

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. Н. Труш

**УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
И МОДЕЛИ GARCH
В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ**

Научное электронное издание

Минск, БГУ, 2024

ISBN 978-985-881-595-0

© Труш Н. Н., 2024

© БГУ, 2024

УДК 330.43
ББК 65в6

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат физико-математических наук, доцент *М. С. Абрамович*;
кандидат технических наук, доцент *Н. В. Лапицкая*

Труш, Н. Н. Устойчивые распределения и модели GARCH в финансовой математике [Электронный ресурс] / Н. Н. Труш. – Минск : БГУ, 2024. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-985-881-595-0.

Представлены свойства безгранично делимых, устойчивых и регулярно меняющихся случайных величин, параметризации устойчивых распределений, а также соотношения между параметрами. Рассматриваются процессы Леви и их связь с безгранично делимостью. Исследуются обобщенные параметрические модели с условной гетероскедастичностью, причем в качестве шума используются устойчивые распределения.

Минимальные системные требования:

PC, Pentium 4 или выше;
RAM 1 Гб; Windows XP/7/10;
Adobe Acrobat.

Оригинал-макет подготовлен в программе Adobe Indesign

Редактор *Е. Н. Кравченко*
Дизайн обложки *В. П. Явуз*
Технический редактор *В. П. Явуз*
Компьютерная верстка *Е. В. Анискевич*
Корректор *И. В. Сазонова*

Подписано к использованию 20.05.2024. Объем 3,8 МБ.

Белорусский государственный университет.
Управление редакционно-издательской работы.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.
Телефон: (017) 259-70-70.
e-mail: urir@bsu.by
<http://elib.bsu.by/>

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. О МОДЕЛЯХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С УСЛОВНОЙ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТЬЮ	8
1.1. Волатильность, риск и доходность	8
1.2. Модели с условной гетероскедастичностью	10
1.3. Результаты исследования моделей с условной гетероскедастичностью	14
1.4. Общий подход к прогнозированию волатильности	16
ГЛАВА 2. БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ, УСТОЙЧИВЫЕ И РЕГУЛЯРНО МЕНЯЮЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	19
2.1. Безгранично делимые меры	19
2.2. Формула Леви – Хинчина	27
2.3. Класс устойчивых распределений.....	28
2.4. Явное представление устойчивых случайных величин	33
2.5. Моделирование устойчивых случайных величин	35
2.6. Регулярно меняющееся распределение	38
2.7. Устойчивый предел преобразования мартингала.....	41
ГЛАВА 3. ПАРАМЕТРИЗАЦИИ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА	45
3.1. Параметризации и соотношения между параметрами.....	45
3.2. Преобразование Лапласа устойчивых случайных величин	58
ГЛАВА 4. ПРОЦЕССЫ АВТОРЕГРЕССИИ С УСТОЙЧИВЫМИ ОСТАТКАМИ	63
4.1. Классические параметрические модели	63
4.2. Оценки параметров для процесса авторегрессии	67
4.3. М-оценка Хьюбера для процесса авторегрессии с симметричными устойчивыми остатками	69
ГЛАВА 5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH	76
5.1. Модели ARCH/GARCH и их вероятностные свойства.....	76
5.2. Краткий обзор методов оценки параметров для моделей ARCH/GARCH	80
5.3. Оценка параметров для модели GARCH(1,1) с устойчивыми остатками	87

5.4. Модификация метода максимального правдоподобия для оценки параметров GARCH(1,1) модели с регулярно меняющимися ошибками	96
5.5. М-оценка параметров для модели GARCH(1,1) с регулярно меняющимися остатками	103
ГЛАВА 6. ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ	113
6.1. Определение процессов Леви и их связь с безграничной делимостью	113
6.2. Процессы Броуна, Пуассона и Леви	118
6.3. Примеры распределений и процессов Леви, используемые в финансовой математике	123
ГЛАВА 7. ОЦЕНКА ИНДЕКСА «ТЯЖЕЛОГО ХВОСТА» РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	124
7.1. Регулярное изменение решения стохастического уравнения	124
7.2. Регулярное изменение совместного распределения модели GARCH и оценка индекса «тяжелого хвоста» модели ARCH(1) с устойчивыми остатками	126
7.3. Оценка Hill индекса «тяжелого хвоста» устойчивых распределений	134
7.4. Поведение «тяжелых хвостов» процесса GARCH(1,1) с устойчивыми остатками	138
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ	141

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня в научных изданиях мало внимания уделяется исследованию направлений статистического анализа временных рядов, которые связаны с безгранично делимыми, устойчивыми, регулярно меняющимися распределениями и процессами, различными моделями с условной гетероскедастичностью, а также с преобразованием Лапласа устойчивых случайных величин, построением состоятельных оценок параметров различных параметрических моделей случайных процессов с устойчивыми и регулярно меняющимися инновациями (остатками), оценкой индекса «тяжелых хвостов» устойчивых распределений и процессов.

До недавнего времени основные концепции теории финансов основывались на предположении, что доходы от активов подчиняются нормальному распределению. Заметим, что доходы от финансовых активов являются совокупным результатом огромного количества информации и индивидуальных решений, поступающих практически непрерывно. Начиная с работы Л. Башелье в 1900 г., модели, описывающие финансовые активы, были основаны на гауссовском распределении. Это подтверждалось центральной предельной теоремой, согласно которой сумма большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией имеет нормальное распределение. Однако известно, что характерные для распределения доходов эмпирические наблюдения имеют «тяжелые хвосты», асимметрию и куртозис, отличные от нормального распределения.

Французский математик Б. Мандельброт в 1963 г. и американский экономист Ю. Фама в 1965 г. предложили использовать устойчивые распределения, теория которых была разработана французским математиком П. Леви в 1920 г. В настоящее время, хотя и существуют альтернативные распределения для гауссовского, наиболее подходящими для исследования финансовых активов все же являются устойчивые распределения. Это подтверждается обобщенной центральной предельной теоремой: если существуют предельные распределения нормированных и центрированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, то они обязательно являются устойчивыми. Данный вид распределений используется для исследования экстремальных явлений (падение рынка или природные катастрофы) и в других областях человеческой деятельности (страхование).

После работ Б. Мандельброта и Ю. Фама интерес к устойчивым распределениям для моделирования доходов финансовых активов возрос, поскольку их вычисления уже не вызвали больших трудностей. Научные исследования, связанные с устойчивыми распределениями и их приложениями, ведутся учеными во многих странах мира.

Задачи эконометрики и финансовой математики заключаются в отображении использования предыдущей информации для прогнозирования исследуемых временных рядов. Для прогнозирования волатильности хорошо проявили себя спецификации, предложенные Р. Энглем в работе, использующей понятие гетероскедастичности временных рядов [39]. Его концепция авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH) открыла новое важное направление в финансовой математике, прежде всего в моделировании доходностей финансовых активов [40].

В 1986 г. Т. Боллерслев предложил обобщенную (*generalized*) модель ARCH – GARCH, которая стала рабочим инструментом при исследовании финансовых временных рядов с огромным количеством различных способов применения методологии ARCH [22].

В главе 1 вводятся понятия «волатильность», «доходность» и «гетероскедастичность», дается обзор исследований по моделям ARCH и GARCH, общий подход к прогнозированию волатильности.

В главе 2 рассматриваются примеры безгранично делимых случайных величин и мер, исследуются их свойства; доказывается теорема о виде характеристической функции составных случайных величин Пуассона; определяется класс устойчивых распределений и представление Леви – Хинчина для их характеристической функции; объясняется смысл параметров устойчивых случайных величин и приводятся теоремы об их явном представлении и алгоритмах их моделирования; определяются регулярно меняющиеся распределения и указываются некоторые их свойства; приводятся результаты устойчивого предела преобразования мартингала.

Исследования различных параметризаций устойчивых случайных величин и нахождение соотношений между их параметрами представлены в главе 3, также здесь рассматривается преобразование Лапласа устойчивых случайных величин.

В главе 4 вводятся понятия слабого и сильного белых шумов и на их основе выводятся другие, такие как авторегрессии, скользящего среднего и смешанного процесса авторегрессии и скользящего среднего; показана возможность устойчивого распределения процессов и приведен вид их параметров, выраженных через параметры остатков; рассматриваются оценки параметров для процесса авторегрессии с симметричными устойчивыми остатками.

В главе 5 рассматриваются статистические свойства, оценка параметров модели GARCH и процесс $GARCH(p, q)$, а также приводятся результаты существования единственного стационарного решения; определяются модели ARCH и GARCH; представлен обзор методов оценки параметров для данных моделей; исследуются оценки параметров моделей $GARCH(1,1)$ с устойчивыми остатками; доказывается их состоятельность и находится

асимптотическое распределение; предложена модификация метода максимального правдоподобия для оценки параметров модели GARCH(1,1) с регулярно меняющимися остатками; доказана их состоятельность и асимптотическая нормальность; исследованы М-оценки параметров для данной модели с регулярно меняющимися остатками; найдены условия, при которых оценки будут иметь устойчивые распределения, включая и нормальное распределение.

В главе 6 отражены процессы Леви, которые используются в построении моделей GARCH(1,1) в качестве инновационных последовательностей; определяются процессы Леви и показана их связь с безгранично делимыми случайными величинами; приводится вид характеристической функции для введенных процессов и описывается смысл параметров, входящих в равенство Леви – Хинчина; определяются кадлаг-функции и процессы, вводится определение процессов Леви через кадлаг-процессы; рассматриваются субординаторы и основное их свойство; определяются процессы броуновского движения, Пуассона и движения Леви, приводятся алгоритмы их моделирования; дается определение самоподобных процессов, называются распределения и процессы Леви, используемые в финансовой математике.

В главе 7 вводится понятие регулярного изменения решения стохастического уравнения и регулярного изменения совместных распределений; вычисляются абсолютные моменты для устойчивых случайных величин; исследуется оценка индекса «тяжелого хвоста» устойчивых распределений, рассматривается поведение «тяжелых хвостов» процессов GARCH(1,1) с устойчивыми остатками.

Некоторые результаты, приведенные в разделах 5.3–5.5, 7.2, 7.3, получены совместно с бывшим аспирантом Ле Хонг Шоном.

Автор выражает благодарность доценту, кандидату физико-математических наук М. С. Абрамовичу и доценту, кандидату технических наук Н. В. Лапицкой за замечания и пожелания по улучшению издания, а также О. Г. Кадуриной – за помощь при подготовке авторского оригинала.

ГЛАВА 1

МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С УСЛОВНОЙ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТЬЮ

1.1. Волатильность. Риск и доходность

Волатильность – изменчивость, вариация во времени величины финансового или экономического показателя (актива). Волатильность используется в качестве как непосредственной меры риска, так и одной из важных величин, применяемых в более сложных методиках измерения риска. Мерой риска удобнее считать волатильность доходности, так как величина дохода зависит от стоимости актива на начало и конец отчетного периода, а также от характера изменения этой стоимости в течение всего отчетного периода.

Обозначим через P_t стоимость актива, или значение индекса цены некоторого финансового инструмента в момент времени. Тогда абсолютное изменение стоимости актива между моментами времени t и $t - 1$ определяется как $P_t - P_{t-1}$.

Относительное изменение стоимости (арифметическая или дискретная доходность) для заданного временного периода определяется как

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Логарифм изменения стоимости (доходность или геометрическая доходность) актива определяется как

$$y_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}},$$

причем $\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \frac{P_{t-1} + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \ln \left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \right) = \ln(1 + r_t).$

Используя формулу Тейлора $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \rightarrow 0$, можем записать следующее приближенное равенство:

$$\ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

при малых значениях арифметической доходности $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$.

На практике основная причина, по которой работа с доходностями активов предпочтительнее, чем с непосредственными ценами активов, заключается в том, что доходности имеют более привлекательные статистические свойства. Относительные и логарифмические доходности предпочтительнее абсолютных изменений стоимости потому, что последние не показывают изменения относительно некоторого заданного ценового уровня. Преимуществом логарифмической доходности является то, что она очень легко применяется для множества периодов (например, доходность за двухмесячный интервал времени может быть представлена как сумма двух одномесячных доходностей). Исходя из этого примем T за некоторый период времени, тогда

$$\ln \frac{P_t}{P_0} = \ln \frac{P_1}{P_0} + \ln \frac{P_2}{P_1} + \dots + \ln \frac{P_T}{P_{T-1}}.$$

Таким образом, далее под доходностью будем понимать логарифмическую доходность.

В сущности, волатильность – это мера неопределенности инвестиции. Любое движение цены может быть разбито на две части:

- ожидаемое;
- неожиданное.

Ожидаемая (не волатильная) часть движения цены инвестиции обычно описывается понятием «ожидаемая ставка доходности» (*expected growth rate*). Для короткого промежутка времени большинство инвесторов могут «предсказать» будущую норму доходности исходя из недавней модели поведения роста цены. Неожиданная часть движения цены инвестиции и есть ее волатильность. Эта часть может расти и падать с равной вероятностью, так как по определению она непредсказуема. Ввиду неопределенности относительно движения цены существует возможность распределения цен вокруг своей ожидаемой цены. Это распределение вероятности лежит в основе концепции волатильности: описывая его форму и размер, по сути, описываем волатильность. Последняя является случайной составляющей изменения доходности финансового инструмента и рассматривается как

$$r_t = \mu + \sigma_t z_t,$$

где μ – среднее изменение цены (тренд), ожидаемая часть ее движения; σ_t – волатильность; z_t – случайная величина (временной ряд) с нулевым математическим ожиданием $t \in Z$.

Подразумевается, что движение цены за некоторый интервал рассматривается как некое планируемое трендовое движение и случайное отклонение от тренда, определяемое волатильностью. Последняя является

случайной величиной или (при рассмотрении изменения цены за несколько интервалов) временным рядом.

Для выбора подходящей модели прогноза необходимо иметь представление об эмпирических закономерностях, которые должны быть учтены в конструируемой модели. Выделим некоторые устойчивые закономерности, характеризующие доходности финансовых активов:

- «кластерность» волатильности – значительные изменения цены актива часто следуют за другими значительными изменениями, тогда как слабые изменения обычно следуют за слабыми, т. е. за периодом высокой волатильности следует период низкой;

- «клевередж-эффект» – динамика финансовых инструментов, характеризующаяся таким феноменом, как отрицательная коррелированность доходности финансовых инструментов и волатильности. Так, если волатильность «мала», то цены стремятся к тому, чтобы их рост или падение длились как можно дольше; если же волатильность велика, то цены замедляют свой рост или падение, стремясь повернуть движение в противоположном направлении;

- «длинная память» – финансовые временные ряды, обладающие так называемой длинной памятью, что подразумевает наличие значимой автокорреляции между удаленными наблюдениями, т. е. прошлые доходности могут помочь предсказать доходности будущих;

- «тяжелые хвосты» – функция плотности условного распределения доходностей финансовых активов, характеризующиеся лептокуртичностью, т. е. более «тяжелыми хвостами» и большей вытянутостью (пикообразностью) в области среднего значения по сравнению с функцией плотности нормального распределения. Причиной выраженной ненормальности условных распределений являются выбросы, или «хвостовые события», – ошибки прогнозов, многократно превосходящие стандартное отклонение.

1.2. Модели с условной гетероскедастичностью

Актуальность исследований параметрических моделей, адекватно описывающих финансовые временные ряды, вызвана стремительным развитием финансовых рынков. Еще несколько десятилетий назад для исследований использовались достаточно простые аналитические инструменты, то сейчас, благодаря активному развитию программного обеспечения, разработке новых и усовершенствованию классических эконометрических моделей, конъюнктура финансовых рынков улучшилась. Результаты научно-исследовательских работ активно внедряются в финансовую сферу, что положительно влияет на дальнейшие разработки.

Одним из приоритетных направлений в развитии финансового моделирования является исследование динамики волатильности рынков. Адекватное моделирование волатильности играет важную роль в анализе финансовых рынков и отдельных активов. Волатильность моделируется для построения прогнозов и изучения принципов рыночной доходности, учитывается при оценке риска. Прогнозы могут использоваться для определения структуры финансового портфеля и оценки производных финансовых инструментов. Еще одним важным направлением является исследование динамики доходности финансовых рынков. Результаты исследований могут применяться для характеристики степени эффективности рынков.

Стремление разработать модель, которая сможет наиболее точно описывать реальное поведение финансового рынка и повышать точность прогнозирования, приводит к появлению новых классов эконометрических моделей и усовершенствованию уже существующих.

Долгое время использовалась модель класса ARMA, которая обобщает две простейшие: авторегрессии (AR – *autoregressive*) и скользящего среднего (MA – *moving average*). Однако финансовые временные последовательности обладают особенностями, которые традиционные модели могут учесть далеко не всегда, поэтому их требовалось усовершенствовать.

В ходе исследований, посвященных анализу финансовых рынков, был выявлен ряд специфических характеристик финансовых временных рядов. Наиболее важными выступают следующие: лептокуртозис, длительная память, условная гетероскедастичность, кластеризация волатильности, слабая или отсутствующая автокорреляция, эффект «рычага», «тяжелые хвосты» распределения доходностей.

Волатильность рынка изменяется с течением времени, сильные скачки порождают сильные, за слабыми скачками следуют слабые, т. е. возникают кластеры волатильности. Кластеризацию можно наблюдать на примере динамики валютных курсов. Само понятие «волатильность» характеризует изменчивость цены на что-либо, а ее формальной мерой является дисперсия. Изменчивость последней на различных наблюдаемых интервалах характеризуется гетероскедастичностью. Модели класса ARMA часто не могут адекватно описать временной ряд.

Проблемы оценки параметров математических моделей и индекса «тяжелого хвоста» распределений являются чрезвычайно важными в теории статистического анализа временных рядов. До 80-х гг. XX в. исследовались математические модели с условной дисперсией, не изменяющейся во времени, которые использовались для решения различных финансовых задач. Такие модели называются гомоскедастичными (*homoskedastic*).

В дальнейшем исследования были направлены в область классов математических моделей, у которых условная дисперсия изменяется во времени. Такие модели называются гетероскедастичными (*heteroskedastic*).

Примером гетероскедастичности являются такие финансовые модели, в которых зависимой величиной выступает рентабельность (доходность) активов или портфельные инвестиции. Условные гетероскедастичные процессы, используемые для анализа и исследования временных рядов, играют важную роль в современном финансовом управлении рисками. С их помощью пытаются решать различные финансовые задачи по наблюдениям за дискретными временными рядами [21; 41; 87; 88; 111].

Одним из наиболее часто встречаемых известных условных гетероскедастичных процессов является процесс авторегрессионной условной гетероскедастичной модели (*Autoregressive Conditionally Heteroscedastic – ARCH*) [39]. Название модели объясняется тем, что ее условная дисперсия является не константой во времени, а имеет авторегрессионную структуру. Основная идея модели ARCH состоит в различии между условными и безусловными моментами второго порядка. Процесс $\{y_t\}$ удовлетворяет модели ARCH(p), $p = 1, 2, \dots$, если

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2, \quad t \in Z,$$

где $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ – независимые, одинаково распределенные нормальные случайные величины; $\omega_0 > 0$, $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq p$.

Видно, что σ_t^2 является условной дисперсией процесса, представляется как линейная регрессия с квадратами предыдущих наблюдений. Эта концепция и конкретная спецификация, а также примеры применения новой модели к финансовым и макроэкономическим временным рядам были впервые представлены в работе Р. Ф. Энгле [39], за которой последовали многочисленные модификации базовой конструкции.

В 1986 г. Т. Боллерслев [22; 23] и С. Дж. Тейлор [115] расширили класс модели ARCH обобщенным авторегрессионным условным гетероскедастичным процессом (*Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedastic – GARCH*). Модели ARCH/GARCH стали широко распространенными инструментами для исследования временных рядов с помощью гетероскедастичных моделей. Процесс $\{y_t\}$ удовлетворяет модели GARCH(p, q), $p, q = 1, 2, \dots$, если

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in Z,$$

где $\beta_j \geq 0$, $1 \leq j \leq q$.

Т. Боллерслев и С. Дж. Тейлор доказали, что необходимым условием для существования единственного стационарного решения модели GARCH(p, q) является $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Условие следует из того, что для квадратов модели GARCH(p, q) имеет место представление в виде модели ARMA с шумом $\{y_t^2 - \sigma_t^2\}$. Тогда же стало понятно, что шум модели ARMA не независимая, одинаково распределенная последовательность, а величина, которая имеет бесконечный момент второго порядка. В 1990 г. Д. Нельсон нашел критерий существования единственного стационарного решения модели GARCH(1,1) [99]. Затем П. Боуджерол и Н. Пикард [24; 25], используя результат исследования Х. Кестена [67] о существовании единственного стационарного решения стохастического уравнения и представления стохастического уравнения модели GARCH, получили необходимые и достаточные условия для существования единственного стационарного решения модели GARCH в общем случае.

Впервые свое практическое применение модели ARCH/GARCH нашли в финансах, но их использование было ограничено случаем нормальных остатков, для которых явная условная функция правдоподобия удобна для оценки параметров модели [22; 29; 39; 44; 50; 80; 122]. При оценке параметров моделей ARCH/GARCH предполагается, что остатки модели имеют нормальное распределение или конечную ковариацию. Популярным методом оценки параметров модели GARCH является метод максимального правдоподобия. В случае $E(\varepsilon_0^2)^{2+\lambda} < \infty$ при некоторой $\lambda > 0$ установлены состоятельность и асимптотическая нормальность оценок, полученных методом максимального правдоподобия.

В работах [75; 84; 85; 104] проведены исследования метода максимального правдоподобия для оценки параметров модели GARCH(1,1). Хотя состоятельность и нормальное асимптотическое распределение оценок получены, но сами оценки являются локальными – функция правдоподобия максимизируется в окрестности точки θ_0 , где $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$ – вектор истинных параметров модели. Кроме того, результаты получены с очень строгими ограничениями на распределение остатков ε_t и значение θ_0 .

Метод квазимоксимального правдоподобия исследован в работах И. Беркеса и Л. Хорваса, Р. Ф. Энгле [15; 16; 17; 39; 40]. Ученые предположили, что остатки имеют конечную ковариацию, и при некоторых условиях на распределения остатков установили состоятельность и асимптотическую нормальность оценок параметров модели.

Д. Кристенсен и О. Линтон, Г. Маркер и М. Мосер [74; 86], используя представление вида ARMA для модели GARCH(1,1), исследовали метод оценки параметров Юла – Уолкера. В этих работах условия на моменты остатков слабее, и асимптотическое распределение оценки является функцией от устойчивых случайных величин. Кроме того, Л. Гиравитис и П. М. Робинсон [47] исследовали оценку *Whittle*-параметров модели ARCH, а К. Яо и П. Линг [125] – три вида оценки абсолютных разностей для моделей ARCH/GARCH при достаточно общих условиях на распределение остатков.

Результаты оценки параметров моделей ARCH/GARCH также можно найти в работах Ф. Боусамы, С. Франка и Дж. В. Закоина, Ц. Гурьероуса и Дж. Джайсака, Т. Дженти, А. Вэйса [26; 45; 51; 63; 122].

1.3. Результаты исследования моделей с условной гетероскедастичностью

В монографии приведены результаты исследования свойств устойчивых распределений, построения оценок параметров процессов авторегрессии и процессов GARCH(1,1) с остатками, имеющими устойчивое распределение, и регулярно меняющегося распределения с индексом κ при $\kappa > 0$, а также построения оценок индекса «тяжелого хвоста» модели ARCH(1) с устойчивыми остатками и индекса «тяжелого хвоста» устойчивых распределений.

Устойчивое распределение ввел П. Леви в 1925 г. при исследовании сумм независимых одинаково распределенных случайных величин: оно является единственным пределом нормализованных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Известно, что гауссовское распределение – частый случай класса устойчивых распределений. В работах В. Феллера, Дж. П. Нолана, Г. Самородницкого и М. С. Такки, В. М. Золотарева [43; 101; 110; 127] приведены результаты исследований, касающиеся вероятностных, статистических свойств устойчивых распределений. Исследование и использование устойчивых распределений можно найти в работах Н. Н. Труша, Л. Э. Гаджиевой, А. Л. Черноокого, Е. Н. Орловой, С. Митника, С. Т. Рачева и М. С. Паолелла, С. Никаса и М. Шао, Р. Верона [6–9; 96; 97; 100; 123; 124]. Однако в них не в полной мере исследовались соотношения между параметрами. В данной монографии для устойчивых случайных величин изучались соотношения между

параметрами в различных параметризациях, преобразование Лапласа и распределение двух устойчивых случайных величин.

В случае конечной дисперсии остатков оценка параметров процесса авторегрессии непосредственно рассматривалась в работах Т. Андерсона [1], К. Найта [69; 70]. В случае бесконечной дисперсии остатков В. Дж. Йохай и Р. А. Маронна [126] использовали метод наименьших квадратов, а С. Гросс и В. Л. Стейгер [52] – метод наименьших абсолютных моментов для оценки параметров процесса авторегрессии с остатками, которые принадлежат области притяжения устойчивых законов (в ходе исследований получены состоятельность и асимптотическое распределение этих оценок). Результаты оценки параметров процесса авторегрессии приведены в работах [30; 32; 35]. В данной монографии построена М-оценка Хьюбера параметров для процесса авторегрессии с симметричными устойчивыми остатками, найдены состоятельность и асимптотическое распределение этой оценки.

В случае бесконечной ковариации остатков проблема оценки параметров моделей ARCH/GARCH изучена недостаточно. В настоящее время популярно предположение о регулярно меняющихся распределениях или устойчивых распределениях остатков. Т. Микош [91; 95] и Д. Страумен [113] использовали оценку *Whittle* для модели GARCH(1,1) с остатками, имеющими регулярно меняющееся распределение с индексом $\kappa > 0$ [93]. Они доказали, что оценка *Whittle* сходится по вероятности к бесконечному ряду $\kappa / 4$ -устойчивых случайных величин при $\kappa < 8$ и к нормальной случайной величине при $\kappa > 8$. П. Холл и К. Яо использовали метод квазиправдоподобия для оценки параметров модели GARCH(p, q) с остатками, принадлежащими области притяжения устойчивых законов с индексом $\kappa \in [1, 2)$ (доказана состоятельность и получено устойчивое асимптотическое распределение оценки) [54]. Т. Микош и Д. Страумен [91; 94; 95] исследовали модель GARCH(p, q) с остатками, имеющими регулярно меняющееся распределение с индексом $\kappa > 1$ (получены похожие результаты, как и для оценки квазиправдоподобия).

Заметим, что случай регулярно меняющихся остатков с индексом $0 < \kappa < 1$ еще не был исследован. Трудность в том, что когда остатки имеют регулярно меняющееся распределение с индексом $0 < \kappa < 1$, то $E\varepsilon_0 = \infty$. В таком случае модифицируют функцию правдоподобия.

Хорошо известно, что распределения с «тяжелыми хвостами» находят широкое применение в анализе финансов и эконометрике. Так, М. С. А. Б. Холс и С. Г. де Врайс, К. Г. Койдик, М. М. Шафганс и С. Г. де Врайс, Н. Вагнер и Т. А. Марш [57; 71; 121] показали преимущества использования моделей с «тяжелыми хвостами» для исследования

курсов валют. Е. Фама, Б. Мандельброт, Х. Маркович, М. Ф. М. Осборн [41; 87; 88; 102] доказали, что прирост логарифмов цен (*stock returns*) имеет распределение с «тяжелыми хвостами», в особенности класс моделей ARCH/GARCH с данным распределением безотносительно к распределению ошибок [22; 39].

