - x'\|)^+$ увеличивается и, следовательно, правая часть неравенства (4) уменьшается. Поэтому чем больше χ , тем лучше оценка для $\|f'(x'') - f'(x')\|$, что дает возможность получить более точные оценки и для последовательных приближений.

Приведем основной результат о сходимости процесса (2) к точному решению x_* уравнения (1) при предположении, что оператор f удовлетворяет модифицированному условию регулярной гладкости (4), а оператор g — условию (3).

Пусть $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$, $\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$, a — положительное число, удовлетворяющее неравенству $a \geq \|f(x_0) + g(x_0)\|$. Обозначим через W функцию числового аргумента t :

$$W(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - t(1 - \omega(\chi)) + \Psi(t), \quad (5)$$

и определим числовую последовательность $\{t_n\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{W(t_n)}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_n)]} \quad (n = 0, 1, \dots; t_0 = 0). \quad (6)$$

Теорема. Пусть существует постоянная $\chi \in [0, \omega^{-1}(1)]$, удовлетворяющая условию

$$a < \Omega(\chi) - \chi\omega(\chi) + \chi - \Psi(\chi),$$

оператор f удовлетворяет на $\overline{B(x_0, R)}$ условию (4) с таким χ , оператор g удовлетворяет условию (3) и функция (5) имеет единственный нуль $t_* \leq R$ на отрезке $[0, \chi]$. Тогда

- 1) уравнение (1) имеет единственное решение x_* в шаре $B(x_0, t_*)$;
- 2) последовательные приближения (2) определены для всех $n = 0, 1, \dots$, принадлежат шару $\overline{B(x_0, t_*)}$ и сходятся к x_* ;
- 3) при всех $n = 0, 1, \dots$ справедливы оценки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_{n+1} - t_n,$$

$$\|x_* - x_n\| \leq t_* - t_n,$$

где последовательность $\{t_n\}$ определена по правилу (6), монотонно возрастает и сходится к t_* .

Литература

1. Забрейко П. П., Злепко П. П. Об обобщении метода Ньютона–Канторовича на уравнения с недифференцируемыми операторами // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 3. С. 365–369.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
3. Galperin A., Waksman Z. Newton's method under a weak smoothness assumption // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35, No 1–3. P. 207–215.
4. Galperin A., Waksman Z. Regular smoothness and Newton's method // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, No 7–8. P. 813–858.

5. Таныгина А. Н. *Обобщенный метод Ньютона–Канторовича для уравнений с недифференцируемыми операторами* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 6. С. 17–22.
6. Забрейко П. П., Таныгина А. Н. *Модификация условия Гальперина–Ваксмана для решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона–Канторовича* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 8–12.