Одной из основных статистических проблем является оценка индекса «тяжелого хвоста» распределений. Популярным методом для оценки индекса выступает использование статистики Hill [55]. Однако существуют трудности с состоятельностью этой оценки. С. Ресник и С. Старица предложили простой способ усреднения оценки Hill и показали, что полученное решение удобнее и лучше [107].

Результаты оценки индекса «тяжелого хвоста» можно найти в исследованиях Т. Синга, Е. Иглесиаса, С. Ресника и С. Старицы, Х. Роотзена, М. Лидбеттера и Л. де Хаана [58; 60; 108; 109]. В данных работах доказано, что совместное распределение для моделей ARCH/GARCH является распределением с «тяжелыми хвостами»; получены оценки индекса «тяжелого хвоста» распределения модели ARCH(1) с устойчивыми остатками и оценки индекса «тяжелого хвоста» устойчивых распределений.

1.4. Общий подход к прогнозированию волатильности

Решение задачи прогнозирования волатильности можно разделить на несколько этапов. На первом этапе нужно выбрать функцию потерь, на основе которой будет строиться оптимальный прогноз. На втором этапе ненаблюдаемость волатильности требует применения некой замены – прокси-переменной, выбирать которую достаточно сложно. И наконец, на третьем этапе необходимо построить методы оценки точности для сравнения эффективности различных моделей и алгоритмов прогнозирования.

Большинство алгоритмов статистического прогнозирования получают, используя ту или иную функцию потерь $L(y, \hat{y})$, где y – реальное значение прогнозируемой величины, $\hat{y}$ – прогноз. Ее выбирает прогнозист, исходя из собственных нужд.

Оптимальный прогноз по заданной функции L определяется с точки зрения минимизации ожидаемых потерь, т. е.

$$\hat{y}_{t\ opt} = \arg \min_{\hat{y}_t \in Y} E\{L(Y_t, \hat{y}_t)\}, \quad (1.1)$$

где Y – некоторое множество возможных прогнозов.

Обычно функция потерь считается заданной, иначе делаются некоторые предположения относительно ее вида – линейная, квадратичная и т. д. Часто используется среднеквадратичное (*Mean Square Error* – MSE)

или абсолютное (*Mean Absolute Error* – MAE) отклонение. Однако в случае прогнозирования условной дисперсии или волатильности проблема их ненаблюдаемости накладывает определенные ограничения на класс допустимых функций.

В частности, А. Дж. Паттон вводит семейство робастных функций потерь и строит оптимальные по критерию (1.1) прогнозы для каждой из них [103].

Определение 1.1. Функция потерь $L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2)$ называется робастной, если для любых прогнозов $\hat{\sigma}_{t,1}^2$ и $\hat{\sigma}_{t,2}^2$ и любой несмещенной прокси-переменной h_1 для волатильности выполняется следующее условие:

$$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_{t,1}^2) \geq L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_{t,2}^2) \Leftrightarrow L(h_1, \hat{\sigma}_{t,1}^2) \geq L(h_1, \hat{\sigma}_{t,2}^2).$$

Согласно определению, если функция потерь принадлежит классу робастных функций, то оптимальный по (1.1) прогноз не зависит от того, используется *ex post* волатильность или некоторая прокси-переменная. Примеры функций потерь приведены в таблице.

Функции потерь

Функция	Вид	Оптимальный вид
MSE	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = (\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2$	$E_{t-1}\{\sigma_t^2\}$
QLIKE	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = \ln \hat{\sigma}_t^2 + \frac{\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t^2}$	$E_{t-1}\{\sigma_t^2\}$
MSE-LOG	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = (\ln \sigma_t^2 - \ln \hat{\sigma}_t^2)^2$	$\exp\{E_{t-1}[\ln \varepsilon_t^2]\} E_{t-1}\{\sigma_t^2\}$
MSE-SD	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = \left(\sqrt{\sigma_t^2} - \sqrt{\hat{\sigma}_t^2} \right)^2$	$(E_{t-1} \varepsilon_t)^2 E_{t-1}\{\sigma_t^2\}$
MSE-prop	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = \left(\frac{\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} - 1 \right)^2$	$\text{Kurtosis}_{t-1}[r_1] \cdot E_{t-1}\{\sigma_t^2\}$
MAE	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = \sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2 $	$\text{Median}_{t-1}[r_t^2]$
MAE-LOG	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = \ln \sigma_t^2 - \ln \hat{\sigma}_t^2 $	$\text{Median}_{t-1}[r_t^2]$
MAE-SD	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = \left \sqrt{\sigma_t^2} - \sqrt{\hat{\sigma}_t^2} \right $	$\text{Median}_{t-1}[r_t^2]$
MAE-prop	$L(\sigma_t^2, \hat{\sigma}_t^2) = \left \frac{\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t^2} - 1 \right $	Находится численно

Из класса робастных функций особо выделяются MSE (наиболее используемая) и QLIKE.

Теорема 1.1. MSE и QLIKE – единственные робастные функции потерь, зависящие только от ошибок прогноза $\sigma_t^2 - \hat{\sigma}_t^2$ и $\frac{\sigma_t^2}{\hat{\sigma}_t^2}$ соответственно.

Выделяют несколько свойств MSE и QLIKE, которые делают их привлекательными для использования в качестве функций потерь.

Свойство 1. Из теоремы 1.1 следует, что данные функции потерь зависят от выбранного прогноза не напрямую, а только косвенно – через соответствующие ошибки.

Свойство 2. Даже при использовании шумных прокси оценки волатильности по этим двум критериям сходятся к истинным значениям.

Свойство 3. Обе функции дают один и тот же оптимальный по критерию (1.1) прогноз – условное математическое ожидание. Отсюда следует, что при переходе с одной функции на другую не нужно пересчитывать прогноз. Этот факт особенно важен при прогнозировании процесса GARCH с устойчивым распределением остатков.

Обе функции не лишены недостатков: MSE весьма чувствительна к выбросам, а QLIKE, на первый взгляд, не имеет очевидного экономического смысла, так как строилась по образцу функции правдоподобия для нормального распределения.

ГЛАВА 2

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ, УСТОЙЧИВЫЕ И РЕГУЛЯРНО МЕНЯЮЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Безгранично делимые меры

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство, где Ω – пространство элементарных событий, а $\mathcal{F}$ – σ -алгебра событий.

Определение 2.1. Случайная величина $X = X(\omega), \omega \in \Omega$, называется безгранично делимой, а ее распределение вероятностей – безгранично делимым, если для каждого $n, n \geq 1$, существуют такие независимые, одинаково распределенные случайные величины X_{n1}, X_{n2}, X_{nn} , что

$$X^D = X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nn}.$$

Рассмотрим схему серий:

$$\begin{array}{cccccc} X_{11} & & & & & \\ X_{21} & X_{22} & & & & \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ X_{n1} & X_{n2} & X_{n3} & \dots & X_{nn}, & \end{array}$$

состоящую при каждом $n, n \geq 1$, из последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин X_{n1}, X_{n2}, X_{nn} . Заметим, что между случайными величинами в разных строках может и не быть никакой связи.

Построим суммы

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_{nk},$$

где $n = 1, 2, \dots$, и рассмотрим предел

$$Y_n \xrightarrow{D} Y \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Оказывается, что в качестве предела Y , если он существует, могут выступать только безгранично делимые случайные величины. В этом и состоит содержательный смысл класса безгранично делимых случайных величин.

Рассмотрим евклидово пространство R^d , $d = 1, 2, \dots$. Скалярное произведение двух векторов $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $y = (y_1, \dots, y_d)$ из R^d определим как

$$(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i,$$

а норму (длину вектора x) как

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство. Случайные величины являются измеримыми функциями $X: \Omega \rightarrow R^d$. Закон распределения для случайной величины X будем обозначать P_X , где для каждого события $A \in \mathcal{F}$, $P_X(A) = P(X \in A)$.

Последовательность случайных величин $(X_n, n \in N)$ называется независимой, если для любого целого r , $r > 1$, любых $i_1, i_2, \dots, i_r \in N$, любых событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r} \in \mathcal{B}(R^d)$

$$P(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2}, \dots, X_{i_r} \in A_{i_r}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) P(X_{i_2} \in A_{i_2}) \dots P(X_{i_r} \in A_{i_r}),$$

где $\mathcal{B}(R^d)$ – борелевская σ -алгебра на R^d .

Если случайные величины X и Y являются независимыми, то закон распределения суммы $X + Y$ задается как свертка мер:

$$P_{X+Y} = P_X * P_Y,$$

где

$$(P_X * P_Y)(A) = \int_{R^d} P_X(A - y) P_Y(dy), \quad A \in \mathcal{F},$$

где $*$ – свертка распределений.

Последнее равенство эквивалентно соотношению

$$\int_{R^d} q(y)(P_X * P_Y)(dy) = \int_{R^d} \int_{R^d} q(x+y)P_X(dx)P_Y(dy)$$

для всех $q \in \mathcal{B}(R^d)$ (ограниченные измеримые борелевские функции на R^d).

Если случайные величины X и Y являются независимыми с плотностями распределения f_X и f_Y соответственно, то случайная величина $X+Y$ имеет плотность, задаваемую как свертка функций:

$$f_{X+Y} = f_X * f_Y,$$

где

$$(f_X * f_Y)(x) = \int_{R^d} f_X(x-y)f_Y(y)dy.$$

Характеристическая функция для X есть $\varphi_X : R^d \rightarrow C$ (C – множество комплекснозначных чисел), где

$$\varphi_X(u) = \int_{R^d} e^{i(u,x)} P_X(dx), \quad u \in R^d.$$

Теорема 2.1. Случайные векторы $X_1, \dots, X_n$ являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$\varphi_{X_1 \dots X_n}(u_1, \dots, u_n) = E \left(\exp \left(i \sum_{j=1}^n (u_j, X_j) \right) \right) = \varphi_{X_1}(u_1) \dots \varphi_{X_n}(u_n)$$

для любых $u_1, \dots, u_n \in R^d$.

Итак, характеристическая функция для вероятностной меры μ на R^d определяется как

$$\varphi_\mu(u) = \int_{R^d} e^{i(u,x)} \mu(dx), \quad u \in R^d.$$

Теорема 2.2. Характеристическая функция φ_μ удовлетворяет следующим основным свойствам:

1) $\varphi_\mu(0)=1$;

2) φ_μ является положительно определенной, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi_\mu(u_i - u_j) \geq 0$$

для любых $c_i \in C$, $i = \overline{1, n}$, $u_i \in R^d$, $i = \overline{1, n}$, $n \in N$, $\bar{c}_j$ означает постоянную сопряженную к c_j , $j = \overline{1, n}$;

3) φ_μ является равномерно непрерывной.

Теорема Бохнера утверждает, что если функция $\varphi: R^d \rightarrow C$ удовлетворяет свойствам 1, 2 и непрерывна в нуле, то она является характеристической функцией некоторой вероятностной меры μ на R^d .

Определение 2.2. Функция $\psi: R^d \rightarrow C$ является условно положительно определенной, если для любых $n \in N$ и $c_1, \dots, c_n \in C$, для которых $\sum_{j=1}^n c_j = 0$, имеем

$$\sum_{j,k=1}^n c_j \bar{c}_k \psi(u_j - u_k) \geq 0$$

для любых $u_1, \dots, u_n \in R^d$.

Функция $\psi: R^d \rightarrow C$ называется эрмитовой, если

$$\overline{\psi(u)} = \psi(-u)$$

для всех $u \in R^d$, где $\overline{\psi(u)}$ – функция комплексно сопряженная к $\psi(u)$.

Теорема 2.3. Функция $\psi: R^d \rightarrow C$ является эрмитовой и условно положительно определенной тогда и только тогда, когда функция $e^{t\psi(u)}$ является положительно определенной для каждого $t > 0$, $u \in R^d$.

Доказательство. Приведем доказательство только достаточности. Предположим, что $e^{t\psi(u)}$ является положительно определенной для всех $t > 0$. Зафиксируем $n \in N$ и выберем $c_i \in C$, $u_i \in R^d$, $i = \overline{1, n}$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j e^{t\psi(u_i - u_j)} \geq 0$$

и, следовательно, для каждого $t > 0$

$$\frac{1}{t} \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j (e^{t\psi(u_i - u_j)} - 1) \geq 0,$$

так как

$$\frac{1}{t} \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j = 0.$$

Рассмотрим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j (e^{t\psi(u_i - u_j)} - 1) = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^{t\psi(u_i - u_j)} - 1)}{t} \geq 0.$$

Используя элементарное равенство $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{at} - 1}{t} = a$, получим

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \psi(u_i - u_j) \geq 0.$$

Пусть μ – вероятностная мера на R^d , т. е. $\int_{R^d} d\mu(u) = 1$. Определим

$$(\mu *)^n = \mu * \dots * \mu \text{ (} n \text{ раз)}.$$

Определение 2.3. Мера μ имеет свертку n -го порядка, если существует вероятностная мера μ^n , для которой выполняется

$$\left(\left(\mu^n \right)^* \right)^n = \mu.$$

Определение 2.4. Мера μ называется безгранично делимой, если существует ее свертка n -го порядка для всех $n \in N$. В этом случае μ^n определяется однозначно.

Теорема 2.4. Мера μ безгранично делима, если для всех $n \in N$ существует вероятностная мера μ_n с такой характеристической функцией $\varphi_n(u)$, что

$$\varphi(u) = (\varphi_n(u))^n$$

для всех $u \in R^d$ и при этом $\mu_n = \mu^{\frac{1}{n}}$, где $\varphi(u) = \varphi_\mu(u)$.

Теорема 2.5. Безгранично делимые меры имеют следующие свойства:

1) если меры μ и ν безгранично делимы, то мера $\mu * \nu$ также безгранично делима;

2) если последовательность мер $\mu_n, n \in N$, безгранично делима и $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ (слабая сходимость), то μ также будет безгранично делимой мерой.

Замечание 2.1. Слабая сходимость $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{R^d} f(x) \mu_n(dx) = \int_{R^d} f(x) \mu(dx)$ для всех функций $f \in C(R^d)$.

Определение 2.5. Случайная величина X называется безгранично делимой, если ее закон распределения P_X безгранично делим, т. е. $X^D = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}$, где $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ — независимые в совокупности и одинаково распределенные случайные величины для каждого $n \in N$.

Пример 2.1. Гауссовские (нормальные) случайные величины.

Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ — d -мерный случайный вектор. Допустим, что он является невырожденным гауссовским нормальным вектором, если существует вектор $m \in R^d$ и такая строго положительно определенная симметричная матрица A размерности $d \times d$, что X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\det A}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m, A^{-1}(x - m)) \right\}, x \in R^d,$$

где A^{-1} — обратная матрица.

Тогда записывают $X \sim N(m, A)$, где вектор m — математическое ожидание вектора X ; A — ковариационная матрица, $A = E[(X - m)(X - m)^T]$, где $(X - m)^T$ — транспонированный вектор.

Характеристическая функция $\varphi_X(u) = \exp \left\{ i(m, u) - \frac{1}{2} (u, Au) \right\}$ вектора X , следовательно, $(\varphi_X(u))^{\frac{1}{n}} = \exp \left\{ i \left(\frac{m}{n}, u \right) - \frac{1}{2} \left(u, \frac{1}{n} Au \right) \right\}, u \in R^d$.

Видим, что вектор X имеет безгранично делимое распределение с

$$Y_j^{(n)} \sim N\left(\frac{m}{n}, \frac{1}{n} A\right)$$

для каждого $n \in N, j = \overline{1, n}$.

Допустим, что случайный вектор X имеет стандартное гауссовское распределение, если $X \sim N(0, \sigma^2 I)$, где I – единичная матрица размерности $d \times d$, $\sigma^2 > 0$.

Случайный вектор X имеет вырожденное гауссовское распределение, если выражение для $\varphi_X(u)$ имеет место с определителем $\det A = 0$. Этот случайный вектор также будет являться безгранично делимым.

Пример 2.2. Пуассоновские случайные величины.

Примем, что $d = 1$, и рассмотрим случайную переменную X , принимающую значения на множестве $n \in N \cup \{0\}$.

Будем считать, что случайная величина X имеет пуассоновское распределение, если существует постоянная $\lambda > 0$, для которой

$$P\{X = n\} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

В таком случае запишем $X \sim \pi(\lambda)$ и получим

$$E(X) = V(X) = \lambda,$$

характеристическая функция

$$\varphi_X(u) = \exp\left[\lambda(e^{iu} - 1)\right],$$

из которой видно, что X является безгранично делимой с

$$Y_j^{(n)} \sim \pi\left(\frac{\lambda}{n}\right) \text{ для } j = \overline{1, n}.$$

Пример 2.3. Составные случайные величины Пуассона.

Пусть $(Z(n), n \in N)$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, принимающих значение в R^d с общим законом распределения μ_Z ; $M \sim \pi(\lambda)$ – пуассоновская случайная величина, не зависящая от всех $Z(n), n \in N$.

Составную случайную величину Пуассона X определим как

$$X = Z(1) + \dots + Z(M).$$

Теорема 2.6. Для каждого $u \in R^d$

$$\varphi_X(u) = \exp \left[\int_{R^d} (e^{i(u,y)} - 1) \lambda \mu_Z(dy) \right].$$

Доказательство. Имеем, что характеристическая функция

$$\varphi_{Z(n)}(u) = E(e^{i(u, Z(n))}) = \varphi_Z(u)$$

для всех $n \in N$.

Характеристическая функция

$$\varphi_X(u) = E(e^{i(u, X)}) = E(e^{i(u, Z(1) + \dots + Z(M))}),$$

где X принимает значения в R^d .

Используя формулу полной вероятности для математических ожиданий, получим

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{i(u, Z(1) + \dots + Z(M))} | M = n) P(M = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{i(u, Z(1) + \dots + Z(n))}) \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{i(u, Z(1))} \dots e^{i(u, Z(n))}) \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [E(e^{i(u, Z(1))}) \dots E(e^{i(u, Z(n))})] \frac{\lambda^n}{n!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_Z(u))^n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varphi_Z(u) \lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda \varphi_Z(u)} = e^{\lambda(\varphi_Z(u)-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\varphi_Z(u) = E(e^{i(u, Z)}) = \int_{R^d} e^{i(u,y)} \mu_Z(dy)$$

и

$$\int_{R^d} \mu_Z(dy) = 1,$$

то получим

$$\varphi_X(u) = e^{\int_{R^d} (e^{i(u,y)} - 1) \lambda \mu_Z(dy)}.$$

Если X является составной случайной величиной Пуассона, то запишем $X \sim \pi(\lambda, \mu_Z)$. Видим, что X является безгранично делимой случайной величиной с $Y_j^{(n)} = \pi\left(\frac{\lambda}{n}, \mu_Z\right)$ для $j = \overline{1, n}$.

2.2. Формула Леви – Хинчина

Исследования Б. де Финетти в 1920 г. показали, что в наиболее общем виде безгранично делимая случайная величина X может быть записана как

$$X = Y + W,$$

где Y и W – независимые случайные величины, причем $Y \sim N(m, A)$, $W \sim \pi(\lambda, \mu_Z)$.

Тогда

$$\varphi_X(u) = e^{\eta(u)},$$

где

$$\eta(u) = i(m, u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{R^d} (e^{i(u, y)} - 1) \lambda \mu_Z(dy).$$

Заметим, что мера $\nu(\cdot) = \lambda \mu_Z(\cdot)$ является конечной мерой.

П. Леви и А. Я. Хинчин показали, что мера ν может быть σ -конечной, т. е. такой, что

$$\int_{R^d \setminus \{0\}} (\|y\|^2 \wedge 1) \nu(dy) < \infty,$$

где $R^d \setminus \{0\} = \{y \in R^d, y \neq 0\}$; $a \wedge b = \min(a, b)$; $a, b \in R$.

Данная мера называется мерой Леви. Поскольку $\{\|y\|^2 \wedge \varepsilon\} \leq \{\|y\|^2 \wedge 1\}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, из последнего соотношения следует, что $\nu\{R^d \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)^d\} < \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Фундаментальным является следующий результат.

Теорема 2.7 (теорема Леви – Хинчина). Борелевская вероятная мера μ , заданная на R^d , является безгранично делимой, если существуют вектор $m \in R^d$, неотрицательно-определенная симметричная матрица A размерности $d \times d$ и положительная мера Леви $\nu = \nu(dy)$, заданная на $R^d \setminus \{0\}$, что для любых $u \in R^d$

$$\varphi_{\mu}(u) = \exp \left[i(m, u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{R^d \setminus \{0\}} \left(e^{i(u, y)} - 1 - i(u, y)I_B(y) \right) \nu(dy) \right],$$

где $B = \{y \in R^d, \|y\| < 1\}$; $I_B(y) = \begin{cases} 1, & y \in B \\ 0, & y \notin B \end{cases}$.

Последнее равенство называется формулой Леви – Хинчина.

Любое представление в виде правой части последнего равенства является характеристической функцией для безгранично делимой вероятностной меры на R^d .

Тройка (m, A, ν) называется характеристиками безгранично делимой случайной величины X и определяется единственным образом.

Определим $\eta = \lg \varphi_{\mu}$, где рассматриваем главную часть логарифма. Тогда η называется символом Леви или характеристической экспонентой.

Далее классифицируем символ Леви аналитически.

Теорема 2.8. η является символом Леви тогда и только тогда, когда он является непрерывной, эрмитовой, условно-положительно определенной функцией, для которой $\eta(0) = 0$.

2.3. Класс устойчивых распределений

Класс безгранично делимых распределений включает в себя устойчивые распределения, которые возникают, когда все величины $X_{n1}, \dots, X_{nn}$, $n \geq 1$, из определения 2.1 появляются специальным образом посредством одной и той же последовательности независимых случайных величин $Y_1, Y_2, \dots$, а именно

$$X_{nk} = \frac{Y_k}{d_n} + \frac{a_n}{n}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $d_n > 0$, $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ – последовательности действительных чисел.

Рассмотрим общую центральную предельную задачу для размерности $d = 1$. Пусть Y_n , $n \in N$, – последовательность действительных независимых, одинаково распределенных случайных величин, последовательность частных сумм

$$S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n - b_n}{\sigma_n},$$

где $b_n, n \in N$ – произвольная последовательность действительных чисел и $\sigma_n; n \in N$ – произвольная последовательность действительных положительных чисел.

Рассмотрим случай, когда существует случайная величина X , для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{S_n < x\} = P\{X < x\}$$

при всех $x \in R$, т. е. S_n сходится по распределению к X . Если в данном равенстве предел существует, то случайную величину X называют устойчивой.

Класс устойчивых распределений является одним из важнейших классов вероятностных распределений, имеющих «тяжелые хвосты» и много других интересных математических свойств. Использование в исследованиях временных рядов устойчивых распределений объясняется несколькими причинами.

Первая причина заключается в появлении негауссовских устойчивых моделей, например отражение от вращающегося зеркала, приводящее к распределению Коши, момент первого попадания для броуновского движения, приводящий к распределению Леви [43; 119]. Вторая причина – обобщенная центральная предельная теорема, определяющая самое важное свойство устойчивых распределений: устойчивое распределение является единственным пределом (при условии его существования) нормализованных сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин. Третья причина – гауссовское распределение, самое известное и хорошо изученное. Негауссовские устойчивые распределения исследуются в разнообразных областях: финансы, страхование, экономика, телекоммуникации, гидрология, физика [61; 62; 100; 110; 127].

Определение 2.6. Невырожденная случайная величина X называется устойчивой, если для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдутся такие константы $c_n > 0$ и $d_n \in R$, что

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n, \quad (2.1)$$

где $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению; $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины; X – случайная величина с таким же распределением, как и $X_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Случайная величина X называется строго устойчивой, если в соотношении (2.1) $d_n = 0$.

В. Феллер в своей работе доказал, что единственно возможный выбор для постоянной c_n есть при $c_n = n^{1/\alpha}$, $\alpha \in (0; 2]$ [43]. Для строго устойчивой случайной величины X имеем

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X. \quad (2.2)$$

Известно, что устойчивые распределения, за исключением нескольких случаев (гауссовское распределение, распределение Коши и распределение Леви), не имеют явных выражений плотности распределения и функции распределения. Однако класс устойчивых распределений достаточно полно описывается с помощью характеристических функций. Самая популярная параметризация α -устойчивых случайных величин рассмотрена в работах Г. Самородницкого и М. С. Таки, Р. Верона, В. М. Золотарева [110; 124; 127].

Определение 2.7 (представление Леви – Хинчина). Невырожденная случайная величина X называется устойчивой, если ее характеристическая функция имеет представление вида

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\{-(\sigma |t|)^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}] + i\mu t\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma |t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln(|t|)] + i\mu t\} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\mu \in R$, $\sigma > 0$ ($\alpha \in (0; 2]$ – индекс устойчивости (индекс «тяжелого хвоста», характеристический показатель); β – параметр асимметрии; μ – параметр положения; σ – параметр масштаба). В этом случае запишем $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Если $\mu = 0$, $\sigma = 1$, то случайная величина X называется стандартной.

Когда $\alpha = 2$, то имеем гауссовское распределение, если $\alpha < 2$, то ковариация α -устойчивой случайной величины бесконечна [61; 62; 110].

Используя обобщенную центральную предельную теорему, имеем

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P(X > x) = C_\alpha (1 + \beta) \sigma^\alpha, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha P(X < -x) = C_\alpha (1 - \beta) \sigma^\alpha, \end{cases}$$

где

$$C_\alpha = \left(2 \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx \right)^{-1} = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Когда параметр $\beta > 0$, устойчивое распределение скошено вправо, т. е. правый «хвост» тяжелее левого; если $\beta < 0$, то устойчивое распределение скошено влево, т. е. левый «хвост» тяжелее правого; если $\beta = 0$, то X является устойчивой случайной величиной симметричной относительно μ .

Когда $\alpha < 1$, $\mu = 0$, то распределение случайной величины X при $\beta = 1$ сосредоточено в правой полуплоскости, а при $\beta = -1$ – в левой. В этом случае X называется односторонне устойчивой случайной величиной. Примерами таких распределений являются случайные величины Леви $X \sim S_{1/2}(\sigma, 1, 0)$, $X \sim S_{1/2}(\sigma, -1, 0)$ [43; 124].

Когда $\alpha > 1$, математическое ожидание α -устойчивой случайной величины конечно и эквивалентно μ . Абсолютный момент порядка p α -устойчивой случайной величины конечен тогда и только тогда, когда $p < \alpha$.

Лемма 2.1. Если X – устойчивая случайная величина, то для любых положительных чисел c, d существуют такие константы $a, b \in R$, $b > 0$, что

$$cX_1 + dX_2 \stackrel{d}{=} a + bX$$

или

$$F_{X_1}\left(\frac{x}{c}\right) * F_{X_2}\left(\frac{x}{d}\right) = F_X\left(\frac{x-a}{b}\right),$$

где X_1, X_2, X – независимые, одинаково распределенные случайные величины; F_{X_1}, F_{X_2}, F_X – функции распределения случайных величин X_1, X_2, X соответственно; «*» – свертка функций [101; 110; 119; 127].

Обобщенная центральная предельная теорема.

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины и

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - a_n}{b_n}, \quad (2.4)$$

где $a_n, b_n \in R, b_n > 0$, то случайная величина X является пределом по распределению последовательности $\{Z_n\}_{n \in N}$ вида (2.4) при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда X – устойчивая случайная величина.

Когда X_1 имеет конечное математическое ожидание $m = EX_1$ и конечную дисперсию $D = DX_1$, то

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - nm}{D\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X \sim N(0,1) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $X \sim N(0,1)$ – стандартная нормальная случайная величина.

В дальнейшем пишем $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$.

Теорема 2.9 (обобщенная центральная предельная теорема) [101; 110]. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x), x \in R$, для которых выполняются условия

$$F(x), x \in R, \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

$$F(x) \sim d |x|^{-\alpha} \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

где $c, d \in R, c + d \neq 0, 0 < \alpha \leq 2$.

Тогда существуют такие последовательности a_n и $b_n > 0, n = 1, 2, \dots$, что последовательность

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^n X_j - a_n}{b_n}$$

сходится по распределению к стандартной устойчивой случайной величине $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ с параметрами

$$\alpha = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \lambda \leq 2, \\ 2, & \text{если } \lambda > 2, \end{cases} \quad \beta = \frac{c - d}{c + d},$$

при этом последовательности a_n и b_n удовлетворяют соотношениям:

$$\text{а) если } 0 < \alpha < 1, \text{ то } a_n = 0, b_n = [\pi(c + d)]^{1/\alpha} \left[2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right]^{-1/\alpha} n^{1/\alpha};$$

б) если $\alpha = 1$, то $a_n = \beta(c + d)n \ln(n)$, $b_n = \frac{\pi}{2}(c + d)n$;

в) если $1 < \alpha < 2$, то $a_n = nEX_1$, $b_n = [\pi(c + d)]^{1/\alpha} \left[2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right]^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}$;

г) если $\alpha = 2$, то $a_n = nEX_1$, $b_n = (c + d)^{1/2} [n \ln(n)]^{1/2}$.

Обобщая случай устойчивых случайных величин, можем вывести определение устойчивых случайных векторов.

Определение 2.8. Невырожденный случайный вектор X со значениями в R^d , $d = 1, 2, \dots$, называется устойчивым, если для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдутся такие константы $c_n > 0$ и $d_n \in R$, что

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n,$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные случайные векторы со значениями в R^d , X – случайная величина с таким же распределением, как и X_j , $j = 1, 2, \dots, n$ [101].

Любой устойчивый случайный вектор X со значениями в R^d может быть охарактеризован конечной спектральной мерой Γ на единичной сфере $S^d = \{u \in R^d : \|u\| = 1\}$ в R^d [42].

Определение 2.9. Случайный вектор X со значениями в R^d называется α -устойчивым, $\alpha \in (0; 2]$, если его характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - \int_{S^d} \|(x, y)\|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign}((x, y)) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \Gamma(d(y)) + i(x, \mu) \right\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp \left\{ - \int_{S^d} \|(x, y)\| \left(1 + i \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}((x, y)) \ln \|(x, y)\| \right) \Gamma(d(y)) + i(x, \mu) \right\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

где (x, y) – скалярное произведение в R^d ; $\|\cdot\|$ – евклидова норма [42; 43; 83; 101; 110; 119].

2.4. Явное представление устойчивых случайных величин

Теорема 2.10. Если $\alpha \in (0; 2]$, $V \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $W \sim E(1)$, причем случайные величины V и W независимы, то случайная величина

$$X = \frac{\sin(\alpha V)}{(\cos(V))^\alpha} \left(\frac{\cos(V - \alpha V)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

является α -устойчивой, т. е. $X \sim S\alpha S$.

Теорема 2.11. Если $\alpha \in (0; 1)$ или $\alpha \in (1; 2)$ и $\beta \in [-1; 1]$, $V \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $W \sim E(1)$, причем случайные величины V и W независимы, то случайная величина

$$X = D_{\alpha, \beta} \frac{\sin(\alpha(V + C_{\alpha, \beta}))}{(\cos(V))^\alpha} \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha, \beta}))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

$$C_{\alpha, \beta} = \frac{\arctg\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha},$$

$$D_{\alpha, \beta} = \left(\cos\left(\arctg\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)\right) \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

имеет α -устойчивое распределение, т. е. $X \sim S_{\alpha, \beta}$.

Теорема 2.12. Если $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\sigma \in R^+ = [0; \infty)$, $\mu \in R$, $V \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а $W \sim E(1)$, причем случайные величины V и W независимы, то равенства

$$X = D_{\alpha, \beta, \sigma} \frac{\sin(\alpha(V + C_{\alpha, \beta}))}{(\cos(V))^\alpha} \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha, \beta}))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + B_{\alpha, \beta, \sigma, \mu},$$

$$B_{\alpha, \beta, \sigma, \mu} = \mu - \beta \sigma^\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

$$C_{\alpha, \beta} = \frac{\arctg\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha},$$

$$D_{\alpha, \beta, \sigma} = \sigma \left(\cos \left(\arctg \left(\beta \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \alpha}{2} \right) \right) \right) \right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

выполняются при $\alpha \neq 1$;
равенства

$$X = \sigma \cdot \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \operatorname{tg}(V) - \beta \ln \left(\frac{\frac{\pi}{2} W \cos(V)}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right) + B_{\beta, \sigma, \mu},$$

$$B_{\beta, \sigma, \mu} = \mu + \frac{2}{\pi} \beta \sigma \ln(\sigma)$$

выполняются при $\alpha = 1$.

Вышеперечисленные равенства определяют семейство α -устойчивых случайных величин $X \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$.

Доказательство теорем можно найти в работах В. М. Золотарева.

2.5. Моделирование устойчивых случайных величин

Сложность проблемы генерирования устойчивых случайных величин состоит в том, что вид характеристической функции не позволяет получить аналитическое выражение ни для обратной функции распределения, ни для плотности распределения. Исключение составляют частные случаи устойчивого распределения – распределения Гаусса ($S_2(\sigma, 0, \mu) = N(\mu, 2\sigma^2)$), Коши ($S_1(\sigma, 0, \mu)$) и Леви ($S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$), ($S_{1/2}(\sigma, -1, \mu)$), для которых применимы обычные методы моделирования. Во всех остальных случаях, чтобы получить плотность, необходимо проводить численное интегрирование.

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}\} dt < \infty$, то по формуле обращения имеем $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$.

Если плотность распределения является действительной функцией, то

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}\} \cos\left\{\beta\sigma^{\alpha}t|t|^{\alpha-1} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} + \mu t - tx\right\} dx, & \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma|t|\} \cos\left\{\beta \frac{2}{\pi} t \lg|t| + \mu t - tx\right\} dx, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Далее можно проводить численное интегрирование правой части равенства (2.5), заменяя бесконечные пределы конечными и применяя, например, составную формулу трапеций. Для контроля правильности вычислений можно использовать условие нормировки.

Зная плотность распределения вероятностей, можно смоделировать непрерывную случайную величину стандартным методом исключения. Используем следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

Шаг 0. Подбираем мажорирующую функцию $g(x)$, $g(x) \geq f_X(x) \geq 0$.

Шаг 1. Моделируем случайный вектор $(x, y) \in G$, где

$$G = \{(x, y): 0 \leq y \leq g(y)\}.$$

Шаг 2. Если $y > f_X(x)$, то (x, y) исключаем и вновь повторяем шаг 1; если $y \leq f_X(x)$, то значение x принимается в качестве реализации случайной величины X .

Таким образом, получаем метод компьютерного моделирования устойчивых случайных величин, однако он требует существенных затрат машинного времени и имеет погрешность, связанную с численным интегрированием.

В теоремах 2.10–2.12 получены выражения устойчивых случайных величин через равномерно распределенную и экспоненциальную случайные величины, о моделировании которых изложено в главе 1. Используя их, можем моделировать устойчивые случайные величины.

Алгоритм 2. Процедура генерирования реализации $\bar{X}$ случайной величины X с распределением $S_{\alpha, \beta}$ состоит в следующем:

$$k_1 = \text{rand}();$$

$$k_2 = \text{rand}();$$

$$\bar{V} = -\frac{\pi}{2} + \pi(0,5 + k_1)/32768;$$

$$\bar{W} = -\lg((0,5 + k_2)/32768);$$

$$C_{\alpha, \beta} = \frac{\arctg\left(\beta \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha};$$

$$D_{\alpha, \beta} = \left(\cos\left(\arctg\left(\beta \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Затем принимаем

$$\bar{X} = D_{\alpha,\beta} \frac{\sin\left(\alpha(\bar{V} + C_{\alpha,\beta})\right)}{\left(\cos(\bar{V})\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos\left(\bar{V} - \alpha(\bar{V} + C_{\alpha,\beta})\right)}{\bar{W}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Замечание 2.2. Если $\bar{X}$ является реализацией случайной величины $X \sim S_{\alpha,\beta}$, то

$$\bar{Y} = \sigma \bar{X} + \mu$$

является реализацией случайной величины

$$Y = \sigma X + \mu \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu).$$

Алгоритм 3. Процедура генерирования реализации $\bar{X}$ случайной величины X с распределением $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$ для $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, $\sigma \in R$, $\mu \in R$ состоит в следующих вычислениях:

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \mu - \beta \sigma^{\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), & \alpha \neq 1; \\ \mu, & \alpha = 1 \end{cases};$$

$$k_1 = \operatorname{rand}();$$

$$k_2 = \operatorname{rand}();$$

$$\bar{V} = -\frac{\pi}{2} + \pi(0,5 + k_1)/32768;$$

$$\bar{W} = -\lg((0,5 + k_2)/32768);$$

$$B_{\alpha,\beta,\sigma,\mu} = \mu - \beta \sigma^{\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right);$$

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\beta \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{\alpha};$$

$$D_{\alpha,\chi,\sigma} = \sigma \left(\cos \left(\operatorname{arctg} \left(\beta \operatorname{tg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right) \right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Затем принимаем

$$\bar{X} = D_{\alpha,\beta,\sigma} \frac{\sin\left(\alpha(\bar{V} + C_{\alpha,\beta})\right) \left(\frac{\cos\left(\bar{V} - \alpha(\bar{V} + C_{\alpha,\beta})\right)}{\bar{W}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\left(\cos(\bar{V})\right)^{\frac{1}{\alpha}}} + B_{\alpha,\beta,\sigma,\mu}$$

для $\alpha \neq 1$.

При $\alpha = 1$ вычисляем

$$\bar{X} = \sigma \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \beta \bar{V} \right) \operatorname{tg}(\bar{V}) - \beta \lg \left(\frac{\frac{\pi}{2} \bar{W} \cos(\bar{V})}{\frac{\pi}{2} + \beta \bar{V}} \right) \right) + B_{\beta,\sigma,\mu},$$

где $B_{\beta,\sigma,\mu} = \mu + \frac{2}{\pi} \beta \lg(\sigma)$.

Замечание 2.3. В случае компьютерных вычислений, основанных на двух последних алгоритмах, для значений $\beta \neq 0$, α близких к 1 и α достаточно близких к 0, могут наступить эффекты численной неустойчивости.

2.6. Регулярно меняющееся распределение

Теория регулярного изменения была введена Й. Караматом в 1930 г. [66]. Регулярное изменение – одно из фундаментальных понятий, которое появляется естественным образом в различных контекстах прикладной теории вероятности. У. Феллер рассмотрел регулярное изменение в контексте предельной теории для сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин [43]. С. И. Резник популяризировал понятие многомерного регулярного изменения для многомерной теории предельных значений [105; 106]. У Н. Х. Бингема, С. М. Голди и Дж. Л. Тейгелса можно найти много аналитических результатов, связанных с одномерным регулярным изменением [19]. Ч. Кестен и С. М. Голди [67; 48] изучили регулярное изменение как стационарное решение стохастического уравнения. Математически регулярное изменение – область в классической теории действительных чисел, которое применяется в функциональном анализе, теории функции, теории рядов Фурье, комплексном или выпуклом анализе, общей топологии. Эти результаты находят естественное применение в финансовом анализе временных рядов [13; 14; 90]. В настоящее время регулярное изменение стало одним из ключевых понятий для моделирования поведения больших телекоммуникационных сетей [56; 76; 92].

Определение 2.10. Распределение R^d случайного вектора X называется многомерно регулярно меняющимся с индексом $\alpha > 0$, если

существуют положительная действительная последовательность $\{x_n\}$, $n \in N$, и случайный вектор $\Theta \in S^{d-1}$, $d = 1, 2, \dots$, S^{d-1} – единичная сфера, в R^d относительно нормы $\|\cdot\|$ такие, что

$$nP(\|X\| > tx_n, X/\|X\| \in A) \xrightarrow{v} t^{-\alpha} P(\Theta \in A) \quad t > 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

для всех борелевских множеств A , $A \subset S^{d-1}$ [19; 64].

Сходимость (2.6) эквивалентна следующей сходимости для всех $t > 0$:

$$\frac{P(\|X\| > tx, X/\|X\| \in A)}{P(\|X\| > x)} \xrightarrow{v} t^{-\alpha} P(\Theta \in A) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

где « $\xrightarrow{v}$ » означает слабую сходимость на S^{d-1} [19; 65].

Распределение случайного вектора Θ в (2.6) называется спектральной мерой случайного вектора X .

В случае $d = 1$ имеем регулярно меняющуюся случайную величину X с индексом $\alpha > 0$, для которой

$$P(X > x) \sim px^{-\alpha} L(x) \quad \text{и} \quad P(X \leq x) \sim qx^{-\alpha} L(x), \quad p, q > 0, \quad (2.7)$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция, т. е. для любого $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Условие (2.7) также упоминается как условие баланса «хвоста», при этом случаи $p = 0$ или $q = 0$ не исключены [19; 64].

Особенным следствием слабой сходимости в (2.6) является следующий вывод: любая линейная комбинация компонент регулярно меняющегося вектора A также является регулярно меняющимся вектором с тем же индексом α . При любых $x \in R^d \setminus \{0\}$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P((x, X) > u)}{L(u)u^{-\alpha}} = w(x) \quad (2.8)$$

существует, если $L(x)$ – медленно меняющаяся функция, а $w(x)$ – ограниченная функция, которая является монотонной функцией и имеет свойство

$$w(tx) = t^{-\alpha} w(x)$$

при всех $t > 0$, $x \in R^d \setminus \{0\}$ и при некоторой $\alpha \geq 0$. Это означает, что при всех $x \in R^d \setminus \{0\}$ случайная величина (x, X) является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом α .

Теорема 2.13. Пусть X – случайный вектор в R^d . Тогда (2.7) и (2.8) эквивалентны, если выполняется одно из следующих условий:

- а) α – положительное, но не целое число;
- б) X имеет неотрицательные компоненты и α – нечеткое целое число [13; 14; 43].

Представим несколько вероятностных свойств регулярного изменения, которые нужны для доказательства результатов в следующих главах.

Лемма 2.2. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые, одинаково распределенные и регулярно меняющиеся случайные величины с индексом α , $\alpha > 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, то

$$P(S_n > x) = nP(X_1 > x), \quad x \in R, \quad n \geq 1 \quad [43].$$

Лемма 2.3. Предположим, что X_1, X_2 – независимые, неотрицательные случайные величины. Тогда имеем следующее:

- а) если X_1 – регулярно меняющаяся случайная величина с индексом α , $\alpha > 0$ и $P(X_1 > x) = o(P(X_2 > x))$, $x \rightarrow \infty$, то $X_1 X_2$ также регулярно меняющаяся случайная величина с индексом α ;
- б) если $E(X_2^\alpha)^{1+\varepsilon} < \infty$ при некоторых $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, тогда

$$P(X_1 X_2 > x) \sim E(X_2^\alpha) P(X_1 > x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

т. е. $X_1 X_2$ является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом α ;

- в) если $P(X_1 > x) \sim c x^{-\alpha}$, $\forall x > 0$ и $E X_2^\alpha < \infty$ при некоторых $c > 0$, $\alpha > 0$, то (2.8) также справедливо [19; 29; 64].

Лемма 2.4. Если X – регулярно меняющаяся случайная величина с индексом α , $\alpha > 0$, $f(x)$ – некоторая функция, для которой при некотором $q > 0$, $f(tx) = t^q f(x)$, для всех $t > 0$, то $f(X)$ является также регулярно меняющейся случайной величиной с индексом α/q [19; 64].

Лемма 2.5. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – регулярно меняющиеся случайные величины с индексом α , $\alpha > 0$, то

$$\frac{P(X_i > x)}{F(x)} = c_i^+ \quad \text{и} \quad \frac{P(X_i \leq -x)}{F(x)} = c_i^-, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $c_i^\pm$ – некоторые неотрицательные числа; F – некоторая функция распределения; $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_i > x, X_j > x)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_i \leq -x, X_j > x)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_i \leq -x, X_j \leq -x)}{\bar{F}(x)}, i \neq j,$$

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n > x)}{\bar{F}(x)} = c_1^+ + c_2^+ + \dots + c_n^+ \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(S_n \leq x)}{\bar{F}(x)} = c_1^- + c_2^- + \dots + c_n^- \text{ [64].}$$

В частности, если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые, неотрицательные случайные величины, то имеем

$$P(S_n > x) = P(X_1 > x) + P(X_2 > x) + \dots + P(X_n > x).$$

2.7. Устойчивый предел преобразования мартингала

Рассмотрим суммы строго стационарных случайных векторов

$$Y_t = G_t X_t,$$

где $\{X_t\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины; $\{G_t\}$ – строго стационарная последовательность случайных векторов со значениями в R^d ; $G_t - F_t$ измеримая, где $F_t = \sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)$, $t \in Z$.

Если $EX_t = 0$ и $EG_1 < \infty$, то $E(G_t X_t | F_t) = 0$, поэтому $\{G_t X_t\}$ является последовательностью мартингала-разности. Тогда

$$S_0 = 0, S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, n \geq 1,$$

называется преобразованием последовательности мартингалов $\{\sum_{t=1}^n X_t\}_{n \in N}$ последовательностью $\{G_t\}$.

Заметим, что стационарный процесс $\{Y_k\}_{k \in N}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, если

$$\sup_{A \in \sigma\{Y_t, t \leq 0\}, B \in \sigma\{Y_t, t \geq k\}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| =: a_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Когда $\{a_k\}_{k \in N}$ сходится к 0 с геометрической скоростью, т. е. $a_k \sim e^{b_k}$ при $k \rightarrow \infty$, где $b_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, то $\{Y_k\}_{k \in N}$ называется сильным перемешиванием с геометрической скоростью [18; 36; 113].

Фундаментальные предположения:

A1) X_1 – регулярно меняющаяся случайная величина с индексом $\alpha \in (0; 2)$;

A2) $E |G_1|^{\alpha+\varepsilon} < \infty$ при некоторой $\varepsilon > 0$;

A3) процесс $\{Y_t\} = \{G_t X_t\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с геометрической скоростью.

Теорема 2.14. Пусть

$$\left(\sum_{t=1}^n Y_t \right)_{n \in N} = \left(\sum_{t=1}^n G_t X_t \right)_{n \in N}.$$

Предположим, что выполняются условия A1–A3, и если $\alpha \in (1; 2)$, то $EX_1 = 0$, если $\alpha = 1$, то X_1 – симметричная случайная величина. Тогда

$$a_n^{-1} S_n \xrightarrow{d} S_\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

где последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом:

$$nP(|X_1| > a_n) \sim 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

а S_α – α -устойчивый случайный вектор [33; 94].

Замечание 2.4. В случае $E |G_1|^{2+\delta} + E |Y_1|^{2+\delta} < \infty$, $\delta > 0$ и $EY_1 < \infty = 0$, (2.10) превращается в соотношение $n^{-1/2} S_n \xrightarrow{d} X$, где X – гауссовская случайная величина со средним 0 и с ковариационной структурой как G_1 . Это следует из строгой стационарности мартингального процесса $\{G_t X_t\}$ [18].

Замечание 2.5. Отметим, что $\{Y_t\}$ – регулярно меняющиеся случайные величины с индексом α , полученный результат следует из применения результата Л. Бреймана [28], который показывает, что если ξ, η – независимые, одинаково распределенные случайные величины ($\eta > 0$ п. н., ξ – регулярно меняющаяся случайная величина с индексом $\alpha > 0$), $E\eta^v < \infty$ при некоторой $v > \alpha$, то

$$P(\xi\eta > x) \sim E\eta^\alpha P(\xi > x), \quad x \rightarrow \infty,$$

т. е. $\xi\eta$ также является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом $\alpha > 0$.

Заметим, что условие АЗ может быть заменено более слабым условием А'З ($A(a_n)$) [94]. Стационарный случайный процесс векторов $\{Y_t\}$ со значениями в R^d удовлетворяет условию $A(a_n)$, если существует такая последовательность положительных целых чисел r_n , что $r_n \rightarrow \infty$, $k_n = [n/r_n] \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и

$$E \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n f(Y_i/a_n) \right\} - \left(E \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{r_n} f(Y_i/a_n) \right\} \right)^{k_n} \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty, \forall f \in G, \quad (2.12)$$

где $\{a_n\}$ определена как $nP(|Y_1| > a_n) \sim 1$, $n \rightarrow \infty$; G – семейство ограниченно-неотрицательных функций на $\bar{R}^d \setminus \{0\}$.

Сходимость в (2.12) не требует равномерную ограниченность функций f . Это условие действительно очень слабое и является следствием многих известных условий перемешивания. В частности, при некоторых условиях на остатки модель GARCH также удовлетворяет условию сильного перемешивания [14]. Сравнение между другими перемешиваниями представлено в работе Р. А. Девиса [33].

Тогда имеем следующее условие А'З: последовательность $\{G_t X_t\}$ удовлетворяет условию $A(a_n)$, где $nP(|Y_1| > a_n) \sim 1$, $n \rightarrow \infty$, и $\{r_n\}$ определена в (2.12) такая, что

$$nr_n \left(\frac{a_{r_n}}{a_n} \right)^{\alpha+\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ при некоторой } \varepsilon > 0.$$

Теорема 2.15. Теорема 2.11 также справедлива, если условие АЗ заменено условием А'З [94; 113].

Асимптотическое поведение последовательности $\{a_n\}$ хорошо известно из теории регулярного изменения. Действительно, формула (2.11) с регулярным изменением случайной величины X_1 приводит к условию

$$a_n = n^{1/\alpha} L(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

где $L(n)$ – некоторая медленно меняющаяся функция [19].

Из формул (2.10) и (2.13) получим, что скорость сходимости последовательности S_n/n в теореме 2.12 имеет вид

$$na_n^{-1} = (L(n))^{-1} n^{1-1/\alpha}.$$

Из $L(n)/n^s \rightarrow 0$, $L(n)n^s \rightarrow \infty$ при всех $s > 0$ и $\alpha \in (0; 2)$ вытекает, что скорость сходимости последовательности S_n/n медленнее, чем скорость $\sqrt{n}$ в центральной предельной теореме для случайных величин с конечной дисперсией.

ГЛАВА 3

ПАРАМЕТРИЗАЦИИ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

3.1. Параметризации и соотношения между параметрами

Исследуются четыре представления характеристической функции устойчивых случайных величин и находятся соотношения между параметрами в параметризациях.*

Параметризация 1 (представление Леви – Хинчина) [127]. Запишем $X \sim S_{\alpha}^{(1)*}(\sigma^{(1)}, \beta^{(1)}, \mu^{(1)})$, если характеристическая функция случайной величины X имеет вид

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\{-(\sigma^{(1)} |t|)^{\alpha} [1 - i\beta^{(1)} \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}] + i\mu^{(1)}t\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma^{(1)} |t| [1 + i\beta^{(1)} \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln(|t|)] + i\mu^{(1)}t\} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\beta^{(1)} \in [-1; 1]$, $\mu^{(1)} \in R$, $\sigma^{(1)} > 0$.

Каноническое представление (3.1) имеет одну особенность: функция $\varphi_X(t)$ имеет разрывы во всех точках для $\alpha = 1$, $\beta^{(1)} \neq 0$.

Параметризация 2 (по В. М. Золотареву) [127]. Запишем $X \sim S_{\alpha}^{(2)}(\sigma^{(2)}, \beta^{(2)}, \mu^{(2)})$, если характеристическая функция случайной величины X имеет вид

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\{-(\sigma^{(2)} |t|)^{\alpha} [1 + i\beta^{(2)} \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} ((\sigma^{(2)} |t|)^{1-\alpha} - 1)] + i\mu^{(2)}t\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma^{(2)} |t| [1 + i\beta^{(2)} \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln(\sigma^{(2)} |t|)] + i\mu^{(2)}t\} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\beta^{(2)} \in [-1; 1]$, $\mu^{(2)} \in R$, $\sigma^{(2)} > 0$.

Выражение (3.2) характеристической функции непрерывно по α и $\beta^{(2)}$. Особенность этой формы состоит в том, что $\mu^{(2)}$ не имеет естественной интерпретации как параметр положения. Именно поэтому большинство авторов для выражения характеристической функции α -устойчивой случайной величины используют форму (3.1).

* Здесь и далее в этом разделе верхние индексы указывают на вид параметризации.

Параметры в формулах (3.1) и (3.2) связаны следующими соотношениями:

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)}, \sigma^{(2)} = \sigma^{(1)}, \mu^{(2)} = \begin{cases} \mu^{(1)} + \beta^{(1)}\sigma^{(1)} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \mu^{(1)} + \beta^{(1)}\sigma^{(1)} \frac{2}{\pi} \ln \sigma^{(1)} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Параметризация 3. Запишем $X \sim S_{\alpha}^{(3)}(\lambda^{(3)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(3)})$, если характеристическая функция случайной величины X имеет вид

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\{\lambda^{(3)}[it\gamma^{(3)} - |t|^{\alpha} + it|t|^{\alpha-1}\beta^{(3)} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}]\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{\lambda^{(3)}[it\gamma^{(3)} - |t| - it\beta^{(3)} \frac{2}{\pi} \ln |t|]\} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\beta^{(3)} \in [-1; 1]$, $\gamma^{(3)} \in \mathbb{R}$, $\lambda^{(3)} > 0$ [62].

Параметры в формуле (3.4) связаны с параметрами формулы (3.1) следующим образом:

$$\lambda^{(3)} = (\sigma^{(1)})^{\alpha}, \gamma^{(3)} = \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(3)}}, \beta^{(3)} = \beta^{(1)}.$$

Параметризация 4. Запишем $X \sim S_{\alpha}^{(4)}(\lambda^{(4)}, \beta^{(4)}, \gamma^{(4)})$, если характеристическая функция случайной величины X имеет вид

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\{\lambda^{(4)}[it\gamma^{(4)} - |t|^{\alpha} \exp(-i\frac{\pi}{2}\beta^{(4)}K(\alpha)\operatorname{sign}(t))]\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{\lambda^{(4)}[it\gamma^{(4)} - |t|(\frac{\pi}{2} + it\beta^{(4)}\operatorname{sign}(t)\ln |t|)]\} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\alpha \in (0; 2]$, $\beta^{(4)} \in [-1; 1]$, $\gamma^{(4)} \in \mathbb{R}$, $\lambda^{(4)} > 0$, $K(\alpha) = \alpha - 1 + \operatorname{sign}(1 - \alpha)$ [119].

Параметры в формуле (3.5) связаны с параметрами формулы (3.4) следующим образом:

а) если $\alpha \neq 1$, то

$$\lambda^{(4)} = \lambda^{(3)} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta^{(4)}K(\alpha)\right) \right]^{-1}, \quad \gamma^{(4)} = \gamma^{(3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta^{(4)}K(\alpha)\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\beta^{(4)}K(\alpha)\right)=\beta^{(3)}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right);$$

б) если $\alpha=1$, то

$$\lambda^{(4)}=\frac{2}{\pi}\lambda^{(3)}, \quad \gamma^{(4)}=\frac{\pi}{2}\gamma^{(3)}, \quad \beta^{(4)}=\beta^{(3)}. \quad (3.6)$$

Теорема 3.1. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma_j, \beta_j, \mu_j)$, $j = \overline{1, n}$, то

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma, \beta, \mu),$$

где

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha), \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \dots + \beta_n \sigma_n^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \dots + \mu_n.$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n=2$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1+X_2}(t) &= \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = \\ &= \begin{cases} \exp\{-(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|t|^\alpha[1 - i\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}\operatorname{sign}(t)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}] + i(\mu_1 + \mu_2)t\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-(\sigma_1 + \sigma_2)|t|[1 + i\frac{\beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\frac{2}{\pi}\operatorname{sign}(t)\ln|t|] + i(\mu_1 + \mu_2)t\} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Из параметризации 1 следует, что $X_1 + X_2 \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma, \beta, \mu)$, где

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2. \quad (3.7)$$

Полагаем, что теорема 3.1 справедлива при $n-1$, тогда

$$Z_{n-1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma_0, \beta_0, \mu_0),$$

где

$$\sigma_0 = (\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_{n-1}^\alpha), \quad \beta_0 = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \dots + \beta_{n-1} \sigma_{n-1}^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_{n-1}^\alpha}, \quad \mu_0 = \mu_1 + \dots + \mu_{n-1}.$$

Докажем, что теорема 3.1 справедлива при n .

Из формулы (3.7) получаем

$$Z_n = X_1 + \dots + X_n = Z_{n-1} + X_n \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma, \beta, \mu),$$

где

$$\sigma = (\sigma_0^\alpha + \sigma_n^\alpha)^{1/\alpha} = (\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta_0 = \frac{\beta_0 \sigma_0^\alpha + \beta_n \sigma_n^\alpha}{\sigma_0^\alpha + \sigma_n^\alpha} = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \dots + \beta_n \sigma_n^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha},$$

$$\mu = \mu_0 + \mu_n = \mu_1 + \dots + \mu_n.$$

Если $X \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma, \beta, \mu)$, $a \in R$, $a \neq 0$, то aX также является α -устойчивой случайной величиной и ее характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\varphi_{aX}(t) = \varphi_X(at) =$$

$$= \begin{cases} \exp\{-(|a|\sigma|t|)^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sign}(at) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}] + i(a\mu)t\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-(a\sigma)|t|[1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(at) \ln|t|] + i(a\mu - \beta \frac{2}{\pi} \sigma a \ln|a|)t\} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $aX \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma_0, \beta_0, \mu_0)$,

где

$$\sigma_0 = |a|\sigma, \quad \beta_0 = \beta \operatorname{sign}(a), \quad \mu_0 = \begin{cases} a\mu & \text{при } \alpha \neq 1, \\ a\mu - \beta \frac{2}{\pi} \sigma a \ln|a| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Обобщая теорему 3.1, получим результат в теореме 3.2.

Теорема 3.2. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma_j, \beta_j, \mu_j)$, $j = \overline{1, n}$, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – ненулевой вектор, $a_j \in R$, $j = \overline{1, n}$, то

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma, \beta, \mu),$$

где

$$\sigma = \left[\sum_{j=1}^n (|a_j| \sigma_j)^\alpha \right]^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{1}{\sigma^\alpha} \sum_{j=1}^n \beta_j (|a_j| \sigma_j)^\alpha \operatorname{sign}(a_j),$$

$$\mu = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j \mu_j & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \sum_{j=1}^n a_j \mu_j - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_j a_j \ln |a_j| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема 3.3. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_\alpha^{(2)}(\sigma_j, \beta_j, \mu_j)$, $j = \overline{1, n}$, то

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_\alpha^{(2)}(\sigma, \beta, \mu),$$

где

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \dots + \beta_n \sigma_n^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha},$$

$$\mu = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \mu_j + \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2} (\beta \sigma - \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_j) & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \sum_{j=1}^n \mu_j + \frac{2}{\pi} (\beta \sigma \ln \sigma - \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_j \ln \sigma_j) & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что $X_j \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma_j^{(1)}, \beta_j^{(1)}, \mu_j^{(1)})$, где

$$\sigma_j^{(1)} = \sigma_j, \quad \beta_j^{(1)} = \beta_j, \quad \mu_j^{(1)} = \begin{cases} \mu_j - \beta_j^{(1)} \sigma_j^{(1)} \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \mu_j - \beta_j^{(1)} \sigma_j^{(1)} \frac{2}{\pi} \ln \sigma_j^{(1)} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \quad j = \overline{1, n}.$$

Из формулы (3.3) и теоремы 3.1 получим

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_\alpha^{(1)}(\sigma^{(1)}, \beta^{(1)}, \mu^{(1)}),$$

где

$$\sigma^{(1)} = (\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta^{(1)} = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \dots + \beta_n \sigma_n^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha}, \quad \mu^{(1)} = \mu_1^{(1)} + \dots + \mu_n^{(1)}.$$

Отсюда вытекает, что $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_\alpha^{(2)}(\sigma, \beta, \mu)$, где

$$\sigma = \sigma^{(1)} = (\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \beta = \beta^{(1)} = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \dots + \beta_n \sigma_n^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \dots + \sigma_n^\alpha},$$

$$\mu = \begin{cases} \mu^{(1)} - \beta^{(1)} \sigma^{(1)} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} = \sum_{j=1}^n \mu_j + \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} (\beta\sigma - \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_j) & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \mu^{(1)} - \beta^{(1)} \sigma^{(1)} \frac{2}{\pi} \ln \sigma^{(1)} = \sum_{j=1}^n \mu_j + \frac{2}{\pi} (\beta\sigma \ln \sigma - \sum_{j=1}^n \beta_j \sigma_j \ln \sigma_j) & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Если $X \sim S_\alpha^{(2)}(\sigma, \beta, \mu)$, $a \in R$, $a \neq 0$, то характеристическая функция aX имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{aX}(t) &= \varphi_X(at) = \\ &= \begin{cases} \exp\{-(|a|\sigma|t|)^\alpha [1 + i\beta \operatorname{sign}(at) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} ((\sigma|at|^{1-\alpha}) - 1)] + i(a\mu)t\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-(a\sigma)|t| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(at) \ln(\sigma|at|)] + i(a\mu)t\} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, $aX \sim S_\alpha^{(2)}(\sigma_0, \beta_0, \mu_0)$, где

$$\sigma_0 = |a|\sigma, \quad \beta_0 = \beta \operatorname{sign}(a), \quad \mu_0 = a\mu.$$

Обобщая теорему 3.3, получим результат в теореме 3.4.

Теорема 3.4. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_\alpha^{(2)}(\sigma_j, \beta_j, \mu_j)$, $j = \overline{1, n}$, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – ненулевой вектор, $a_j \in R$, $j = \overline{1, n}$, то

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \sim S_\alpha^{(2)}(\sigma, \beta, \mu),$$

где

$$\sigma = \left[\sum_{j=1}^n (|a_j| \sigma_j)^\alpha \right]^{1/\alpha}, \quad \beta = \frac{1}{\sigma^\alpha} \sum_{j=1}^n \beta_j (|a_j| \sigma_j)^\alpha \operatorname{sign}(a_j),$$

$$\mu = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j \mu_j - \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2} (\beta \sigma - \sum_{j=1}^n a_j \beta_j \sigma_j) & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \sum_{j=1}^n a_j \mu_j + \frac{2}{\pi} (\beta \sigma \ln \sigma - \sum_{j=1}^n a_j \beta_j \sigma_j \ln(|a_j| \sigma_j)) & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема 3.5. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_{\alpha}^{(3)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = \overline{1, n}$, то

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_{\alpha}^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma),$$

где

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n, \quad \beta = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j, \quad \gamma = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j.$$

Доказательство. Предположим, что $X_j \sim S_{\alpha}^{(1)}(\sigma_j^{(1)}, \beta_j^{(1)}, \mu_j^{(1)})$, где

$$\sigma_j^{(1)} = \lambda_j^{1/\alpha}, \quad \beta_j^{(1)} = \beta_j, \quad \mu_j^{(1)} = \lambda_j \gamma_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Используя формулу (3.3) и теорему 3.1, имеем

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_{\alpha}^{(1)}(\sigma^{(1)}, \beta^{(1)}, \mu^{(1)}),$$

где

$$\sigma_j^{(1)} = \left[\sum_{j=1}^n (\sigma_j^{(1)})^{\alpha} \right]^{1/\alpha},$$

$$\beta^{(1)} = \frac{\beta_1 (\sigma_1^{(1)})^{\alpha} + \dots + \beta_n (\sigma_n^{(1)})^{\alpha}}{(\sigma^{(1)})^{\alpha}} = \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \right]^{-1} (\beta_1 \lambda_1 + \dots + \beta_n \lambda_n),$$

$$\mu^{(1)} = \sum_{j=1}^n \mu_j^{(1)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j.$$

Из формулы (3.5) получим $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_{\alpha}^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma)$,

где

$$\lambda = (\sigma^{(1)})^\alpha = \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad \gamma = \frac{\mu^{(1)}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j, \quad \beta = \beta^{(1)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j.$$

Если $X \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma)$, $a \in R$, $a \neq 0$, то характеристическая функция случайной величины aX имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{aX}(t) &= \varphi_X(at) = \\ &= \begin{cases} \exp\{(|a|^\alpha \lambda) [it \frac{a\gamma}{|a|^\alpha} - |t|^\alpha + it |t|^{\alpha-1} (\beta \operatorname{sign}(a) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2})]\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{(|a| \lambda) [\gamma - \beta \frac{2}{\pi} \ln |a|] - |t| + it \beta \operatorname{sign}(a) \frac{2}{\pi} \ln |t|]\} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Справедливо $aX \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda_0, \beta_0, \gamma_0)$,

где

$$\lambda_0 = |a|^\alpha \lambda, \quad \beta_0 = \beta \operatorname{sign}(a), \quad \gamma_0 = \begin{cases} |a|^{-\alpha} a\gamma & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \operatorname{sign}(a) [\gamma - \beta \frac{2}{\pi} \ln |a|] & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Обобщая теорему 3.5, получим результат в теореме 3.6.

Теорема 3.6. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = \overline{1, n}$, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – ненулевой вектор, $a_j \in R$, $j = \overline{1, n}$, то

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda, \beta, \gamma),$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j, \quad \beta = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \operatorname{sign}(a_j), \\ \gamma &= \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \gamma_j & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j (\gamma_j - \beta_j \frac{2}{\pi} \ln |a_j|) & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 3.7. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $j = \overline{1, n}$, то

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma),$$

где

$$\lambda = \begin{cases} \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \sin\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \right]^2 \right\}^{1/2} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \dots + \lambda_n \gamma_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j,$$

$$\beta \in [-1; 1], \text{ а } \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta K(\alpha)\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \text{ при } \alpha \neq 1,$$

$$\beta = \frac{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_n \beta_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j \quad \text{при } \alpha = 1.$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n = 2$ логарифм характеристической функции X_j имеет вид

$$\ln \varphi_{X_j}(t) = \begin{cases} \lambda_j [it\gamma_j - |t|^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) + i |t|^\alpha \operatorname{sign}(t) \sin\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right)] & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lambda_j [it\gamma_j - |t| \left(\frac{\pi}{2} + i\beta_j \operatorname{sign}(t) \ln |t|\right)] & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

$$j = 1, 2;$$

а) если $\alpha \neq 1$, то

$$\ln \varphi_{X_1+X_2}(t) = \ln \varphi_{X_1}(t) + \ln \varphi_{X_2}(t) =$$

$$= \left[\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_2 K(\alpha)\right) \right] \left\{ \frac{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2}{\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_2 K(\alpha)\right)} it - \right.$$

$$-|t|^\alpha + a + it|t|^{\alpha-1} \frac{\lambda_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right)}{\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right)} \Bigg\}.$$

Тогда $X_1 + X_2 \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda^{(3)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(3)})$,

где

$$\lambda^{(3)} = \lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right), \quad (3.8)$$

$$\beta^{(3)} = \frac{1}{\lambda^{(3)}} \left[\lambda_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right) \right] \cotg \frac{\pi\alpha}{2}, \quad (3.9)$$

$$\gamma^{(3)} = \frac{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2}{\lambda^{(3)}}. \quad (3.10)$$

Из соотношения (3.6) вытекает, что $X_1 + X_2 \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma)$,

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \left[\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right) \right]^{-1} = \\ &= \lambda^{(3)} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\gamma = \gamma^{(3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right), \quad \tg\left(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right) = \beta^{(3)} \tg \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (3.12)$$

Далее из (3.8)–(3.12) имеем

$$\begin{aligned} \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right) &= \lambda^{(3)} \beta^{(3)} \tg \frac{\pi\alpha}{2} = \\ &= \lambda_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используя (3.11) и (3.13), получим

$$\lambda = \left\{ \left[\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\lambda_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.14)$$

Используя (3.12) и зная, что $\lambda^{(3)}\gamma^{(3)} = \lambda\gamma$, получим

$$\gamma = \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2}{\lambda}. \quad (3.15)$$

Учитывая (3.11), $\beta \in [-1; 1]$, получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha)\right) = \frac{1}{\lambda} \left[\lambda_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_1 K(\alpha)\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_2 K(\alpha)\right) \right]; \quad (3.16)$$

б) если $\alpha = 1$, то

$$\ln \varphi_{X_1+X_2}(t) = \frac{\pi}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \left[\frac{2}{\pi} \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2}{\lambda_1 + \lambda_2} it - |t| - it \frac{\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \ln |t| \right] \sim \\ \sim S_\alpha^{(3)}(\lambda^{(3)}, \beta^{(3)}, \gamma^{(3)}),$$

где

$$\lambda^{(3)} = \frac{\pi}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad \beta^{(3)} = \frac{\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \gamma^{(3)} = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Из соотношения (3.6) вытекает, что $X_1 + X_2 \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma)$,

где

$$\lambda = \frac{2}{\pi}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad \beta = \beta^{(3)} = \frac{\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}\gamma^{(3)} = \frac{\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2}{\lambda}.$$

Когда $\alpha = 1$, $K(\alpha) = 0$ при $n = 2$, теорема 3.7 справедлива.

Полагаем, что теорема 3.7 справедлива при $n - 1$. Тогда

$$Z_{n-1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda_0, \beta_0, \gamma_0),$$

где

$$\lambda_0 = \begin{cases} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \sin\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \right]^2 \right\}^{1/2} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

$$\gamma_0 = \frac{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \dots + \lambda_{n-1} \gamma_{n-1}}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \gamma_j,$$

$$\beta_0 \in [-1; 1], \text{ так что } \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta K(\alpha)\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \text{ при } \alpha \neq 1,$$

$$\beta_0 = \frac{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_{n-1} \beta_{n-1}}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \beta_j \quad \text{при } \alpha = 1.$$

Докажем, что теорема 3.7 справедлива при $k = n$.

Известно, что

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = Z_{n-1} + X_n \sim S_\alpha^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma);$$

а) если $\alpha \neq 1$, то из (3.14)–(3.16) получим

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\{ \left[\lambda_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_0 K(\alpha)\right) + \lambda_n \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_n K(\alpha)\right) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\lambda_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \beta_0 K(\alpha)\right) + \lambda_n \sin\left(\frac{\pi}{2} \beta_n K(\alpha)\right) \right]^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \sin\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \right]^2 \right\}^{1/2}, \\ \gamma &= \frac{\lambda_0 \gamma_0 + \lambda_n \gamma_n}{\lambda} = \frac{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \dots + \lambda_n \gamma_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j, \end{aligned}$$

$\beta \in [-1; 1]$ и выполнено следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha)\right) &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_0 K(\alpha)\right) + \lambda_n \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_n K(\alpha)\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta_j K(\alpha)\right);\end{aligned}$$

б) если $\alpha = 1$, то

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \lambda_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \\ \beta &= \frac{\lambda_0 \beta_0 + \lambda_n \beta_n}{\lambda} = \frac{\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \dots + \lambda_n \beta_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j, \\ \gamma &= \frac{\lambda_0 \gamma_0 + \lambda_n \gamma_n}{\lambda} = \frac{\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \dots + \lambda_n \gamma_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j.\end{aligned}$$

Если $X \sim S_{\alpha}^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma)$, $a \in R$, $a \neq 0$, то характеристическая функция aX имеет вид

$$\ln \varphi_{aX}(t) = \begin{cases} (|a|^{\alpha} \lambda) \left[it \frac{a\gamma}{|a|^{\alpha}} - |t|^{\alpha} + |t|^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\beta K(\alpha) \operatorname{sign}(at)\right) \right] & \text{при } \alpha \neq 1, \\ (|a| \lambda) \left\{ it \operatorname{sign}(a) [\gamma - \beta \ln |a|] - |t| \left[\frac{\pi}{2} + it\beta \operatorname{sign}(at) \ln |t| \right] \right\} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $aX \sim S_{\alpha}^{(4)}(\lambda_0, \beta_0, \gamma_0)$,
где

$$\lambda_0 = |a|^{\alpha} \lambda, \quad \beta_0 = \beta \operatorname{sign}(a), \quad \gamma_0 = \begin{cases} |a|^{-\alpha} a\gamma & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \operatorname{sign}(a) \left[\gamma - \beta \frac{2}{\pi} \ln |a| \right] & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Обобщая теорему 3.7, получим результат в теореме 3.8.

Теорема 3.8. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_j \sim S_{\alpha}^{(4)}(\lambda_j, \beta_j, \gamma_j)$, $a \in R$, $a \neq 0$, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – ненулевой вектор, $a_j \in R$, $a \in R$, $a \neq 0$, тогда

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \sim S_{\alpha}^{(4)}(\lambda, \beta, \gamma);$$

а) если $\alpha \neq 1$, то

$$\lambda_0 = \left\{ \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \sin\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right) \text{sign}(a_j) \right]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\beta \in [-1; 1], \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta K(\alpha)\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \cos\left(\frac{\pi}{2} \beta_j K(\alpha)\right),$$

$$\gamma = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \gamma_j;$$

б) если $\alpha = 1$, то

$$\lambda = \sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j, \quad \beta = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n |a_j|^\alpha \lambda_j \beta_j \text{sign}(a_j),$$

$$\gamma = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \gamma_j - \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \beta_j \ln |a_j|.$$

3.2. Преобразование Лапласа устойчивых случайных величин

В данном разделе $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ означает α -устойчивую случайную величину с характеристической функцией (3.1). Рассматривается преобразование Лапласа устойчивых случайных величин и распределение произведения двух устойчивых случайных величин.

Известно, что преобразование Лапласа случайной величины X с функцией распределения $F_X(x)$, $x \in R$, определено в виде

$$\hat{F}_X(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dF_X(x), \quad \lambda > 0.$$

Лемма 3.1. Если распределение $F_X(x)$ удовлетворяет условию регулярного изменения с индексом α , $0 < \alpha < 1$, т. е.

$$1 - F_X(x) \sim L(x)x^{-\alpha} \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция, то

$$1 - \hat{F}_X(\lambda) \sim L(1/\lambda)\Gamma(1-\alpha)\lambda^\alpha \text{ при } \lambda \rightarrow 0 \text{ [43].}$$

Теорема 3.9. Если $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, $\alpha \in (0; 1)$, то

$$\hat{F}_X(\lambda) = e^{a\lambda^\alpha}, \quad \lambda > 0,$$

где

$$a = \sigma^\alpha \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} \right)^{-1}.$$

Доказательство. Из определения строго устойчивых случайных величин (2.2) следует, что для преобразования Лапласа случайной величины $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ выполняется следующее равенство:

$$[\hat{F}_X(\lambda)]^n = \hat{F}_X(n^{1/\alpha}\lambda). \quad (3.17)$$

Отсюда имеем

$$\hat{F}_X(\lambda) = e^{a\lambda^\alpha}, \quad a \in R.$$

Известно, что если $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, $0 < \alpha < 1$, то при $x \rightarrow \infty$

$$1 - F_X(x) \sim 2\sigma c_\alpha x^{-\alpha},$$

где $c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \sin \frac{\pi\alpha}{2}$ [101].

Из леммы 3.1 вытекает, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$1 - \hat{F}_X(\lambda) \sim 2\sigma^\alpha c_\alpha \Gamma(1-\alpha) \lambda^\alpha. \quad (3.18)$$

С другой стороны, используя формулу (3.17), получим, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$1 - \hat{F}_X(\lambda) = 1 - e^{a\lambda^\alpha} \sim a\lambda^\alpha. \quad (3.19)$$

Учитывая формулы (3.18), (3.19) и зная, что

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},$$

имеем

$$a = 2\sigma^\alpha c_\alpha \Gamma(1-\alpha) = 2\sigma^\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \Gamma(1-\alpha) = \sigma^\alpha \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} \right)^{-1}.$$

Замечание 3.1. Если случайная величина $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, то $(-X) \sim S_\alpha(\sigma, -1, 0)$, поэтому преобразование Лапласа случайной величины $(-X)$ имеет вид, как в теореме 3.9 при $\lambda < 0$.

Лемма 3.2. Пусть X, Y – независимые случайные величины, Y – положительна, тогда

$$F_{XY}(x) = \int_0^\infty F_X\left(\frac{x}{t}\right) f_Y(t) dt, \quad (3.20)$$

где $F_{XY}(x)$, $F_X(x)$, $x \in R$ – функции распределения случайных величин XY и X соответственно; $f_Y(t)$ – плотность распределения случайной величины Y [101].

Лемма 3.3. Пусть X, Y – независимые случайные величины, Y – положительна, тогда характеристическая функция случайной величины XY имеет вид

$$\varphi_{XY}(t) = \int_{-\infty}^\infty \varphi_X(tz) f_Y(z) dz = E\varphi_X(tY), \quad (3.21)$$

где $\varphi_X(t)$ – характеристическая функция случайной величины X .

Доказательство. Из формулы (3.20) получим

$$\begin{aligned} \varphi_{XY}(t) &= \int_{-\infty}^\infty e^{itx} dF_{XY}(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} \int_0^\infty \frac{1}{z} f_Y\left(\frac{x}{z}\right) f_Y(z) dz dx = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{itz\left(\frac{t}{z}\right)} f_X\left(\frac{x}{z}\right) d\frac{x}{z} \right) f_Y(z) dz = \int_0^\infty \varphi_X(tz) f_Y(z) dz = E\varphi_X(tY). \end{aligned}$$

Теорема 3.10. Если $X \sim S_\alpha(1, 0, 0)$, $0 < \alpha < 2$, то для любого значения λ , $0 < \alpha < \lambda \leq 2$, существуют такие независимые симметричная λ -устойчивая случайная величина Y_1 и односторонняя (α/λ) -устойчивая случайная величина $Y_2 \sim S_{\alpha/\lambda}(\sigma, 1, 0)$ с преобразованием Лапласа вида $\exp\{-t^{\alpha/\lambda}\}$, $t > 0$, что

$$X \stackrel{d}{=} Y_1 Y_2^{1/\lambda}. \quad (3.22)$$

Доказательство. Предположим, что $X \sim S_\alpha(1,0,0)$, $0 < \alpha < 2$, тогда для любого значения λ , $0 < \alpha < \lambda \leq 2$, имеем $\alpha / \lambda < 1$. Из теоремы 3.9 следует, что если $Y_2 \sim S_{\alpha/\lambda}((\cos \frac{\pi\alpha}{2\lambda})^{\lambda/\alpha}, 1, 0)$, то преобразование Лапласа имеет вид

$$\hat{F}_{Y_2}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} dF(x) = \exp \left\{ - \frac{\left(\left(\cos \frac{\pi\alpha}{2\lambda} \right)^{\lambda/\alpha} \right)^{\alpha/\lambda}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2\lambda}} |t|^{\alpha/\lambda} \right\} = e^{-|t|^{\alpha/\lambda}}, \quad t > 0. \quad (3.23)$$

Можно найти такую случайную величину Y_1 , $Y_1 \sim S_\lambda(1,0,0)$, при которой Y_1 и Y_2 – независимые случайные величины. Тогда характеристическая функция случайной величины Y_1 имеет вид

$$\varphi_{Y_1}(t) = e^{-|t|^\lambda}, \quad t \in R.$$

Из формул (3.21) и (3.23) вытекает, что характеристическая функция случайной величины $Y_1 Y_2^{1/\lambda}$ имеет вид

$$\varphi_{Y_1 Y_2^{1/\lambda}}(t) = E \varphi_{Y_1}(t Y_2^{1/\lambda}) = E \exp \{ - |t|^\lambda Y_2 \} = e^{-(|t|^\lambda)^{\alpha/\lambda}} = e^{-|t|^\alpha} = \varphi_X(t).$$

Замечание 3.2. Когда симметричная случайная величина $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, \mu)$, $0 < \alpha < 2$, то формулу (3.22) можно записать в виде

$$X \stackrel{d}{=} Y_1 Y_2^{1/\lambda} + \mu,$$

где

$$Y_1 \sim S_\lambda(\sigma, 0, 0), \quad Y_2 \sim S_{\alpha/\lambda} \left(\left(\cos \frac{\pi\alpha}{2\lambda} \right)^{\lambda/\alpha}, 1, 0 \right).$$

Следствие 3.1. Пусть Y_1 и Y_2 – независимые случайные величины, Y_1 – симметричная α -устойчивая случайная величина, $0 < \alpha < 2$, $Y_2 \sim S_\lambda(\sigma, 1, 0)$, $0 < \lambda < 1$, тогда $Y_1 Y_2^{1/\alpha}$ является симметричной $(\alpha\lambda)$ -устойчивой случайной величиной.

Следствие 3.2. Если Y_1 и Y_2 – независимые случайные величины, Y_1 имеет распределение Коши, Y_2 – односторонне устойчивая случайная величина $Y_2 \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, $0 < \alpha < 1$, то $Y_1 Y_2$ является симметричной α -устойчивой случайной величиной.

Доказательство. Результат следует из теоремы 3.10 в случае $\lambda = 1$, $0 < \alpha < 1$.

ГЛАВА 4

ПРОЦЕССЫ АВТОРЕГРЕССИИ С УСТОЙЧИВЫМИ ОСТАТКАМИ

4.1. Классические параметрические модели

Рассмотрим некоторые факты, касающиеся стационарных временных рядов. Опираясь на их основные свойства и на то, как они могут быть использованы, определим другие понятия, которые имеют решающее значение в области финансов.

Пусть X_t , $t \in Z$, – временной ряд или дискретный случайный процесс, определенный на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Введем некоторые понятия стационарности.

Определение 4.1. Процесс X_t , $t \in Z$, называется строго стационарным или стационарным в узком смысле, если векторы $(X_1, \dots, X_k)$ и $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})$ имеют одно и то же совместное распределение для любых $k \in N, h \in Z$. Данное понятие определяет только первые два момента для X_t , $t \in Z$, но, в отличие от строгой стационарности, требует их существования.

Определение 4.2. Процесс X_t , $t \in Z$, называется слабо стационарным, стационарным второго порядка или стационарным в широком смысле, если:

- 1) $EX_t^2 < \infty$ для любого $t \in Z$;
- 2) $EX_t = m = \text{const}$ для любого $t \in Z$;
- 3) $\text{cov}(X_{t+h}, X_t) = R(h)$ для любого $t, h \in Z$, где $R(h)$ – ковариационная функция процесса.

Функция $\rho(h) = \frac{R(h)}{R(0)}$ называется корреляционной функцией процесса, $h \in Z$.

Классический анализ временных рядов сосредоточен на исследовании стационарных в широком смысле процессов. Гауссовские стационарные процессы полностью характеризуются их математическим ожиданием и ковариационной функцией. Для негауссовских процессов характеристики дают первое представление о временной зависимости. На практике эти моменты неизвестны и оцениваются по выборке соответствующего размера.

Простейшим примером слабо стационарного процесса является белый шум. Этот процесс особенно важен, так как позволяет построить более сложные стационарные процессы.

Определение 4.3. Процесс ε_t , $t \in Z$, называется слабым белым шумом, если:

- 1) $E\varepsilon_t = 0$ для любого $t \in Z$;

- 2) $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2 = \text{const}$ для любого $t \in Z$;
 3) $\text{cov}(X_{t+h}, X_t) = R(h)$ для любых $t, h \in Z, h \neq 0$.

Следует отметить, что в определении слабого белого шума никаких заявлений о независимости не сделано, а предполагается, что X_{t+h} и X_t , $h \neq 0$ являются некоррелированными.

Определение 4.4. Процесс ε_t , $t \in Z$, называется сильным белым шумом, если в предыдущем определении пункт 3 заменить на

- 3') X_{t+h} и X_t , $t, h \in Z, h \neq 0$, независимы и одинаково распределены.

Если $\sigma^2 = 1$, то белый шум называется стандартным. Заметим, что σ^2 может быть конечным или может принимать значение $+\infty$.

Два данных определения особенно важны для финансовых временных рядов.

Рассмотрим некоторые процессы, которые строятся на основе белого шума.

Определение 4.5. Процесс X_t , $t \in Z$, называется авторегрессионным (*autoregressive*) порядка p , $p \geq 1$, если он удовлетворяет уравнению

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

при этом все корни многочлена

$$P(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_p z^p,$$

$|z_k| > 1$, $t \in Z$, a_j – числовые параметры, $j = \overline{1, p}$, ε_t – сильный белый шум. В таком случае обозначают $X_t \sim \text{AR}(p)$, $t \in Z$. Заметим, что X_t можно представить в виде

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varepsilon_{t-k},$$

где $b_k = \sum_{j=1}^p a_j b_{k-j}$, $k \geq p$ и $b_0 = 1$, $b_j = a_j$, $j = \overline{1, p-1}$, $t \in Z$.

Обычно в качестве ε_t используют белый шум с нормальным распределением, т. е. имеющим устойчивое распределение с показателем $\alpha = 2$. Предполагая, что ε_t – независимые, одинаково распределенные с показателем α , если $0 < \alpha < 2$ и $\varepsilon_t \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $t \in Z$, то $X_t \sim S_\alpha(\bar{\sigma}, \bar{\beta}, \bar{\mu})$, где

$$\bar{\sigma}^\alpha = \frac{\sigma^\alpha}{1 - |a_1|^\alpha},$$

$$\bar{\beta} = \frac{\beta(1 + |a_1|^\alpha \text{sign } a_1)}{1 + |a_1|^\alpha},$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{1 - a_1} + \bar{b},$$

$$\bar{b} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2\sigma\beta a_1 \ln|a_1|}{\pi(1 - a_1)^2}, & \alpha = 1 \end{cases}.$$

Определение 4.6. Процесс X_t , $t \in Z$, называется процессом скользящего среднего (*moving average*) порядка q , $q \geq 1$, если он удовлетворяет уравнению

$$X_t = \sum_{k=0}^q b_k \varepsilon_{t-k},$$

где $t \in Z$, b_k – числовые параметры; $k = \overline{1, q}$; ε_t – сильный белый шум.

В данном случае обозначают $X_t \sim \text{MA}(q)$, $t \in Z$.

Предполагая, что $\varepsilon_t \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $t \in Z$ и $0 < \alpha < 2$, получим $X_t \sim S_\alpha(\bar{\sigma}, \bar{\beta}, \bar{\mu})$, где

$$\bar{\sigma}^\alpha = B\sigma^\alpha,$$

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{B} \sum_{k=0}^q |b_k|^\alpha \text{sign } a_k,$$

$$\bar{\mu} = A\mu + \bar{b},$$

$$\bar{b} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \sigma \beta \sum_{k=0}^p b_k \ln|b_k|, & \alpha = 1 \end{cases},$$

причем $A = \sum_{k=0}^q b_k$, $B = \sum_{k=0}^q |a_k|^\alpha$.

Определение 4.7. Процесс X_t , $t \in Z$, называется смешанным процессом авторегрессии и скользящего среднего (*autoregressive moving average*) порядка (p, q) , $p, q \geq 1$, если он удовлетворяет уравнению

$$X_t + \sum_{k=1}^p a_k X_{t-k} = b_0 \varepsilon_t + \sum_{k=1}^q b_k \varepsilon_{t-k},$$

при этом, как и в случае процесса авторегрессии, все корни многочлена

$$P(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_p z^p$$

должны лежать вне отрезка $[-1; 1]$; ε_t – сильный белый шум; $t \in Z$, $a_k, k = \overline{1, p}$, $b_k, k = \overline{1, q}$ – числовые параметры модели.

В данном случае обозначают $X_t \sim \text{ARMA}(p, q), t \in Z$.

Класс ARMA-моделей наиболее широко используется для прогнозирования стационарных в широком смысле случайных процессов.

С помощью моделей $\text{AR}(p)$ и $\text{MA}(q)$ за счет выбора порядков p и q можно удовлетворительно описывать достаточно большое количество реальных процессов. Но на практике такие процессы становятся чересчур громоздкими, так как необходимо применять модели высокого порядка для адекватного описания динамической структуры данных. Иногда целесообразно объединить в одной модели авторегрессию и скользящее среднее для достижения большей гибкости в подгонке моделей к наблюдаемым временным рядам. Решению этой задачи помогают смешанные модели авторегрессии – скользящего среднего, т. е. модели ARMA.

Основное преимущество ARMA-модели, по сравнению с AR или MA, в том, что, как правило, она требует меньше параметров для оценки временного ряда.

Одной из наиболее важных и широко используемых моделей для прогнозирования временных рядов является модель авторегрессионного интегрированного скользящего среднего (*Autoregressive Integratinal Moving Average* (ARIMA)). Популярность моделей обусловлена ее статистическими свойствами и методологией Бокса – Дженкинса в процессе построения. Кроме того, с помощью моделей ARIMA могут быть реализованы различные модели экспоненциального сглаживания. Хотя модели ARIMA могут представлять различные типы временных рядов, их основным ограничением является предварительно предполагаемая линейная форма. Таким образом, линейная корреляционная структура подразумевается среди значений временного ряда, что делает невозможным фиксирование нелинейных структур моделью ARIMA. Приближение линейных моделей к реальной проблеме не всегда удовлетворительно. Это особенно остро проявляется при прогнозировании различных финансовых показателей (курсов валют, акций, биржевых индексов, ставок по кредитам и т. д.), где имеет

место изменчивость дисперсии на различных интервалах наблюдения, т. е. гетероскедастичность.

Многие финансовые временные ряды показывают такие тренды, что предположение о стационарности невозможно. Они часто исчезают, если ряды продифференцировать один или несколько раз. Пусть $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ обозначает ряд приращений первого порядка, $\Delta^d X_t = \Delta(\Delta^{d-1} X_t)$ ($\Delta^0 X_t = X_t$) – ряд приращений порядка $d, d = 1, 2, \dots$.

Определение 4.8. Пусть d – положительное целое число. Процесс $X_t, t \in Z$, называется процессом авторегрессионного интегрированного скользящего среднего порядка (p, q) , $p, d, q \geq 1$, если для $k = \overline{0, d-1}$ процессы $\Delta^k X_t$ не удовлетворяют уравнению стационарности второго порядка, а процесс $\Delta^d X_t$ является ARMA(p, q)-процессом. В этом случае обозначают $X_t \sim \text{ARIMA}(p, d, q), t \in Z$.

4.2. Оценки параметров для процесса авторегрессии

Одной из наиболее простых, часто используемых моделей является процесс авторегрессии или стохастическое разностное уравнение. О последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots$ говорят, что она удовлетворяет стохастическому разностному уравнению, если существует такая линейная комбинация

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t, t \in Z, \quad (4.1)$$

где $\{\varepsilon_t\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины; $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ – истинные параметры процесса. Формула (4.1) также называется процессом авторегрессии порядка p .

Если уравнение

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0$$

имеет p корней, которые лежат вне единичного круга, то этот процесс может быть представлен в виде

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, t \in Z \quad (4.2)$$

при некоторых $\psi_j \in R, j = 1, 2, \dots, \psi_0 = 1$ [1].

Если $\{\varepsilon_t\}$ – симметричные случайные величины, удовлетворяющие условию

$$E \ln^+ |\varepsilon_1| < \infty, \quad (4.3)$$

где $\ln^+ |x| = \max\{0, \ln |x|\}$, то процесс (4.2) является стационарным процессом [126].

Пусть

$$\Phi = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) : \Phi(z) = 1 - \beta_1 z - \beta_2 z^2 - \dots - \beta_p z^p \neq 0, \forall |z| \leq 1\},$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ – n наблюдений за процессом X_t , $t \in Z$. М-оценка $\hat{\phi}_n = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p)$ вектора истинных параметров $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ процесса (4.1) минимизирует функцию

$$\sum_{t=p+1}^n \rho(X_t - \beta_1 X_{t-1} - \dots - \beta_p X_{t-p}) \quad (4.4)$$

относительно $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \Phi$. Если ρ – выпуклая функция, то традиционный подход к определению асимптотического поведения $\hat{\phi}$ состоит в нахождении частных производных функции (4.4):

$$\begin{aligned} \sum_{t=p+1}^n \frac{\partial \rho(X_t - \beta_1 X_{t-1} - \dots - \beta_p X_{t-p})}{\partial \beta_j} = \\ = - \sum_{t=p+1}^n X_{t-j} \Psi(X_t - \beta_1 X_{t-1} - \dots - \beta_p X_{t-p}) = 0, \quad j=1, 2, \dots, p, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\Psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$, ∂ – частная производная. Оценку $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p)$ находим как решение системы уравнений (4.5).

Проблема оценки параметров этой модели с остатками, имеющими конечную вариацию, рассматривалась в работе Т. Андерсона [1]. В случае общего условия К. Найт [69] использовал метод модулей для оценки параметров модели (4.1) с остатками, имеющими медиану 0, и для некоторой последовательности $\{a_n\}$. Последовательность функций

$$\Psi_n(t) = \int_0^t \sqrt{n} [F(s/a_n) - F(0)] ds$$

является выпуклой и сходится к функции $\Psi(t)$ при $n \rightarrow \infty$, где $F(\cdot)$ – функция распределения случайной величины ε_1 . Тогда получим состоятельность оценки $\hat{\phi}_n$ метода модулей

$$a_n(\hat{\phi}_n - \phi) \xrightarrow{d} \xi, \quad n \rightarrow \infty,$$

при некоторой случайной величине ξ .

Если (4.3) выполняется, то В. Ёхай и Р. Маронна [126] предлагают использовать метод наименьших квадратов для оценки параметров процесса (4.1) с остатками, которые принадлежат области притяжения устойчивых законов. Полученная состоятельная оценка $\hat{\phi}_n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет вид

$$n^{1/2}(\hat{\phi}_n - \phi) = b_n + o(1),$$

где $b_n - R^p$ случайный вектор; $Eb_n = 0$.

С. Гросс и В. Л. Стейгер [52] доказали сильную состоятельность оценки $\hat{\phi}_n$ в предположении, что Z_1 имеет единичную медиану:

$$a_n(\hat{\phi}_n - \phi) \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где ξ – некоторый случайный вектор;

$$a_n = \inf\{x : x > 0, P(|Z_1| > x) \leq n^{-1}\} \quad [32; 35]. \quad (4.6)$$

4.3. М-оценка Хьюбера для процесса авторегрессии с симметричными устойчивыми остатками

В данном разделе доказываем состоятельность М-оценки Хьюбера для процесса авторегрессии порядка p вида (4.1), когда его остатки имеют симметричное устойчивое распределение.

Рассмотрим процесс авторегрессии порядка p вида (4.1), где $\{\varepsilon_t\}$, $t \in Z$, – независимые, одинаково распределенные α -устойчивые случайные величины, $\alpha \in (0; 2]$.

Если $\{\varepsilon_t\}$, $t \in Z$, являются α -устойчивыми одинаково распределенными случайными величинами, $\alpha \in (0; 2]$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha [1 - F(x)] = k > 0, \quad (4.7)$$

где $F(x)$ – функция распределения случайной величины ε_1 [43].

Если функция распределения $F(x)$ случайной величины ε_t удовлетворяет уравнению (4.7), то выполняется условие (4.3). Другими словами, все процессы авторегрессии (4.1) с остатками, являющимися α -устойчивыми случайными величинами, также будут и стационарными процессами.

М-оценка Хьюбера получается из следующей задачи оптимизации:

$$\min_{\beta \in \Phi} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \rho(X_t - \beta_1 X_{t-1} - \dots - \beta_p X_{t-p}) \right\}, \quad (4.8)$$

где Φ – параметрическое пространство, которое определено в разделе 4.3, ρ – функция Хьюбера, определяемая как

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 \\ \gamma |t| - \frac{1}{2} \gamma^2 \end{cases} \text{ при } |t| \leq \gamma, \quad (4.9)$$

$t \in R$, γ – положительная постоянная.

В подобном случае $\Psi(\cdot)$ – неотрицательная, выпуклая, непрерывная функция вида

$$\Psi(t) = \begin{cases} t \\ \gamma \text{sign}(t) \end{cases} \text{ при } |t| \leq \gamma.$$

Рассмотрим М-оценку Хьюбера для процесса (4.1) с остатками $\{\varepsilon_t\}$, которые являются симметричными α -устойчивыми случайными величинами, $\alpha \in (0; 1)$.

Из задачи оптимизации (4.8) по n наблюдениям за процессом $\{X_t\}$, $X_1, \dots, X_n$ рассмотрим модифицированную функцию

$$\sum_{t=p+1}^n [\rho(X_t - \beta_1 X_{t-1} - \dots - \beta_p X_{t-p}) - \rho(\varepsilon_t)], \quad (4.10)$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) \in \Phi$.

Если последовательность a_n задана соотношением (4.6), то функция (4.10) может быть переписана в виде

$$\sum_{t=p+1}^n [\rho(Z_t - a_n(\beta_1 - \phi_1)a_n^{-1}X_{t-1} - \dots - a_n(\beta_p - \phi_p)a_n^{-1}X_{t-p}) - \rho(\varepsilon_t)]. \quad (4.11)$$

Рассмотрим следующую последовательность:

$$W_n(u) = \sum_{t=p+1}^n [\rho(\varepsilon_t - u_1 a_n^{-1} X_{t-1} - \dots - u_p a_n^{-1} X_{t-p}) - \rho(\varepsilon_t)], \quad (4.12)$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$, $u_i = a_n(\beta_i - \phi_1)$, $i = \overline{1, p}$.

Лемма 4.1. Пусть $F(x)$ – функция распределения некоторой α -устойчивой случайной величины,

$$U_\lambda(x) = \int_0^x y^\lambda F(dy), \quad V_\mu(x) = \int_x^\infty y^\mu F(dy),$$

где $\lambda > 0$, $-\infty < \mu < \lambda$, $U_\lambda(\infty) = \infty$.

Если $U_\lambda(\cdot)$ и $V_\mu(\cdot)$ – регулярно меняющиеся функции, то существует предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\lambda-\mu} V_\mu(x)}{U_\lambda(x)} = c,$$

где $c = \frac{\lambda - \alpha}{\alpha - \beta}$, если $\mu < \alpha \leq \lambda$, и $c = +\infty$, если $\mu = \alpha$.

Обозначим

$$Y_t = u_1 X_{t-1} + \dots + u_p X_{t-p}, \quad (4.13)$$

$$Y_{nt} = u_1 a_n^{-1} X_{t-1} + \dots + u_p a_n^{-1} X_{t-p} \quad [43]. \quad (4.14)$$

Лемма 4.2. Пусть $\{Y_t\}$ и $\{Y_{nt}\}$ определены равенствами (4.13) и (4.14) соответственно, $\{V_t\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины с конечным средним, V_t и Y_t – независимые для любого $t \in Z$, тогда для любых $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left[\sum_{t=1}^n |V_t| |Y_{nt}|^\lambda I_{(|Y_{nt}| > \sigma)} > \varepsilon \right] \leq C \sigma^{-\alpha} P(|V_t| > 0) \quad (4.15)$$

при некоторой $C > 0$ [32].

Лемма 4.3. Для всех непрерывных функций f на $R \times (R \setminus \{0\})$ с компактной опорой имеем

$$\sum_{t=1}^{\infty} f(\varepsilon_t, Y_{nt}) \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(Z_{k,i}, c_i \delta_k \Gamma_k^{-1/\alpha}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $\{Z_{k,i}\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, причем $Z_{k,i} \stackrel{d}{=} \varepsilon_1$; $\{\delta_k\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины, $P(\delta_k = 1) = q$ и $P(\delta_k = -1) = 1 - q$, $\Gamma_k = E_1 + \dots + E_k$, $\{E_k\}$ – независимые, одинаково распределенные экспоненциальные случайные величины с единичным параметром; $\{Z_{k,i}\}$, $\{\delta_k\}$ и $\{E_k\}$ – независимые, $k, i = 1, 2, \dots$ [32].

Теорема 4.1. Для функций (4.12), где ρ – функция вида (4.9), имеем

$$W_n(u) \xrightarrow{d} W(u) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (4.16)$$

где

$$W(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\rho(Z_{k,i} - (\psi_{i-1}u_1 + \dots + \psi_{i-p}u_p) \delta_k \Gamma_k^{-1/\alpha}) - \rho(Z_{k,i}) \right], \quad (4.17)$$

случайные величины $Z_{k,i}$, δ_k , Γ_k , $k, i = 1, 2, \dots$ определены в лемме 4.3.

Доказательство. Из леммы 4.3 вытекает, что для доказательства (4.9) достаточно показать следующие соотношения:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \sum_{t=1}^n \rho(\varepsilon_t, Y_{nt}) [1 - I_{(|\varepsilon_t| \leq M)} I_{(|Y_{nt}| > \sigma)}] \right| > \varepsilon \right] = 0, \quad (4.18)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(Z_{t,i}, c_i \delta_k \Gamma_k^{-1/\alpha}) I_{(|\varepsilon_t| \leq M)} I_{(|c_i \delta_k \Gamma_k^{-1/\alpha}| > \sigma)} \xrightarrow{p} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho(Z_{t,i}, c_i \delta_k \Gamma_k^{-1/\alpha}), \quad (4.19)$$

при $M \rightarrow \infty$, где $I_{\{A\}}$ – индикатор множества A , $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность чисел, $\varepsilon > 0$.

Разложим в ряд Тейлора функцию $\rho(\varepsilon_t - Y_{nt}(u))$ относительно переменной $Y_{nt}(u)$ в точке ε_t , где ρ – функция Хьюбера:

$$\sum_{t=1}^n [\rho(\varepsilon_t - Y_{nt}(u)) - \rho(\varepsilon_t)] = - \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) \Psi(\xi_t^{(n)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) \Psi(\varepsilon_t) + \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) [\Psi(\varepsilon_t) - \Psi(\xi_t^{(n)})] = \\
&= -\sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) \Psi(\varepsilon_t) + \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) [Z_t I_{(|\varepsilon_t| \leq \gamma)} - \xi_t^{(n)} I_{(|\xi_t^{(n)}| \leq \gamma)}] + \\
&\quad + \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) [\gamma \operatorname{sign}(\varepsilon_t) I_{(|Z_t| > \gamma)} - \gamma \operatorname{sign}(\xi_t^{(n)}) I_{(|\xi_t^{(n)}| > \gamma)}], \tag{4.20}
\end{aligned}$$

где $|\varepsilon_t - \xi_t^{(n)}| \leq |Y_{nt}(u)|$, $\Psi(\varepsilon_t) = \varepsilon_t I_{(|\varepsilon_t| \leq \gamma)} - \gamma \operatorname{sign}(\varepsilon_t) I_{(|\varepsilon_t| > \gamma)}$.

Известно, что

$$1 - I_{(|\varepsilon_t| \leq M)} I_{(|Y_{nt}(u)| > \sigma)} = I_{(|\varepsilon_t| > M)} I_{(|Y_{nt}(u)| > \sigma)} + I_{(|Y_{nt}(u)| \leq \sigma)},$$

поэтому для доказательства (4.18) сначала докажем следующее соотношение:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) I_{(|Y_{nt}(u)| > \sigma)} \Psi(\varepsilon_t) I_{(|\varepsilon_t| > M)} \right| > \varepsilon \right] = 0. \tag{4.21}$$

Действительно, пусть $V_t = \Psi(\varepsilon_t) I_{(|\varepsilon_t| > M)}$, тогда $E |V_t| < \infty$, V_t и Y_t — независимые при любом t . Из леммы 4.2 имеем, что при $M \rightarrow \infty$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) I_{(|Y_{nt}(u)| > \sigma)} \Psi(\varepsilon_t) I_{(|\varepsilon_t| > M)} \right| > \varepsilon \right] \leq C \sigma^{-\alpha} P(|V_t| > M) \rightarrow 0.$$

Получим соотношение (4.21).

С другой стороны, зная, что $E |\Psi(\varepsilon_t)| = K < \infty$, запишем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{-1} E \left| \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) \Psi(\varepsilon_t) I_{(|Y_{nt}(u)| \leq \sigma)} \right| \leq \varepsilon^{-1} E \sum_{t=1}^n |Y_{nt}(u)| I_{(|Y_{nt}(u)| \leq \sigma)} E |\Psi(\varepsilon_t)| \leq \\
&\leq \varepsilon^{-1} n E |Y_{nt}(u)| I_{(|Y_{nt}(u)| \leq \sigma)} E |\Psi(\varepsilon_t)| \leq \varepsilon^{-1} K n E |Y_{nt}(u)| I_{(|Y_{nt}(u)| \leq \sigma)} = \\
&= \varepsilon^{-1} K n a_n^{-1} E |Y_t| I_{(|Y_t| \leq a_n \sigma)} = \varepsilon^{-1} K n a_n^{-1} \int_{-a_n \sigma}^{a_n \sigma} y G(dy), \tag{4.22}
\end{aligned}$$

где G — функция распределения случайной величины Y_t .

Из предположения симметрии случайных величин ε_t и уравнения (4.2) вытекает, что $Y_t = u_1 X_{t-1} - \dots - u_p X_{t-p}$ — симметричные случайные

величины. Используем лемму 4.1 для $\lambda=1, \mu=0$. Если $\mu=0$, то $V_\mu(x)=1-F(x)$, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} K n a_n^{-1} \int_{-a_n \sigma}^{a_n \sigma} y G(dy) &= 2 \varepsilon^{-1} K n a_n^{-1} \int_0^{a_n \sigma} y G(dy) = \\ &= 2 \varepsilon^{-1} K n a_n^{-1} U_1(a_n \sigma) \sim 2 \varepsilon^{-1} K a_n^{-1}(a_n \sigma) n [1 - G(a_n \sigma)] = \\ &= 2 \varepsilon^{-1} K \sigma n [1 - G(a_n \sigma)]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Известно, что $n[1 - G(a_n \sigma)] \rightarrow C x^{-\alpha}$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому из (4.23) имеем

$$2 \varepsilon^{-1} K \sigma n [1 - G(a_n \sigma)] \rightarrow 2 \varepsilon^{-1} K C \sigma^{1-\alpha} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Для $\alpha \in (0; 1)$ получим

$$2 \varepsilon^{-1} K C \sigma^{1-\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow 0.$$

Используя неравенства Маркова, получим

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \sum_{t=1}^n Y_{nt}(u) \Psi(\varepsilon_t) I_{(|Y_{nt}(u)| \leq \sigma)} \right| > \varepsilon \right] = 0. \quad (4.24)$$

Рассмотрим второе и третье слагаемое в выражении (4.20). Поскольку $|\varepsilon_t - \xi_t^{(n)}| \leq |Y_{nt}(u)|$, то подобным методом, как и при доказательстве (4.22) и (4.23), получим справедливость выражений (4.21) и (4.24), заменяя $\Psi(\varepsilon_t)$ на $(\varepsilon_t I_{(|\varepsilon_t| \leq \gamma)} - \xi_t^{(n)} I_{(|\xi_t^{(n)}| \leq \gamma)})$ и $(\gamma \text{sign}(\varepsilon_t) I_{(|\varepsilon_t| > \gamma)} - \gamma \text{sign}(\xi_t^{(n)}) I_{(|\xi_t^{(n)}| > \gamma)})$ соответственно.

Из формул (4.20), (4.21), (4.24) получим формулу (4.18).

Наконец, используя непрерывность функции Хьюбера, (4.19) можно доказать подобным образом.

Пусть $\hat{\phi}_n$ – М-оценка Хьюбера параметров модели (4.1), т. е.

$$\hat{\phi}_n = \arg \min_{\beta \in \Phi} \left\{ \sum_{t=p+1}^n \rho(X_t - \beta_1 X_{t-1} - \beta_2 X_{t-2} - \dots - \beta_p X_{t-p}) \right\},$$

где $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ – вектор неизвестных параметров модели. Тогда можем использовать теорему 4.2.

Теорема 4.2. Если М-оценка Хьюбера $\hat{\phi}$ параметров ϕ $W(u)$ имеет единственный минимум в точке ξ , то

$$a_n(\hat{\phi}_n - \phi) \xrightarrow{d} \xi \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (4.25)$$

Доказательство. Вектор, который минимизирует $W_n(u)$, является вектором $a_n(\hat{\phi}_n - \phi)$. Если рассмотреть $W_n(u)$ как последовательность случайных выпуклых функций на R^{p+1} , то из теоремы 4.1 и предположения, что $W(u)$ имеет единственный минимум в точке ξ , получим формулу (4.25).

Исследование свойств оценок параметров моделей ARMA и ARIMA с бесконечной дисперсией проводили многие ученые [31; 34; 72; 73].

ГЛАВА 5

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ GARCH

5.1. Модели ARCH/GARCH и их вероятностные свойства

Рассмотрим модели ARCH/GARCH и их вероятностные свойства, которые будут использованы в дальнейшем.

Процесс $\{y_t\}$ удовлетворяет модели GARCH(p, q), $p, q = 1, 2, \dots$, если

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (5.1)$$

где $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины;

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in Z, \quad (5.2)$$

$$\omega_0 > 0, \quad \alpha_i > 0, \quad 1 \leq i \leq p, \quad \beta_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq q. \quad (5.3)$$

В случае $q = 0$ имеем модель ARCH(p). Заметим, что ε_t и σ_t – независимые для всех $t \in Z$.

Д. Нельсон доказал, что в случае $p = q = 1$ необходимым и достаточным условием для существования единственного стационарного решения модели GARCH(1,1) является $E \ln(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_0^2) < 0$ [99].

В общем случае модели GARCH(p, q) рассмотрим d -мерную временную последовательность $\{X_n\}$, $n \in Z$, определяемую стохастическим уравнением

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n, \quad n \in Z, \quad (5.4)$$

для некоторой последовательности $\{(A_n, B_n)\}$ независимых, одинаково распределенных $d \times d$ случайных матриц A_t и d -мерных случайных векторов B_n . Обозначаем $|\cdot|$ евклидову норму в R^d , а $\|\cdot\|$ – норму матриц, т. е. для любой $d \times d$ матрицы A

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Запись $A > 0$ означает, что все элементы матрицы A являются положительными.

Имеются различные утверждения о существовании строго стационарного решения рекуррентного уравнения (5.4) [24; 25; 67; 120]. Ниже приведем достаточное условие, которое также справедливо для эргодической последовательности $\{(A_n, B_n)\}$ [27] и близко к необходимому условию [12]. Эти условия требуют введения понятия экспоненты Ляпунова [12; 27; 49; 67] для последовательности $d \times d$ случайных матриц A_n , которая определяется следующим образом:

$$\gamma_L = \inf_{0 \leq n \leq \infty} \frac{1}{n+1} E \ln \|A_0 A_1 \dots A_n\|. \quad (5.5)$$

Если $E \ln^+ \|A_1\| < \infty$, применение эргодической теоремы приводит к соотношению

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \ln \|A_0 A_1 \dots A_n\| \text{ п. н. [68; 46].}$$

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия $E \ln^+ \|A_1\| < \infty$, $E \ln^+ \|B_1\| < \infty$ и $\gamma_L < 0$ [67]. Тогда последовательность $\{X_n\}$, определяющаяся как

$$X_n = B_n + \sum_{k=1}^{\infty} A_n \dots A_{n-k+1} B_{n-k} \text{ п. н.,} \quad (5.6)$$

сходится и является единственным строго стационарным решением рекуррентного уравнения (5.4).

Заметим, что $\gamma_L < 0$ справедливо, если $E \ln \|A_1\| < 0$. Условие на γ_L в теореме 4.1 особенно простое в случае $d = 1$, так как

$$\frac{1}{n+1} E \ln |A_0 \dots A_n| = E \ln |A_0| = \gamma_L.$$

Следствие. В случае $d = 1$, если $E \ln |A_0| < 0$ и $E \ln^+ \|B_0\| < \infty$, единственным стационарным решением рекуррентного уравнения (5.4) является равенство (5.6) [67].

Применяя полученные результаты, П. Боджерол и Н. Пикар нашли необходимые и достаточные условия для существования единственного

стационарного решения в общем случае для модели GARCH(p, q) [24]. Без потери общности мы можем предполагать, что $\min(p, q) \geq 2$.

Пусть

$$A_n = \begin{bmatrix} \tau_n & \beta_q & \alpha & \alpha_p \\ I_{q-1} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-2} & 0 \end{bmatrix},$$

где $\tau_n = (\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_n^2, \beta_2, \dots, \beta_{q-1}) \in R^{q-1}$; $\xi_n = (\varepsilon_n^2, 0, \dots, 0) \in R^{q-1}$; I_n – единичная матрица; $n = 0, 1, 2, \dots$; $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \in R^{p-2}$.

Обозначим

$$X_n = (\sigma_n^2, \dots, \sigma_{n-q+1}^2, y_{n-1}^2, \dots, y_{n-p+1}^2)^T \in R^{p+q-1} \text{ и } D = (\omega_0, 0, \dots, 0)^T \in R^{p+q-1}.$$

Тогда модель GARCH(p, q) в уравнениях (5.1)–(5.3) может быть представлена в виде рекуррентного уравнения

$$X_{n+1} = A_n X_n + D. \quad (5.7)$$

Таким образом, процесс, заданный уравнениями (5.1)–(5.3), имеет единственное стационарное решение

$$X_n = D + \sum_{k=0}^{\infty} A_n \dots A_{n-k}$$

тогда и только тогда, когда

$$\gamma_L = \inf_{0 \leq n \leq \infty} \frac{1}{n+1} E \ln \|A_0 A_1 \dots A_n\| < 0. \quad (5.8)$$

Замечание 5.1. Если имеет место условие

$$E(\ln^+ |\varepsilon_1|) < \infty,$$

то существует единственное строго стационарное решение модели GARCH.

Необходимые и достаточные условия для отрицательности экспоненты Ляпунова при ограничениях на $\alpha_i, \beta_j, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ и на

распределение остатков ε_1 известны в некоторых случаях для моделей ARCH(1) [38; 48] и GARCH(1,1) [99]. Общий случай рассмотрен в работе П. Боуджерола [24], где даются достаточные условия для отрицательности экспоненты Ляпунова параметров модели GARCH. Некоторые из этих результатов сформулированы ниже при условиях $\omega_0 > 0$, $E\varepsilon_1 = 0$ и $E\varepsilon_1^2 = 1$:

- а) $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ является необходимым для $\gamma_L < 0$;
- б) из $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ следует, что $\gamma_L < 0$; (5.9)
- в) если функция плотности остатков ε_1 имеет бесконечную опору, $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, то из $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$ получаем $\gamma_L < 0$.

Интересно, что (5.9) также является необходимым и достаточным условием для существования дисперсии X_t и, следовательно, для стационарности в широком смысле процесса X_t . Заметим, что стационарность модели GARCH эквивалента стационарности последовательности условных дисперсий [25].

Кроме того, при общих условиях типа существования лебеговой плотности остатков ε_t стационарная модель GARCH $\{y_t\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, т. е.

$$\sup_{A \in F_t^\infty, B \in F_{-\infty}^0} |P(A/B) - P(A)| = a_t \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где F_a^b , $a \leq b$, — σ -алгебра, порождаемая последовательностью $\{y_t\}_{a \leq t \leq b}$ с очевидными модификациями для бесконечных a или b . Говорят, что $\{y_t\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с геометрической скоростью, если a_t сходится к 0 с экспоненциальной скоростью [37; 98].

Заметим, что γ_L очень трудно вычислять для $d > 1$. Однако существует подход, использующий метод Монте-Карло и соотношение

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \ln \|A_0 A_1 \dots A_n\| \text{ п. н.,}$$

чтобы проверить, действительно ли $\gamma_L < 0$.

Рассмотрим модель GARCH в уравнениях (5.1)–(5.3). Введем несколько лемм, которые нужны для доказательств.

Лемма 5.1. Если

$$E(\varepsilon_0^2)^\lambda < \infty \text{ при некоторой } \lambda > 0,$$

то существует такая $\lambda^* > 0$, что

$$E(y_0^2)^{\lambda^*} < \infty \text{ и } E(\sigma_0^2)^{\lambda^*} < \infty \text{ [15].}$$

Лемма 5.2. Если

$$E(\ln \sigma_0^2) < \infty,$$

то

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_{t-i}^2 \text{ при всех } t \in Z$$

с вероятностью 1, где $\{c_n\}$ сходится к 0 с экспоненциальной скоростью [16].

Лемма 5.3. Если $p = q = 1$, то при условии $E \ln(\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_0^2) < 0$ уравнение (5.2) можно переписать в виде

$$\sigma_t^2 = \omega_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^k (\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_{t-i}^2) \right], \quad t \in Z, \quad (5.10)$$

и если $0 < \beta_1 < 1$, то

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega_0}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_1^k y_{t-k-1}^2, \quad t \in Z \text{ [16; 17].} \quad (5.11)$$

Свойства моделей ARCH/GARCH рассматривали К. Г. Коедийк [71], Д. Нельсон [99].

5.2. Краткий обзор методов оценки параметров для моделей ARCH/GARCH

Популярным методом оценки параметров модели GARCH является метод квазиправдоподобия. В случае $E(\varepsilon_0^2)^{2+\lambda} < \infty$ доказаны состоятельность и асимптотическая нормальность оценок параметров по методу квазиправдоподобия [15–17; 63; 75; 81; 82; 84; 85; 104].

Рассмотрим модель GARCH(p, q), заданную в уравнениях (5.1)–(5.3).

Пусть

$$z_t^T = (1, y_{t-1}^2, \dots, y_{t-p}^2, \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2), \quad v^T = (\omega_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \text{ и } \theta \in \Theta,$$

где Θ – компактное параметрическое пространство. Обозначим $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$ как истинный вектор параметров модели GARCH. Тогда можем переписать уравнение (5.2) следующим образом:

$$\sigma_t^2 = z_t^T v.$$

Логарифмическая функция правдоподобия для выборки n наблюдений $y_1, y_2, \dots, y_n$ определена как

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\theta), \quad l_t(\theta) = - \left(\ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right). \quad (5.12)$$

Вид функции правдоподобия (5.12) вытекает из предположения, что ε_0 имеет стандартное нормальное распределение. Точка, где функция правдоподобия достигает своего наибольшего значения, является оценкой параметров модели GARCH.

Р. Люмсейн [85] рассмотрел модель

$$Y_t = C_0 + y_t, \quad C_0 \in R, \quad y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2, \quad t \in Z.$$

Известно, что процесс $\{y_t\}$ удовлетворяет условию модели GARCH(1,1).

Предположение 5.1. Истинный вектор параметров $\theta_0 = (C_0, \omega_0, \alpha_0, \beta_0) \in \Theta$, $\Theta \subseteq R^4$, где θ_0 – внутренняя точка параметрического пространства Θ , Θ – компактное выпуклое пространство. При любом векторе $(C, \omega, \alpha, \beta) \in \Theta$ предположим, что

$$-C_1 \leq C \leq C_1, \quad \delta \leq \omega \leq W, \quad \delta \leq \alpha \leq (1-\delta), \quad \delta \leq \beta \leq (1-\delta)$$

при некоторой константе $\delta > 0$, $E \ln(\beta + \alpha \varepsilon_0^2) < 0$, где C_1 , W и δ – заданные действительные числа.

Предположение 5.2. $\{\varepsilon_t\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины или $\{\varepsilon_t\}$ – ограниченные в окрестности точки 0 со средним 0 и вариацией 1, $E \varepsilon_t^{32} < \infty$, σ_t^2 не зависят от $\{\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \dots\}$.

Рассмотрим функцию правдоподобия (5.11).

Пусть

$${}_u\sigma_t^2 = \omega \sum_{i=0}^{t-1} \beta^i + \alpha \sum_{i=0}^{t-1} \beta^i \varepsilon_{t-1-i}^2 + \beta^t {}_u\sigma_0^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-1-i}^2,$$

$${}_uL_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n {}_ul_t(\theta), \quad {}_ul_t(\theta) = - \left(\ln {}_u\sigma_t^2(\theta) + \frac{y_t^2}{{}_u\sigma_t^2(\theta)} \right).$$

Теорема 5.2. Пусть $L(\theta) = E[{}_ul_t(\theta)]$, тогда при всех $\theta \in \Theta$ $L(\theta)$ – существует и имеет единственный максимум в точке θ_0 [85].

Состоятельность оценки квазimaxимального правдоподобия доказана в теореме 5.3.

Теорема 5.3. Допустим, что имеют место предположения 5.1 и 5.2, тогда

$${}_u\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0 \text{ и } \hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta_0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где ${}_u\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} {}_uL_n(\theta)$; $\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta)$ [85].

Асимптотическое распределение оценки квазimaxимального правдоподобия доказано в следующей теореме.

Теорема 5.4. Допустим, что имеют место предположения 5.1 и 5.2, тогда

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, A_0^{-1} B_0 A_0^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где

$$A_0 = -E \left[\frac{\partial^2 {}_ul_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right], \quad B_0 = -E \left[n \frac{\partial {}_uL_n(\theta_0)}{\partial \theta} \frac{\partial {}_uL_n(\theta_0)}{\partial \theta'} \right] \text{ [85].}$$

Состоятельность и асимптотическое распределение получены, однако оценки для модели GARCH(1,1) являются локальными из-за того, что функция правдоподобия максимизируется в некоторой окрестности точки θ_0 [75; 85]. Кроме того, эти результаты получены при очень строгих ограничениях на распределение остатков ε_t и значение θ_0 .

Пусть

$$A(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_p x^p, \quad B(x) = 1 - \beta_1 x - \beta_2 x^2 - \dots - \beta_q x^q.$$

И. Беркес и Л. Хорвас [15] рассмотрели метод максимального правдоподобия через функцию (5.12) для модели GARCH(p, q) уравнений (5.1)–(5.3) с параметрическим пространством Θ , определяющимся следующим образом:

$$\Theta = \{\theta = (\omega', \alpha'_1, \dots, \alpha'_p, \beta'_1, \dots, \beta'_q) : \alpha'_1 + \dots + \alpha'_p \leq \rho, \\ c_1 \leq \min(\omega', \alpha'_1, \dots, \alpha'_p, \beta'_1, \dots, \beta'_q) \leq \max(\omega', \alpha'_1, \dots, \alpha'_p, \beta'_1, \dots, \beta'_q) \leq c_2\}, \\ 0 < c_1 < c_2, 0 < \rho < 1, qc_1 < \rho.$$

Предположения:

- A1) ε_0^2 – невырожденная случайная величина;
- A2) полиномы $A(x)$ и $B(x)$ – взаимно простые;
- A3) θ_0 – внутренняя точка пространства Θ ;
- A4) $E(\varepsilon_0^2)^{1+\delta} < \infty$ при некотором $\delta > 0$;
- A5) $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\mu} P(\varepsilon_0^2 \leq t) = 0$ при некотором $\mu > 0$;
- A6) $E\varepsilon_0^2 = 1$.

Строгая состоятельность и асимптотическое распределение оценки квази-максимального правдоподобия доказаны в нижеследующих теоремах.

Теорема 5.5. Если соблюдаются условия A1–A6, то

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta_0 \text{ при } n \rightarrow \infty [15].$$

Теорема 5.6. Если соблюдаются условия A1–A3, A5, A6 и $E(\varepsilon_0^2)^{2+\lambda} < \infty$ при некотором $\lambda > 0$, то

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B_0^{-1} A_0 B_0^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $A_0 = \text{cov}(l'_0(\theta_0))$, $B_0 = E(l''_0(\theta_0))$ [15].

Кроме того, И. Беркес и Л. Хорвас [15] показали, что, используя метод квазимаксимального правдоподобия, нельзя получить $n^{-1/2}$ -состоятельную оценку, если $E|\varepsilon_0|^k = \infty$ при $0 < k < 4$. Это подтверждает ограниченность метода квазимаксимального правдоподобия. Для существования модели GARCH(1,1) требуется только соблюдение условия $E|\ln \varepsilon_0^2| < \infty$, но оценка может быть построена при $E|\varepsilon_0|^k < \infty$ с некоторым k , $k \geq 4$.

В более общем случае $E\varepsilon_0^2 < \infty$ при более строгом условии $\beta_0 + \alpha_0 < 1$ для коэффициентов Г. Меркер и М. Мосер [86] использовали метод Юла – Уолкера для оценки параметров модели GARCH(1,1) через представление ее моделью ARMA, которое получено Т. Боллерселевом [22].

Доказана состоятельность и найдена асимптотическая нормальность оценок. В случае конечных моментов четвертого порядка остатков получена состоятельность и найдена асимптотическая нормальность оценок максимального правдоподобия. Другим методам уделяли внимание С. Франк, Л. Гиравитис, С. Гурьеру, Д. А. Кристенсен [45; 47; 51; 74].

Первые результаты исследования моделей ARCH/GARCH для финансовых временных рядов были ограничены случаем нормальности остатков, для которых явная условная функция правдоподобия удобна при оценке параметров моделей. Однако исследования показали, что остатки в моделях могут иметь распределение с «тяжелыми хвостами» [96; 97].

В случае когда остатки имеют распределение Парето с экспонентой $\kappa > 4$, Т. Микош и Д. Страумен [93] использовали оценку Whittle для модели GARCH(1,1). Они доказали, что оценка Whittle сходится с вероятностью 1 к бесконечному ряду $\kappa/4$ -устойчивых случайных величин, если $\kappa < 8$, и к нормальной случайной величине – если $\kappa > 8$.

В случае $E\varepsilon_0^4 = \infty$ асимптотическая теория квазimaxимального правдоподобия становится более сложной [77]. П. Холл и К. Яо [54] использовали метод квазimaxимального правдоподобия для оценки параметров модели GARCH(p, q) (5.1)–(5.3) с остатками, принадлежащими области притяжения устойчивых законов с индексом $\kappa \in [1; 2)$. Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L_n(\omega, \alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n - \left\{ \ln \sigma_t^2(\omega, \alpha, \beta) + \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\omega, \alpha, \beta)} \right\}^{\frac{1}{n}},$$

где $\omega > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_q) - R^p$ и R^q – векторы соответственно с положительными координатами. Производные функции правдоподобия могут быть введены в следующих формулах:

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^q \beta_j},$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_i} = y_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k} y_{t-i-j_1-\dots-j_k}^2,$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \beta_j} = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \beta_i} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{j_1} \dots \beta_{j_k} y_{t-i-j_1-\dots-j_k}^2.$$

Пусть

$$U = U(\omega, \alpha, \beta) = \left(\frac{\partial \sigma_1^2}{\partial \omega}, \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial \alpha_p}, \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial \beta_q} \right),$$

$M = E_0(\sigma_1^{-4} U U^T)$ – матрица $r \times r$, где $r = 1 + p + q$, и знак E_0 – математическое ожидание, когда параметры принимают истинные значения $(\omega, \alpha, \beta) = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$. Существование и ограниченность компонент матрицы M следует из положительности значения ω и компонент векторов α и β .

П. Холл и К. Яо [54] предполагали, что существует локальный минимум $(\hat{\omega}_n, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ функции правдоподобия $L_n(\omega, \alpha, \beta)$ в окрестности точки $(\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$. Обозначаем

$$\hat{\theta}_n = (\hat{\omega}_n, \hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)^T \text{ и } \theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)^T.$$

Из теоремы 1.4.5 [110] известно, что если $Y_1, Y_2, \dots$ – независимые случайные величины, имеющие распределение экстремальных значений с экспонентой $\kappa \in [1, 2)$, $V_1, V_2, \dots$ – независимые случайные величины, такие как $\sigma_1^{-2} M^{-1} U$ и

$$W_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \{Y_k V_k - E(Y_k)E(V_1)\}, \text{ когда } 1 < \kappa < 2, \quad (5.13)$$

$$W_1 = Y_1 V_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \{Y_k V_k - E(Y_k)E(V_1)\}, \text{ когда } \kappa = 1, \quad (5.14)$$

то W_0 и W_1 имеют устойчивые распределения с индексом κ . Характеристические функции j -х компонент векторов W_0 и W_1 соответственно имеют следующие представления:

$$E\{\exp(itW_0^{(j)})\} = \exp\{-s_j^\kappa |t|^\kappa (1 - i\beta_j \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg} \frac{\pi\kappa}{2})\},$$

$$E\{\exp(itW_1^{(j)})\} = \exp\{i\varphi_j t - s_j |t| (1 + i\beta_j \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln |t|)\},$$

где $s_j^\kappa = E|V^{(j)}|^\kappa / C_\kappa$, $\beta_j E|V^{(j)}|^\kappa = E\{|V^{(j)}|^\kappa \operatorname{sign}(V^{(j)})\}$; $V^{(j)}$ – случайная величина с распределением j -й компоненты вектора V_1 , $C_1 = 2/\pi$, $C_\kappa = (1 - \kappa) / [\Gamma(2 - \kappa) \cos(\kappa\pi/2)]$ при $1 < \kappa < 2$.

Тогда асимптотическое распределение оценки квазimaxимального правдоподобия определено в теореме 5.7.

Теорема 5.7. Предложим, что M – невырожденная матрица [110], тогда:

а) если $E\varepsilon_1^4 < \infty$, то

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, \tau^2 M^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $\tau^2 = E(\varepsilon_1^4) - 1$;

б) если $E\varepsilon_1^4 = \infty$, но распределение случайной величины ε_1^2 принадлежит области притяжения нормальных законов, то

$$n\lambda_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, M^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $\lambda_n = \inf\{\lambda > 0 : nH(\lambda) \leq \lambda^2\}$, $H(\lambda) = E\{\varepsilon_1^4 I_{(\varepsilon_1^2 \leq \lambda)}\}$;

в) если ε_1^2 принадлежит области притяжения устойчивых законов с индексом $1 < \kappa < 2$, то

$$na_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} W_0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $a_n = \inf\{x > 0 : nP(\varepsilon_1^2 > x) \leq 1\}$, W_0 – κ -устойчивый случайный вектор, который определяется равенством (5.13);

г) если ε_1^2 принадлежит области притяжения устойчивых законов с индексом $\kappa = 1$ и $n^{-1}a_n\mu_n^2 \rightarrow 0$ при $\mu_n = na_n^{-1}E\{\varepsilon_1^2 I_{\{\varepsilon_1^2 > a_n\}}\}$, то

$$na_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) + \mu_n E(V_1) - \gamma E(V_1) \xrightarrow{d} W_1 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где W_1 – κ -устойчивый случайный вектор, который определяется равенством (5.14);

д) при $1 < \kappa < 2$ бесконечный ряд (5.13) сходится с вероятностью 1, при $\kappa = 1$ бесконечный ряд (5.14) также сходится с вероятностью 1.

Итак, в случае остатков с «тяжелыми хвостами» асимптотическое распределение метода максимального правдоподобия может быть не гауссовским, и скорость сходимости – меньше, чем стандартная скорость $n^{1/2}$.

Т. Микош, С. Старица [91; 95] и Д. Страумен [94] исследовали модели GARCH(p, q) с остатками, имеющими регулярно меняющееся распределение с индексом $\kappa > 1$. Они предположили, что имеет место условие сильного перемешивания, и использовали устойчивый предел преобразования мартингала для получения того же результата. К. Яо и П. Лиан [125]

исследовали три вида оценки абсолютных разностей для моделей ARCH/GARCH. Асимптотическое распределение всех трех видов оценок всегда является нормальным, независимо от регулярного изменения остатков.

Заметим, что случай регулярного изменения остатков с индексом $0 < \kappa < 1$ еще не исследован. Трудность заключается в том, что когда остатки имеют регулярно меняющееся распределение с индексом $0 < \kappa < 1$, то $E\varepsilon_t^2 = \infty$. Попробуем решить эту проблему, используя модификацию функции правдоподобия.

5.3. Оценка параметров для модели GARCH(1,1) с устойчивыми остатками

Построим модификацию функции правдоподобия для получения асимптотического распределения оценки параметров модели GARCH(1,1) с устойчивыми остатками.

Рассмотрим модель GARCH(1,1)

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (5.15)$$

где $\{\varepsilon_t\}$ – независимые, одинаково распределенные κ -устойчивые случайные величины, $\kappa \in (0; 2]$,

$$\sigma_t^2 = \omega_0(1 - \beta_0) + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2, \quad t \in Z, \quad (5.16)$$

и

$$\omega_0 > 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta_0 \geq 0. \quad (5.17)$$

Если остатки имеют κ -устойчивое распределение, $\kappa \in (0; 2]$, то $E|\varepsilon_t|^k < \infty$ тогда и только тогда, когда $0 < k < \kappa$. И. Беркес и Л. Хорвас [15] показали, что, используя метод квазimaxимального правдоподобия, нельзя получить $n^{-1/2}$ -состоятельную оценку, если $E|\varepsilon_0|^k = \infty$ при $0 < k < 4$. Это демонстрирует ограниченность метода квазimaxимального правдоподобия для случая устойчивых остатков модели GARCH.

Используя лемму 5.3, уравнение (5.16) можно переписать в виде

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_0^k y_{t-k-1}^2, \quad t \in Z. \quad (5.18)$$

Пусть $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$ – неизвестные параметры модели, тогда рассматриваемая параметрическая модель может быть представлена в виде

$$y_t = \sigma_t(\theta)\varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (5.19)$$

где

$$\sigma_t^2(\theta) = \omega(1 - \beta) + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2(\theta) \quad (5.20)$$

с параметрическим пространством

$$\Theta = \{\theta = (\omega, \alpha, \beta) : 0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2,$$

$$0 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 1, E \ln(\beta + \alpha \varepsilon_0^2) < 0\}$$

в предположении, что

$$\theta_0 - \text{внутренняя точка пространства } \Theta. \quad (5.21)$$

И. Беркес и Л. Хорвас доказали, что если существует такие $\theta_1 = (\omega, \alpha, \beta) \in \Theta$ и $\theta_2 = (\omega', \alpha', \beta') \in \Theta$, что

$$\sigma_t^2(\theta_1) = \sigma_t^2(\theta_2), \text{ то } \theta_1 = \theta_2, \text{ т. е. } \omega = \omega', \alpha = \alpha', \beta = \beta'. \quad (5.22)$$

В этом случае

$$\sigma_t^2(\theta_0) = \sigma_t^2. \quad (5.23)$$

Рассмотрим модифицированную функцию правдоподобия в следующем виде:

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\theta), \quad l_t(\theta) = - \left[\ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p \right], \quad (5.24)$$

где p – некоторая константа, $0 < p < \kappa/2$.

$$\text{Предположим, что } \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\mu} P(\varepsilon_0^2 \leq t) = 0 \text{ при некоторой } \mu > 0. \quad (5.25)$$

Лемма 5.4. Если имеет место (5.25), то для любых λ , $0 < \lambda < \kappa/2$, имеем

$$E \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right\}^\lambda < \infty. \quad (5.26)$$

Доказательство. Используя (5.18), получим

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} = \frac{\sigma_t^2}{\omega + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k y_{t-k-1}^2} \leq \frac{\sigma_t^2}{\alpha \sum_{k=1}^M \beta^k y_{t-k-1}^2} \quad (5.27)$$

при любом натуральном числе $M > 0$.

Из $\omega_0 > 0$ следует

$$\frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-1}^2} = \frac{\omega_0(1-\beta_0) + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2}{\sigma_{t-1}^2} = \frac{\omega_0(1-\beta_0)}{\sigma_{t-1}^2} + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_0 \leq K(1 + \varepsilon_{t-1}^2),$$

где $K = \max\{(1+\beta_0), \alpha_0\} > 1$.

Отсюда при $i = 2, 3, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{t-i}^2} &= \frac{\omega_0(1-\beta_0) + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2}{\sigma_{t-i}^2} = \frac{\omega_0(1-\beta_0)}{\sigma_{t-i}^2} + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2 \frac{\sigma_{t-1}^2}{\sigma_{t-i}^2} + \beta_0 \frac{\sigma_{t-1}^2}{\sigma_{t-i}^2} \leq \\ &\leq \left(\frac{\omega_0(1-\beta_0)}{\sigma_{t-1}^2} + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_0 \right) \frac{\sigma_{t-1}^2}{\sigma_{t-i}^2} \leq K(1 + \varepsilon_{t-1}^2) \frac{\sigma_{t-1}^2}{\sigma_{t-i}^2} \leq \\ &\leq K^2(1 + \varepsilon_{t-1}^2)(1 + \varepsilon_{t-2}^2) \frac{\sigma_{t-2}^2}{\sigma_{t-i}^2} \leq \\ &\dots \dots \dots \leq K^i \prod_{j=1}^i (1 + \varepsilon_{t-j}^2). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Используя формулы (5.27) и (5.28), получим

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t^2(\theta)}{\sigma_t^2} &\geq \frac{\alpha \sum_{k=1}^M \beta^k y_{t-k-1}^2}{\sigma_t^2} = \alpha \sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \frac{\sigma_{t-k-1}^2}{\sigma_t^2} \geq \\ &\geq \alpha \sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \frac{1}{K^{M+1} \prod_{j=1}^{k+1} (1 + \varepsilon_{t-j}^2)} \geq \\ &\geq \frac{\alpha}{K^{M+1} \prod_{j=1}^{M+1} (1 + \varepsilon_{t-j}^2)} \sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера при любых $p', \lambda < p' < \kappa/2$, имеем

$$\begin{aligned} E \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right\}^\lambda &\leq \frac{K^{\lambda(M+1)}}{\alpha^\lambda} E \left[\left(\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \varepsilon_{t-j}^2) \right)^\lambda \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2} \right)^\lambda \right] \leq \\ &\leq \frac{K^{\lambda(M+1)}}{\alpha^\lambda} \left\{ E \left(\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \varepsilon_{t-j}^2) \right)^{p'} \right\}^{\lambda/p'} \left\{ E \left(\sum_{j=1}^{M+1} \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \right)^{-\lambda p'/(p'-\lambda)} \right\}^{(p'-\lambda)/p'}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Из независимости случайных величин $\{\varepsilon_t\}$ получим

$$\left\{ E \left(\prod_{j=1}^{M+1} (1 + \varepsilon_{t-j}^2) \right)^{p'} \right\}^{\lambda/p'} = \left(\prod_{j=1}^{M+1} E(1 + \varepsilon_{t-j}^2)^{p'} \right)^{\lambda/p'} < \infty. \quad (5.30)$$

Поскольку $\{\varepsilon_t\}$ – κ -устойчивые случайные величины, то $\{\varepsilon_t\}$ имеют регулярно меняющееся распределение с индексом κ . Отсюда вывод, что $\{\varepsilon_t^2\}$ имеют регулярно меняющееся распределение с индексом $\kappa/2$. Тогда $\sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2$ является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом $\kappa/2$. Из леммы 2.5 и формулы (5.25) имеем

$$E \left(\sum_{k=0}^M \beta^k \varepsilon_{t-k-1}^2 \right)^{-\lambda p'/(p'-\lambda)} < \infty. \quad (5.31)$$

Используя формулы (5.29)–(5.31), получим (5.26). Пусть

$$L(\theta) = E l_0(\theta),$$

$$\text{где } l_0(\theta) = - \left[\ln \sigma_0^2(\theta) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right)^p \right], \quad 0 < p < \kappa/2.$$

Докажем, что $L(\theta) < \infty$ при всех $\theta \in \Theta$. Действительно, из леммы 5.4 получим

$$E \left(\frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right)^p = E(\varepsilon_t^2)^p E \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right)^p < \infty, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (5.32)$$

Значит, из устойчивости случайных величин $\{\varepsilon_t\}$ и леммы 4.1 следует, что существует такая константа ρ , $\rho > 0$, что

$$E[\sigma_0^2(\theta)]^\rho < \infty.$$

Отсюда, используя неравенство Йенсена, имеем

$$E \ln \sigma_t^2(\theta) < \infty. \quad (5.33)$$

Из неравенств (5.32) и (5.33) получим

$$L(\theta) = El_0(\theta) = -E \left[\ln \sigma_0^2(\theta) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right)^p \right] < \infty.$$

Лемма 5.5. Пусть $0 < p < \kappa / 2$, функция $L(\theta)$ определена в (5.24), тогда

$$E \left\{ \sup_{u, v \in \Theta} \frac{1}{|u - v|} |L_n(u) - L_n(v)| \right\} < \infty. \quad (5.34)$$

Доказательство. Известно, что

$$E \left\{ \sup_{u, v \in \Theta} \frac{1}{|u - v|} |L_n(u) - L_n(v)| \right\} \leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\{ \sup_{u, v \in \Theta} \frac{1}{|u - v|} |l_t(u) - l_t(v)| \right\}. \quad (5.35)$$

Используя теорему о среднем значении, получим

$$\begin{aligned} |l_t(u) - l_t(v)| &= \left| \ln \sigma_t^2(u) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(u)} \right)^p - \ln \sigma_t^2(v) - \frac{1}{p} \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(v)} \right)^p \right| \leq \\ &\leq |u - v| \left| \frac{(\sigma_t^2(\eta))'}{\sigma_t^2(\eta)} \right|, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где $\eta \in \Theta$, $|\eta - u| \leq |u - v|$, $|\eta - v| \leq |u - v|$.

Подобным методом, как и при доказательстве леммы 5.4, получим следующее неравенство:

$$E \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{(\sigma_t^2(\eta))'}{\sigma_t^2(\eta)} \right| \right\}^\gamma < \infty \text{ для некоторого } \gamma > 0. \quad (5.37)$$

Используя неравенства (5.35)–(5.37), получим (5.34).

Пусть $\hat{\theta}_n$ – М-оценка параметра θ_0 модели (5.15)–(5.17) с функцией правдоподобия (5.24), т. е.

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta). \quad (5.38)$$

Состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$ докажем в теореме 5.8.

Теорема 5.8. Предположим, что $0 < p < \kappa/2$ и $E|\varepsilon_0^2|^p = 1$, а также имеют место соотношения (5.21) и (5.25), тогда

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta_0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.39)$$

Доказательство. Известно, что процесс

$$\left\{ l_t(\theta) = - \left[\ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p \right] \right\}_{t \in Z}$$

является измеримой функцией от строго стационарного и эргодического процесса $\{\varepsilon_t\}$, поэтому $\{l_t(\theta)\}_{t \in Z}$ также является эргодическим процессом с конечным математическим ожиданием $L(\theta) = E l_0(\theta) < \infty$, $\theta \in \Theta$. Используя эргодическую теорему, получим

$$L_n(\theta) \xrightarrow{\text{п. н.}} L(\theta), \quad \theta \in \Theta \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, применяя лемму 5.5 и компактность параметрического пространства Θ , получим равномерную сходимость ряда функций $\{L_n(\theta)\}$, т. е.

$$\sup_{\theta \in \Theta} |L_n(\theta) - L(\theta)| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, при любом $\theta \in \Theta$ имеем

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &= E \left[\ln \sigma_0^2(\theta) + \frac{1}{p} \left| \frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right|^p \right] - E \left[\ln \sigma_0^2 + \frac{1}{p} \left| \frac{y_0^2}{\sigma_0^2} \right|^p \right] = \\ &= -\frac{1}{p} + \frac{1}{p} E \left[\left| \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right|^p - \ln \left| \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right|^p \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Известно, что функция $(x - \ln x)$ положительна при всех $x > 0$ и достигает минимума в точке $x = 1$. Из уравнения (5.40) получаем, что $L(\theta)$, $\theta \in \Theta$, имеет абсолютный максимум в точке θ^* такой, что $|\sigma_0^2 / \sigma_0^2(\theta^*)|^p = 1$ или $\sigma_0^2(\theta^*) = \sigma_0^2$. Используя (5.23), получим $\theta^* = \theta_0$. Из (5.22) вытекает, что функция $L(\theta)$, $\theta \in \Theta$, имеет единственный максимум в точке θ_0 , значит, последовательность максимумов рядов функций $\{L_n(\theta)\}$ сходится п. н. к единственному максимуму функции $L(\theta)$, а (5.39) следует из (5.38).

Определив $L_n(\theta)$ в (5.24), имеем

$$\begin{aligned} L_n'(\theta) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\frac{(y_t^2)^p (\sigma_t^2(\theta))' (\sigma_t^2(\theta))^{p-1}}{(\sigma_t^2(\theta))^{2p}} - \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p - 1 \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} L_n''(\theta) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \left[-p \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p - 1 \right] \left[\frac{(\sigma_t^2(\theta))''}{\sigma_t^2(\theta)} - \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \left[\left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p - 1 \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta))''}{\sigma_t^2(\theta)} - \left[1 + (p-1) \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p \right] \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Зная, что $\sigma_t^2(\theta_0) = \sigma_t^2$ и в условиях теоремы 5.8, используя (5.26), (5.28), (5.37) и независимость случайных величин ε_t и $\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)}$, получим

$$E |L_n'(\theta)| = E \left| \left[\left(\frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right)^p - 1 \right] \frac{(\sigma_0^2(\theta))'}{\sigma_0^2(\theta)} \right| \leq$$

$$\leq E(\varepsilon_0^2)^p \left[E \left(\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p + 1 \right] E \left(\sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right| \right) < \infty \text{ при всех } \theta \in \Theta. \quad (5.43)$$

Из формулы (5.41) видим, что процесс $\{l'_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ является измеримой функцией от строго стационарного эргодического процесса $\{\varepsilon_t\}$, поэтому $\{l'_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ тоже является строго стационарным эргодическим. Учитывая (5.43) и применяя доказательство, как при доказательстве теоремы 5.8, получим

$$\sup_{\theta \in \Theta} |L'_n(\theta) - L'(\theta)| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $L'(\theta) = El'_0(\theta)$. Тогда из (5.38) следует, что $L_n(\theta)$ достигает максимума в точке $\hat{\theta}_n$, поэтому для достаточно больших n $\hat{\theta}_n$ является внутренней точкой компактного пространства Θ . Тогда существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$L'_n(\hat{\theta}_n) = 0 \text{ при любом } n \geq n_0.$$

Отсюда

$$L'_n(\hat{\theta}_n) - L'_n(\theta_0) = -L'_n(\theta_0).$$

Используя теорему о среднем значении, имеем

$$(\hat{\theta}_n - \theta_0)L''_n(\eta) = L'_n(\hat{\theta}_n) - L'_n(\theta_0) = -L'_n(\theta_0), \quad (5.44)$$

где $\eta \in \Theta$ при $|\eta - \hat{\theta}_n| \leq |\hat{\theta}_n - \theta_0|$, $|\eta - \theta_0| \leq |\hat{\theta}_n - \theta_0|$.

Подобным методом, как и при доказательстве леммы 5.4 и при использовании формулы (5.43), получим $E\|l''_0(\theta)\| < \infty$ при всех $\theta \in \Theta$.

Из непрерывности функции $L''_n(\cdot)$ и (5.39) получим

$$L''_n(\eta) = L''_n(\theta_0) + o(1). \quad (5.45)$$

И. Беркес и Л. Хорвас [16] доказали, что функция

$$A = E \left[\left(\frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2} \right)^T \frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2} \right]$$

является невырожденной.

Подобным методом, как и для случайного процесса $\{l'_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, получим, что $\{l''_t(\theta_0)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ является строго стационарным и эргодическим процессом. Отсюда имеем

$$L''_n(\theta_0) \xrightarrow{\text{п. н.}} B \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.46)$$

где $B = E l''_0(\theta_0)$.

Используя (5.41), выведем

$$L'_n(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(1 - |\varepsilon_t^2|^p\right) \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2}. \quad (5.47)$$

Из (5.44)–(5.47) получим

$$n^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta_0)(B + o(1)) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \left(1 - |\varepsilon_t^2|^p\right) \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2}. \quad (5.48)$$

Теорема 5.9. Пусть выполнены условия теоремы 5.8, тогда для $p < \kappa/4$ имеем

$$n^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} \Sigma B^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.49)$$

где $\Sigma = (E(\varepsilon_0^4)^p - 1)A$.

Доказательство. Действительно, при $p < \kappa/4$ из условия $E|\varepsilon_t^2|^p = 1$ и независимости случайных величин ε_t и $\frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2}$ имеем $E|l'_t(\theta_0)|^2 < \infty$ и $E l'_t(\theta_0) = 0$ при любом $t \in \mathbb{Z}$. Из того, что $\left\{ l'_t(\theta_0) = \left(1 - |\varepsilon_t^2|^p\right) \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – стационарный мартингально разностный процесс, следует $\left\{ l'_t(\theta_0) \right\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – эргодический процесс. При достаточно большом n , $(B + o(1))^{-1}$ существует и равна $(B^{-1} + o(1))$. С другой стороны, ковариационной матрицей $\left(1 - |\varepsilon_t^2|^p\right) \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} B^{-1}$ является матрица $B^{-1} \Sigma B^{-1}$. Отсюда, используя (5.48) и теорему Крамера – Вольда [18], получим (5.49).

5.4. Модификация метода максимального правдоподобия для оценки параметров модели GARCH(1,1) с регулярно меняющимися остатками

Для решения задачи регулярного изменения остатков модели GARCH(1,1), когда индекс меньше 1, исследуем модификацию метода максимального правдоподобия, чтобы оценить параметры модели GARCH(1,1) с регулярно меняющимися остатками с индексом $k > 0$.

Рассмотрим модель GARCH(1,1) вида

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t \in Z, \quad (5.50)$$

где

$$\sigma_t^2 = \omega_0(1 - \beta_0) + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2, \quad (5.51)$$

$$\omega_0 > 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad 0 \leq \beta_0 < 1, \quad (5.52)$$

$\{\varepsilon_t^2\}$ – независимые, одинаково распределенные регулярно меняющиеся случайные величины с индексом k ; $k > 0$, $\sigma_t^2(\theta) = \omega(1 - \beta) + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2(\theta)$.

Пусть $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$ – неизвестные параметры модели, параметрическое пространство

$$\Theta = \{\theta = (\omega, \alpha, \beta) : 0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2,$$

$$0 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 1, E \ln(\beta + \alpha \varepsilon_0^2) < 0\},$$

где θ_0 – внутренняя точка пространства Θ .

Используя лемму 5.3, $\sigma_t^2(\theta)$ можно переписать как

$$\sigma_t^2(\theta) = \omega + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y_{t-k-1}^2, \quad t \in Z. \quad (5.53)$$

Рассмотрим модифицированную функцию правдоподобия в следующем виде:

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\theta), \quad l_t(\theta) = - \left[\ln \sigma_t^2(\theta) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^p \right], \quad (5.54)$$

где p – некоторая константа, $0 < p < k$.

Заметим, что лемма 5.4 также справедлива при $0 < p < \kappa$.

Лемма 5.6. Если $\{\varepsilon_t^2\}$ – независимые, одинаково распределенные регулярно меняющиеся случайные величины с индексом κ , $\kappa > 0$, то при любых λ , $0 < \lambda < \kappa$, имеем

$$E \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right\}^\lambda < \infty.$$

Пусть

$$L(\theta) = El_0(\theta),$$

$$\text{где } l_0(\theta) = - \left[\ln \sigma_0^2(\theta) + \frac{1}{p} \left(\frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right)^p \right], \quad 0 < p < \kappa.$$

Из (5.32) и (5.33) получаем $L(\theta) < \infty$ при всех $\theta \in \Theta$.

Замечание 5.2. В случае регулярно меняющихся остатков лемма 5.5 так же справедлива при $0 < p < \kappa$.

Теорема 5.10. Пусть выполнены условия леммы 5.6, тогда для $0 < p < \kappa$ имеем

$$\sup_{\theta \in \Theta} \{ |L_n(\theta) - L(\theta)| \} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Зная, что $L(\theta) < \infty$, и используя эргодическую теорему, имеем для всех $\theta \in \Theta$

$$L_n(\theta) \xrightarrow{\text{п. н.}} L(\theta) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из замечания 5.2, используя теорему 3.5.8 [114], заключаем, что $\left\{ \sup_{u, v \in \Theta} \left\{ \frac{1}{|u - v|} |l_t(u) - l_t(v)| \right\} \right\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – стационарный эргодический процесс с конечным моментом первого порядка. Используя замечание 5.2 и эргодическую теорему, получим

$$\sup_{u, v \in \Theta} \left\{ \frac{1}{|u - v|} |L_n(u) - L(v)| \right\} \leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\sup_{u, v \in \Theta} \left\{ \frac{1}{|u - v|} |l_t(u) - l_t(v)| \right\} \right] \xrightarrow{\text{п. н.}} O(1).$$

Отсюда значит, что функции $\{L_n(\theta)\}$ – равномерно непрерывные с вероятностью 1 и сходятся к $L(\theta)$ при $n \rightarrow \infty$. Из компактности параметрического пространства Θ видим, что $\{L_n(\theta)\}$ равномерно сходятся к $L(\theta)$ п. н.

Пусть $\hat{\theta}_n$ – М-оценка параметра θ_0 модели (5.50)–(5.52) с функцией правдоподобия (5.54), т. е.

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta). \quad (5.55)$$

Состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$ докажем в теореме 5.11.

Теорема 5.11. Предположим, что $0 < p < \kappa$, $E |\varepsilon_0^2|^p = 1$, тогда

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta_0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.56)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} L(\theta_0) - L(\theta) &= E \left[\ln \sigma_0^2(\theta) + \frac{1}{p} \left| \frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right|^p \right] - E \left[\ln \sigma_0^2 + \frac{1}{p} \left| \frac{y_0^2}{\sigma_0^2} \right|^p \right] = \\ &= -\frac{1}{p} + \frac{1}{p} E \left[\left| \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right|^p - \ln \left| \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right|^p \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Известно, что функция $(x - \ln x)$ положительна при всех $x > 0$ и достигает минимума в точке $x = 1$. Из (5.57) следует, что $L(\theta)$, $\theta \in \Theta$, имеет абсолютный максимум в точке θ^* при $|\sigma_0^2 / \sigma_0^2(\theta^*)|^p = 1$ или $\sigma_0^2(\theta^*) = \sigma_0^2$. Используя (5.23), получим $\theta^* = \theta_0$. Из (5.57) видим, что функция $L(\theta)$, $\theta \in \Theta$, имеет единственный максимум в точке θ_0 . Отсюда значит, что последовательность максимумов рядов функций $\{L_n(\theta)\}$ сходится п. н. к единственному максимуму функции $L(\theta)$. Следовательно, (5.56) получается из (5.55).

Используя (5.41) и (5.42), имеем

$$L_n'(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [(\varepsilon_t^2)^p - 1] \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [(\varepsilon_t^2)^p - 1] A_t, \quad (5.58)$$

где

$$A_t = \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} = \left(\frac{1}{\sigma_t^2}, \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2, \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (5.59)$$

и

$$L_n''(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \left[(\varepsilon_t^2)^p - 1 \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))''}{\sigma_t^2} - \left[1 + (p-1)(\varepsilon_t^2)^p \right] \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right)^T \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right) \right\}. \quad (5.60)$$

Лемма 5.7. Предположим, что $\{\varepsilon_t^2\}$ – регулярно меняющиеся случайные величины с индексом $\kappa > 0$, A_t определена в (5.59), тогда при $p > 0$ $\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1]A_t\}$ – многомерно регулярно меняющиеся случайные величины с индексом κ/p .

Доказательство. Из регулярного изменения случайных величин $\{\varepsilon_t^2\}$ следует, что $\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1]\}$ – регулярно меняющиеся случайные величины с индексом κ/p . Таким образом, из леммы 2.3 достаточно показать, что при всех $\lambda > 0$ абсолютное математическое ожидание компонент вектора A_t , $t = 1, 2, \dots$, является конечным. Действительно, из $\sigma_t^2 \geq \omega_0(1 - \beta_0)$ при $\lambda > 0$ имеем

$$E \left(\frac{1}{\sigma_t^2} \right)^\lambda \leq \frac{1}{[\omega_0(1 - \beta_0)]^\lambda} < \infty. \quad (5.61)$$

При всех $j = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_t^2} &= \frac{1}{\omega_0(1 - \beta_0) + (\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2) \sigma_{t-1}^2} \leq \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2) \sigma_{t-1}^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2)(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-2}^2) \sigma_{t-2}^2} \leq \dots \leq \frac{1}{\sigma_{t-j}^2} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

В таком случае при $t = 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \leq \frac{1}{\omega_0(1 - \beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega_0(1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{-1} \prod_{i=1}^j \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)}.$$

Пусть $q_k = E[\beta_0 / (\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_0^2)]^\lambda < 1$. Используя (5.62) и неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} \left[E \left(\frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \right)^\lambda \right]^{1/\lambda} &\leq \frac{1}{\omega_0(1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{-1} \left[E \left(\prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} \right)^\lambda \right]^{1/\lambda} = \\ &= \frac{1}{\omega_0(1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{-1} q_k^{j/\lambda} < \infty. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Из (5.62) и $\sigma_t^2 \geq \omega_0(1-\beta_0)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 \frac{1}{\sigma_{t-j}^2} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} = \\ &= \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{-1} \frac{\alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2)} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} = \\ &= \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всего $\lambda > 0$, используя неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} \left[E \left(\frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \right)^\lambda \right]^{1/\lambda} &\leq \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \left[E \left(\prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} \right)^\lambda \right]^{1/\lambda} = \\ &= \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} q_k^{(j-1)/\lambda} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношения (5.61)–(5.63), получим доказательство леммы.

Замечание 5.3. Из (5.58) и (5.60) имеем, что $\dot{L}_n(\theta_0)$ и $\ddot{L}_n(\theta_0)$ – процессы, являющиеся измеримыми функциями от строго стационарного и эргодического процесса $\{\varepsilon_t\}$, поэтому $\dot{L}_n(\theta_0)$ и $\ddot{L}_n(\theta_0)$ также являются строго стационарными эргодическими процессами.

И. Беркес, Л. Хорвас [16] показали, что матрица

$$A = E \left[\left(\frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2} \right)^T \left(\frac{(\sigma_0^2(\theta_0))'}{\sigma_0^2} \right) \right] \quad (5.64)$$

является невырожденной.

Теорема 5.12. Пусть выполнены условия теорем 5.11 и 5.12, тогда:

а) если $0 < p < \kappa/2$, то

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} \Sigma B^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $\Sigma = \tau A$, $\tau = E(\varepsilon_0^2)^{2p} - 1$, $B = El_n''(\theta_0)$;

б) если $\kappa/2 < p < \kappa$ и $\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1]A_t\}$ удовлетворяют условию сильного перемешивания с геометрической скоростью, то

$$na_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} S_{\kappa/p} \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $S_{\kappa/p}$ – κ/p -устойчивый случайный вектор,

$$a_n = \inf\{x \in R^+ : nP((\varepsilon_0^2)^p > x) < 1\}.$$

Доказательство. Из замечания 5.3, равенства (5.60), условия $E(\varepsilon_0^2)^p = 1$ и эргодической теоремы получим

$$L_n''(\theta_0) \xrightarrow{\text{п. н.}} B \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.65)$$

Таким образом, из теоремы 5.11 вытекает существование такой $n_0 \in N$, что

$$L_n''(\hat{\theta}_0) = 0 \text{ п. н. при всех } n \geq n_0.$$

Используя теорему о среднем значении с некоторой точкой η , в достаточно маленькой окрестности точки θ_0 имеем

$$(\hat{\theta}_n - \theta_0)L_n''(\eta) = L_n'(\hat{\theta}_n) - L_n'(\theta_0) = L_n'(\theta_0). \quad (5.66)$$

В случае $0 < p < \kappa/2$, из (5.58), (5.64) и (5.66) получим

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \sim n^{-1/2} \sum_{t=1}^n [(\varepsilon_t^2)^p - 1] A_t B^{-1} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.67)$$

Пусть D_t – произвольная линейная комбинация компонент векторов A_t , $t = 1, 2, \dots$. Используя теорему Крамера – Вольда [18] для получения асимптотического распределения ряда (5.67), достаточно найти асимптотическое распределение ряда $n^{-1/2} \sum_{t=1}^n [(\varepsilon_t^2)^p - 1] D_t$. Из леммы 5.7 следует, что D_t имеет конечную ковариацию. Кроме того, $\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1] D_t\}$ – стационарный эргодический мартингально-разностный процесс. Используя центральную предельную теорему для мартингал-разности, получим

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^n [(\varepsilon_t^2)^p - 1] D_t \xrightarrow{d} N(0, D) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $D = \text{Var}\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1] D_1\} = \tau E D_1^2$.

Из (5.65) и того, что $B^{-1} \Sigma B^{-1}$ – ковариационная матрица случайной величины $[(\varepsilon_t^2)^p - 1] A_0 B^{-1}$, имеем

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} \Sigma B^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В случае $\kappa/2 < p < \kappa$, из (5.58), (5.65) и (5.66) получим

$$n a_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \sim a_n^{-1} \sum_{t=1}^n [(\varepsilon_t^2)^p - 1] A_t B^{-1} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.68)$$

Используя (5.66), лемму 5.7 и условие сильного перемешивания с геометрической скоростью последовательности $\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1] A_t\}$, увидим, что для последовательности $\{[(\varepsilon_t^2)^p - 1] A_t\}$ выполняются условия А1–А3 теоремы 2.11. Тогда

$$a_n^{-1} \sum_{t=1}^n [(\varepsilon_t^2)^p - 1] A_t \xrightarrow{d} S_{\kappa/p} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.69)$$

Из соотношений (5.68) и (5.69) получим доказательство теоремы.

5.5. М-оценка параметров для модели GARCH(1,1) с регулярно меняющимися остатками

Построим М-оценку для модели GARCH(1,1) с остатками, имеющими регулярно меняющееся распределение с индексом $\kappa > 0$. Докажем, что результаты, которые были получены в работах П. Холл, Т. Микош [54; 94] и раздел 5.4, являются частными случаями полученного результата [118].

Рассмотрим модель GARCH(1,1) (5.50)–(5.52), где $\{\varepsilon_t^2\}$ – независимые, одинаково распределенные и регулярно изменяющиеся с индексом κ , $\kappa > 0$, случайные величины.

Определим функцию М-оценки следующим образом:

$$L_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\theta), \quad l_t(\theta) = - \left[\ln \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2(\theta)} h \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right) \right\} \right], \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.70)$$

где $h(\cdot)$ – некоторая функция на R^+ ; $\theta = (\omega, \alpha, \beta) \in \Theta$;

$$\sigma_t^2(\theta) = \omega(1 - \beta) + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2; \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \Theta = \{ \theta = (\omega, \alpha, \beta) : 0 < \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2; \\ 0 < \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2 < 1, E \ln(\beta + \alpha \varepsilon_0^2) < 0 \} \end{aligned} \quad (5.72)$$

в предположении, что истинные параметры $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)$ – внутренняя точка пространства Θ .

Тогда $\sigma_t^2(\theta)$ можно переписать в виде

$$\sigma_t^2(\theta) = \omega + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y_{t-k-1}^2, \quad t \in Z. \quad (5.73)$$

Пусть

$$L(\theta) = E l_0(\theta),$$

$$\text{где } l_0(\theta) = - \left[\ln \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2(\theta)} h \left(\frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right) \right\} \right].$$

Лемма 5.8. Если

$$E |\ln \{h(\varepsilon_0 x)\}| \leq C_0 (x^{\nu_0} + 1), \quad x > 0, \quad (5.74)$$

где C_0 – некоторая конечная константа, $\nu_0 \geq 0$, то

$$L(\theta) = El_0(\theta) < \infty \text{ при всех } \theta \in \Theta. \quad (5.75)$$

Доказательство. Из (5.74) имеем

$$\begin{aligned} L(\theta) &= -E \left[\ln \left\{ \frac{1}{\sigma_0^2(\theta)} h \left(\frac{y_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right) \right\} \right] = E \{ \ln \sigma_t^2(\theta) \} - E \left\{ \ln \left[h \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right) \right] \right\} = \\ &= E \{ \ln \sigma_t^2(\theta) \} - E \left\{ \ln \left[h \left(\varepsilon_0 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\{\varepsilon_t^2\}$ – регулярно меняющиеся с индексом $\kappa > 0$, то

$$E(\varepsilon_t^2)^p < \infty \text{ при всех } p < \kappa.$$

Из леммы 5.1 вытекает, что существует такая $p^* > 0$, что

$$E(\sigma_0^2(\theta))^{p^*} < \infty.$$

Используя неравенство Йенсена, имеем

$$E \{ \ln[\sigma_0^2(\theta)] \} \leq \frac{1}{p^*} \ln E[\sigma_0^2(\theta)]^{p^*} < \infty. \quad (5.76)$$

Кроме того, используя (5.74) и лемму 5.6, получим

$$E \left\{ \ln \left[h \left(\varepsilon_0 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right) \right] \right\} \leq C_0 \left[E \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right)^{\nu_0} + 1 \right] < \infty. \quad (5.77)$$

Из (5.76) и (5.77) получим (5.75).

Пусть

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta). \quad (5.78)$$

Предположим, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \ln \{ x h(yx) \} \right| \leq C_1(y)(x^{\nu_1} + 1) / x, \quad x > 0, \quad (5.79)$$

где $EC_1(\varepsilon_0^2) < \infty$, $\nu_1 < 2\kappa$.

Теорема 5.13. Пусть выполняются условия (5.72), (5.74) и (5.79), тогда

$$E \left\{ \sup_{u,v \in \Theta} \frac{1}{|u-v|} |L_n(u) - L_n(v)| \right\} < \infty. \quad (5.80)$$

Доказательство. При всех $u, v \in \Theta$, $t \in Z$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|u-v|} |l_t(u) - l_t(v)| &= \frac{1}{|u-v|} \left| \ln \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2(u)} h \left(\varepsilon_t^2 \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(u)} \right) \right\} - \ln \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2(v)} h \left(\varepsilon_t^2 \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(v)} \right) \right\} \right| = \\ &= \frac{1}{|u-v|} \left| \ln \left\{ \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(u)} h \left(\varepsilon_t^2 \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(u)} \right) \right\} - \ln \left\{ \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(v)} h \left(\varepsilon_t^2 \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(v)} \right) \right\} \right|. \end{aligned}$$

Пусть $z(\theta) = \sigma_t^2 / \sigma_t^2(\theta)$, $\theta \in \Theta$, тогда, используя (5.79) и теорему о среднем значении, определим, что существует такое $\xi \in \Theta$, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{|u-v|} |l_t(u) - l_t(v)| &= \frac{1}{|u-v|} \left| \ln \left\{ z(u) h \left(\varepsilon_t^2 z(u) \right) \right\} - \ln \left\{ z(v) h \left(\varepsilon_t^2 z(v) \right) \right\} \right| = \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial z} \ln \left\{ z h \left(\varepsilon_t^2 z \right) \right\} \Big|_{z=z(\xi)} \frac{\partial z(u)}{\partial u} \Big|_{u=\xi} \right| \leq \\ &\leq C_1(\varepsilon_t^2) \left\{ [z(\xi)]^{v_1} + 1 \right\} \frac{1}{z(\xi)} \frac{\partial z(u)}{\partial u} \Big|_{u=\xi} \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\xi)} = \\ &= C_1(\varepsilon_t^2) \left\{ \left[\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\xi)} \right]^{v_1} + 1 \right\} \frac{(\sigma_t^2(\xi))'}{\sigma_t^2(\xi)}. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} E \left\{ \sup_{u,v \in \Theta} \frac{1}{|u-v|} |L_n(u) - L_n(v)| \right\} &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\{ \sup_{u,v \in \Theta} \frac{1}{|u-v|} |l_t(u) - l_t(v)| \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E \left\{ C_1(\varepsilon_t^2) \left[\left(\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\xi)} \right)^{v_1} + 1 \right] \frac{(\sigma_t^2(\xi))'}{\sigma_t^2(\xi)} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E[C_1(\varepsilon_t^2)] E \left\{ \left[\left(\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\xi)} \right)^{\nu_1} + 1 \right] \frac{(\sigma_t^2(\xi))'}{\sigma_t^2(\xi)} \right\}.$$

Из (5.79) выведем

$$E[C_1(\varepsilon_t^2)] < \infty. \quad (5.81)$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$E \left| \left[\left(\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\xi)} \right)^{\nu_1} + 1 \right] \frac{(\sigma_t^2(\xi))'}{\sigma_t^2(\xi)} \right| \leq E \left\{ \left[\left(\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\xi)} \right)^{\nu_1} + 1 \right]^2 \right\}^{1/2} \left\{ E \left| \frac{(\sigma_t^2(\xi))'}{\sigma_t^2(\xi)} \right|^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.82)$$

Из леммы 5.6 имеем

$$E \left\{ \left[\left(\frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2(\xi)} \right)^{\nu_1} + 1 \right]^2 \right\}^{1/2} < \infty. \quad (5.83)$$

Подобным методом, как и при доказательстве леммы 5.6, получим следующее неравенство:

$$E \left\{ \sup_{\theta \in \Theta} \left| \frac{(\sigma_t^2(\xi))'}{\sigma_t^2(\xi)} \right| \right\}^\gamma < \infty \text{ при некотором } \gamma > 0. \quad (5.84)$$

Из (5.81)–(5.84) получим (5.80).

Теорема 5.14. Если выполняются условия (5.72), (5.74), (5.79) и

$$E \ln \{xh(\varepsilon_0 x)\} \leq E \ln \{h(\varepsilon_0)\}, \quad x > 0, \quad x \neq 1, \quad (5.85)$$

то

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta_0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. $\{l_t(\theta)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – стационарный эргодический процесс с конечным математическим ожиданием $L(\theta) = El_0(\theta) < \infty$. Используя эргодическую теорему, получим

$$L_n(\theta) \xrightarrow{\text{п. н.}} L(\theta), \quad \theta \in \Theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда, используя лемму 5.8, выведем равномерную сходимость ряда функций $\{L_n(\theta)\}$, т. е.

$$\sup_{\theta \in \Theta} |L_n(\theta) - L(\theta)| \xrightarrow{\text{п. н.}} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.86)$$

Кроме того, из (5.85) имеем

$$\begin{aligned} L(\theta) - L(\theta_0) &= El_0(\theta) - El_0(\theta_0) = \\ &= E \left\{ \ln \left[\frac{1}{\sigma_0^2(\theta)} h \left(\varepsilon_0^2 \frac{\sigma_t^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right) \right] \right\} - E \left\{ \ln \left[\frac{1}{\sigma_0^2} h(\varepsilon_0^2) \right] \right\} = \\ &= E \left\{ \ln \left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2(\theta)} h \left(\varepsilon_0^2 \frac{\sigma_t^2}{\sigma_0^2(\theta)} \right) \right] \right\} - E \left\{ \ln [h(\varepsilon_0^2)] \right\} < 0 \end{aligned}$$

при всех таких $\theta \in \Theta$, что $\sigma_0^2 / \sigma_0^2(\theta) \neq 1$ или $\sigma_0^2 \neq \sigma_0^2(\theta)$, или $\theta \neq \theta_0$. Тогда получим $L(\theta) \leq L(\theta_0)$ при всех $\theta \in \Theta$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\theta = \theta_0$, т. е. функция $L(\theta)$ имеет единственный максимум в точке θ_0 .

Учитывая, что функция $L(\theta)$ – непрерывная, соотношения (5.29) и (5.30) справедливы, имеем

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta_0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из определения $L_n(\theta)$ в (5.75) получим

$$L'_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} - \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \frac{h'(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))}{h(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))} \right].$$

Отсюда

$$L'_n(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2}. \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned}
L_n''(\theta) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \left[\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T \frac{h'(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))}{h(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{y_t^4}{\sigma_t^4(\theta)} \left[\left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T h'' \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right) h \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T \left\{ h \left(\frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right) \right\}^2 \right] \frac{1}{[h(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))]^2} \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} + \right. \\
&\quad \left. + \left[1 - \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \frac{h'(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))}{h(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))} \right] \left[\frac{(\sigma_t^2(\theta))''}{\sigma_t^2(\theta)} - \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right) \right] \right\} = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\frac{y_t^4}{\sigma_t^4(\theta)} \frac{h''(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))}{h(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))} - \frac{y_t^4}{\sigma_t^4(\theta)} \left(\frac{h'(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))}{h(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))} \right)^2 - 1 \right] \times \\
&\quad \times \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right)^T \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))'}{\sigma_t^2(\theta)} \right) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[1 - \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \frac{h'(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))}{h(y_t^2 / \sigma_t^2(\theta))} \right] \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta))''}{\sigma_t^2(\theta)} \right).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
L_n''(\theta_0) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[\varepsilon_t^4 \frac{h''(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} - \varepsilon_t^4 \left(\frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right)^2 - 1 \right] \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right)^T \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] \left(\frac{(\sigma_t^2(\theta_0))''}{\sigma_t^2} \right). \tag{5.88}
\end{aligned}$$

Предположим, что при любых $y > 0$, $x > 0$, $h(\cdot)$ выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial h(yx)}{\partial x} \frac{1}{h(yx)} = y^q \frac{\partial h(x)}{\partial x} \frac{1}{h(x)} \text{ при некоторой } q > 0, \tag{5.89}$$

$$E \left[\varepsilon_0^2 \frac{h'(\varepsilon_0^2)}{h(\varepsilon_0^2)} \right] = 1, \tag{5.90}$$

$$E \left[\varepsilon_0^4 \frac{h''(\varepsilon_0^2)}{h(\varepsilon_0^2)} - \varepsilon_0^2 \left(\frac{h'(\varepsilon_0^2)}{h(\varepsilon_0^2)} \right)^2 - 1 \right] < \infty. \quad (5.91)$$

Лемма 5.9. Если выполняются условия (5.89)–(5.91), то $\left\{ \left[1 - \varepsilon_t^2 h'(\varepsilon_t^2) / h(\varepsilon_t^2) \right] \left((\sigma_t^2(\theta_0))' / \sigma_t^2 \right) \right\}$ – многомерно регулярно меняющиеся случайные векторы с индексом κ/q .

Доказательство. Из условия (5.89) регулярного изменения последовательности $\{\varepsilon_t^2\}$ и леммы 2.4 имеем $\{\varepsilon_t^2 h'(\varepsilon_t^2) / h(\varepsilon_t^2)\}$ – регулярно меняющиеся с индексом κ/q . Чтобы доказать лемму 5.9, необходимо и достаточно доказать

$$E \left| \frac{\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right|^\lambda < \infty \text{ при некоторой } \lambda > \kappa/q. \quad (5.92)$$

Действительно, пусть

$$A_t = \frac{\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} = \left(\frac{1}{\sigma_t^2}, \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2, \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \right), t \in N. \quad (5.93)$$

Из $\sigma_t^2 \geq \omega_0(1 - \beta_0)$ имеем, что при всех $\lambda > 0$

$$E \left(\frac{1}{\sigma_t^2} \right)^\lambda \leq \frac{1}{\omega_0(1 - \beta_0)} < \infty. \quad (5.94)$$

Далее при $j = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_t^2} &= \frac{1}{\omega_0(1 - \beta_0) + (\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2) \sigma_{t-1}^2} \leq \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2) \sigma_{t-1}^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2)(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-2}^2) \sigma_{t-2}^2} \leq \dots \leq \frac{1}{\sigma_{t-j}^2} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Тогда из $\sigma_t^2 \geq \omega_0(1 - \beta_0)$ при всех $t \in Z$ имеем

$$\frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \leq \frac{1}{\omega_0(1 - \beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} =$$

$$= \frac{1}{\omega_0(1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{-1} \prod_{i=1}^j \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)}.$$

Пусть $q_k = E[\beta_0 / (\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_0^2)]^k < 1$ при любых $k > 0$. Используя условие (5.91) и неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} & \left[E \left(\frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \right)^k \right]^{1/k} \leq \\ & \leq \frac{1}{\omega_0(1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \beta_0^{-1} \left[E \left(\prod_{i=1}^j \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} \right)^k \right]^{1/k} \right\} = \\ & = \frac{1}{\omega_0(1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{-1} q_k^{j/k} < \infty. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Используя (5.94), выведем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 \frac{1}{\sigma_{t-j}^2} \prod_{i=1}^j \frac{1}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} \leq \\ & \leq \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_0 \varepsilon_{t-j}^2}{\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2} \prod_{i=1}^j \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} \leq \\ & \leq \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, применяя неравенство Минковского для всех $k > 0$, получим

$$\begin{aligned} & \left[E \left(\frac{1}{\sigma_t^2} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_0^{j-1} \frac{\sigma_{t-j}^2}{\sigma_t^2} \right)^k \right]^{1/k} \leq \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} \left[E \left(\prod_{i=1}^{j-1} \frac{\beta_0}{(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-i}^2)} \right)^k \right]^{1/k} \leq \\ & \leq \frac{1}{\omega_0 \alpha_0 (1-\beta_0)} \sum_{j=1}^{\infty} q_k^{(j-1)/k} < \infty. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Из (5.93), (5.94), (5.96) и (5.97) получим (5.92).

Замечание 5.4. Из (5.87) и (5.88) имеем $\dot{L}_n(\theta_0)$ и $\ddot{L}_n(\theta_0)$ – процессы, являющиеся измеримыми функциями от строго стационарного эргодического процесса $\{\varepsilon_t\}$, поэтому $\dot{L}_n(\theta_0)$ и $\ddot{L}_n(\theta_0)$ также являются строго стационарными эргодическими процессами.

Теорема 5.15. Пусть выполняются условия (5.89), (5.90) и (5.91), тогда а) если $\kappa/q \geq 2$, то

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} N(0, B^{-1}DB^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.98)$$

где $B = E\ddot{l}_0(\theta_0)$, $D = \tau C$, $\tau = E\left[\varepsilon_0^2 \frac{h'(\varepsilon_0^2)}{h(\varepsilon_0^2)}\right]^2 - 1$, $C = E(A_0^T A_0)$, A_0 определено в соотношении (5.93);

б) если $1 < \kappa/q < 2$ и $\left\{ \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с геометрической скоростью, то

$$na_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} S_{\kappa/q} \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (5.99)$$

где $S_{\kappa/q}$ – κ/q устойчивый случайный вектор,

$$a_n = \inf \left\{ x \in R^+ : nP\left(\varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} > x\right) < 1 \right\}.$$

Доказательство. Из (5.90) и (5.91), используя эргодическую теорему, выведем

$$\ddot{L}_n(\theta_0) \xrightarrow{\text{п. н.}} B \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5.100)$$

Из теоремы 5.14 следует, что существует такое $n_0 \in N$, что

$$\dot{L}_n(\hat{\theta}_n) = 0 \text{ при всех } n \geq n_0.$$

Используя теорему о среднем значении, для некоторой точки $\eta \in \Theta$, которая лежит в достаточно малой окрестности точки θ_0 , получим

$$(\hat{\theta}_n - \theta_0)L''(\eta) = L'(\hat{\theta}_n) - L'(\theta_0) = -L'(\theta_0). \quad (5.101)$$

Когда $\kappa/q \geq 2$, из (5.87), (5.100) и (5.101) получим

$$n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \sim n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] A_t B^{-1} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из (5.90) следует, что последовательность функций

$$\left\{ \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] A_t B^{-1} \right\}_{n \in N}$$

является стационарным эргодическим мартингал-разностным процессом. Используя центральную предельную теорему для мартингал-разности, получим

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] A_t B^{-1} \xrightarrow{d} N(0, B^{-1} D B^{-1}) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В данном случае (5.98) доказано.

Когда $1 < \kappa/q < 2$, имеем

$$n a_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \sim a_n^{-1} \sum_{t=1}^n \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] A_t B^{-1} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Используя лемму 5.9 и условие сильного перемешивания с геометрической скоростью последовательности $\left\{ \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right\}$, увидим,

что для последовательности случайных величин $\left\{ \left[1 - \varepsilon_t^2 \frac{h'(\varepsilon_t^2)}{h(\varepsilon_t^2)} \right] \frac{(\sigma_t^2(\theta_0))'}{\sigma_t^2} \right\}$

выполняются условия A1–A3 теоремы 2.11. Получим формулу (5.99).

ГЛАВА 6

ПРОЦЕССЫ ЛЕВИ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

6.1. Определение процессов Леви и их связь с безграничной делимостью

Пусть $X = (X(t) = X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in R^+ = [0, \infty))$, является стохастическим процессом, определенным на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Определение 6.1. Случайный процесс $X = (X(t), t \in R^+)$ называется процессом Леви, если:

- L1. $X(0) \stackrel{\text{п. н.}}{=} 0$;
- L2. $X(t)$ имеет независимые и стационарные приращения;
- L3. $X(t)$ является стохастически непрерывным процессом, т. е. для любых $a > 0$ и $s \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow s} P(|X(t) - X(s)| > a) = 0.$$

Заметим, что при выполнении условий L1 и L2, L3 эквивалентно условию

$$\lim_{t \downarrow 0} P(|X(t)| > a) = 0.$$

Выборочные траектории процесса являются отображениями $t \rightarrow X(\omega, t)$ из R^+ в R^d для каждого $\omega \in \Omega, d = 1, 2, \dots$.

Установим соотношение между процессами Леви и безграничной делимостью.

Теорема 6.1. Если $X = (X(t), t \in R^+)$ является процессом Леви, то $X(t)$ выступает безгранично делимой случайной величиной для каждого $t \geq 0$.

Доказательство. Для любого $n \in N$ можем записать

$$X(t) = Y_1^n(t) + \dots + Y_n^n(t),$$

где

$$Y_k^n(t) = X\left(\frac{kt}{n}\right) - X\left(\frac{(k-1)t}{n}\right), k = \overline{1, n}.$$

Из L2 следует, что $Y_k^n(t), k = \overline{1, n}$, являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами для каждого $t \geq 0$.

Следовательно, $X(t)$ для любого $t \geq 0$ выступает безгранично делимой случайной величиной.

Из теоремы следует, что можно записать

$$\varphi_{X(t)}(u) = E(e^{i(u, X(t))}) = e^{\eta(t, u)},$$

для каждого $t \geq 0$, где $\eta(t, u)$ – символ Леви, $u \in R^d$.

Теорема 6.2. Если X является процессом Леви, то

$$\varphi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)}$$

для каждого $t \geq 0, u \in R^d$, где η – символ Леви для $X(1)$.

Доказательство. Предположим, что X – процесс Леви, и для каждого $t \geq 0, u \in R^d$ определим

$$\varphi_u(t) = \varphi_{X(t)}(u).$$

Тогда из L2 для всех $s \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_u(t+s) &= E(e^{i(u, X(t+s))}) = E(e^{i(u, X(t+s)-X(s)+X(s))}) = \\ &= E(e^{i(u, X(t+s)-X(s))} e^{i(u, X(s))}) \stackrel{(L2)}{=} E(e^{i(u, X(t+s)-X(s))}) E(e^{i(u, X(s))}) \stackrel{(L2)}{=} \\ &\stackrel{(L2)}{=} E(e^{i(u, X(t)-X(0))}) E(e^{i(u, X(s))}) \stackrel{(L1)}{=} E(e^{i(u, X(t))}) E(e^{i(u, X(s))}) = \quad (6.1) \\ &= \varphi_u(t) \varphi_u(s). \end{aligned}$$

Из L1 следует, что

$$\varphi_u(0) = \varphi_{X(0)}(u) = E(e^{i(u, X(0))}) = E(e^{i(u, 0)}) = 1 \quad (6.2)$$

и отображение $t \rightarrow \varphi_u(t)$ является непрерывным. Значит, единственное непрерывное решение для (6.1) при условии (6.2) задается как

$$\varphi_u(t) = e^{t\alpha(u)},$$

где $\alpha : R^d \rightarrow C$.

Из теоремы 6.1 следует, что $X(1)$ безгранично делимо, следовательно, α есть символ Леви для $X(1)$. Тогда

$$\varphi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)} E,$$

где $\eta(u)$ – символ Леви для $X(1)$, еще называют кумулянтной.

Будем определять символ Леви и характеристики процесса Леви через характеристики случайной величины $X(1)$, а также писать символ Леви η как η_X , чтобы указать его принадлежность процессу X .

Пусть P_t — закон распределения $X(t)$ для каждого $t \geq 0$. Из L2 имеем, что для всех $s, t \geq 0$,

$$P_{t+s} = P_t \times P_s.$$

Из L3 следует $P_t \xrightarrow{w} \delta_0$ при $t \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{R^d} f(x) P_t(dx) = f(0).$$

Получаем следующее асимптотическое соотношение между законом распределения для процесса Леви и его мерой Леви:

$$\nu = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t}{t}.$$

Более точно

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{R^d} f(x) P_t(dx) = \int_{R^d} f(x) \nu(dx)$$

для ограниченной непрерывной функции f , которая обращается в ноль вне некоторой окрестности начала координат.

Процессы Леви $X = (X(t), t \geq 0)$ являются процессами со стационарными независимыми приращениями, поэтому их распределения полностью выражаются через одномерные распределения $P_t(dx) = P\{X(t) \in dx\}$.

Напомним, что $X(0) = 0$. Из определения этих процессов вытекает, что распределение $P_t(dx)$ является при каждом t безгранично делимым.

Пусть

$$\varphi_t(u) = E(e^{i(u, X(t))}) = \int_{R^d} e^{i(u, x)} P_t(dx) -$$

характеристическая функция. Тогда в соответствии с теоремой Леви — Хинчина

$$\varphi_t(u) = \exp \left[i(m_t, u) - \frac{1}{2}(u, A_t u) + \right.$$

$$+ \int_{R^d \setminus \{0\}} \left(e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)I_B(y) \right) v_t(dy) \Big],$$

где $B = \{y \in R^d; \|y\| < 1\}$; $m_t \in R^d$; A_t – симметричная неотрицательно определенная матрица порядка $d \times d$; $v_t(dy)$ – мера Леви (при каждом t) со свойством

$$\int_{R^d} (\|x\|^2 \wedge 1) v_t(dx) < \infty.$$

Заметим, что возможен как случай $v_t(R^d) < \infty$, так и случай $v_t(R^d) = \infty$.

В силу стационарности и независимости приращений показано, что

$$\varphi_{t+s}(u) = \varphi_t(u) \varphi_s(u),$$

откуда следует, что $\varphi_t(u)$ имеет вид

$$\varphi_t(u) = \exp\{t \eta(u)\}. \quad (6.3)$$

Поскольку триплеты (m_t, A_t, v_t) однозначно определяются по характеристической функции, то из (6.3) можно получить

$$m_t = t \cdot m, \quad A_t = t \cdot A, \quad v_t(dx) = t \cdot v(dx),$$

где $m = m_1$, $A = A_1$, $v = v_1$.

Понятно, что в (6.3)

$$\eta(u) = i(m, u) - \frac{1}{2}(u, Au) + \int_{R^d \setminus \{0\}} (e^{i(u,y)} - 1 - i(u,y)I_B(y)) v(dx).$$

Остановимся на смысловой стороне компонент триплета (m_t, A_t, v_t) для $t \geq 0$. Можно сказать, что m_t , $t \geq 0$, – это трендовая составляющая, ответственная за среднее движение процесса $X = (X(t), t \geq 0)$. Компонента A_t , $t \geq 0$, определяет дисперсию непрерывной гауссовской составляющей процесса X , а меры Леви v_t , $t \geq 0$, ответственны за поведение скачкообразной компоненты процесса X , показывая, как часто появляются скачки и какова их величина. Это несколько вольная интерпретация, которая может быть подкреплена точными утверждениями.

Как отмечали ранее, классическим примером непрерывного процесса Леви является стандартное броуновское движение $m_t = 0$, $A_t = t$, $v_t \equiv 0$, $t \geq 0$.

Определение 6.2. Назовем пространством Скорохода $D[0; \infty)$ совокупность действительных функций, заданных на $[0; \infty)$, непрерывных справа и имеющих конечные пределы слева в каждой точке $t \in (0; \infty)$. Функции из этого пространства часто называют *càdlàg*-функциями (от фр. *continue à droite, limite à gauche* – непрерывный справа, имеющий предел слева); используется также обозначение *rcll* (от англ. *right continuous, left-hand limits* – непрерывный справа, имеющий предел слева).

Теорема 6.3. Стохастически непрерывный на R^+ процесс с независимыми приращениями имеет модификацию с траекториями из пространства $D[0, \infty)$.

Рассмотрим процессы с независимыми приращениями, заданными на R^+ и принимающими значения в R^d .

Определение 6.3. Случайный процесс $X = \{X(t), t \geq 0\}$ является *càdlàg*-процессом, если его траектории п. н. являются *càdlàg*-функциями. Процесс X имеет скачок в фиксированной точке $t > 0$, если

$$P\{X(t) \neq X(t-)\} > 0,$$

где $X(\omega, t-) = \lim_{s \uparrow t} X(\omega, s)$.

Определение 6.4. Процессом Леви $X = (X(t), t \geq 0)$ со значениями в R^d называется такой *càdlàg*-процесс, что

- 1) $X(0) \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$;
- 2) X – процесс со стационарными независимыми приращениями.

Определение 6.5. Одномерные процессы Леви с неубывающими почти $\stackrel{\text{п.н.}}{\text{покоординатно}}$ траекториями ($X(0) = 0$, $X(s) \leq X(t)$ для $s \leq t$) принято называть субординаторами.

Одним из наиболее важных вероятностных приложений для субординаторов есть случайная «замена времени».

Пусть X – произвольный процесс Леви, T – субординатор, определенный на том же вероятностном пространстве, что и процесс X , причем эти процессы независимые.

Определим новый стохастический процесс $Z = (Z(t), t \geq 0)$ путем представления $Z(t) = X(T(t))$ для каждого $t \geq 0$, при этом для каждого $\omega \in \Omega$

$$Z(t)(\omega) = X(T(t)(\omega))(\omega).$$

В таком случае основным результатом является теорема 6.4. Случайный процесс Z является процессом Леви.

6.2. Процессы Броуна, Пуассона и Леви

Будем рассматривать случайные процессы $X(t) = X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in R^+ = [0; \infty)$, и многомерные (D -мерные, D – натуральное число) случайные процессы $X(t) = (X_1(t), \dots, X_D(t))$, $t \in T$, где $X_d(t)$ – одномерные случайные процессы, $d = \overline{1, D}$, $t \in R^+$.

Под численной аппроксимацией скалярного случайного процесса $X(t)$ будем понимать $(I+1)$ – семейство случайных величин $\{X_i^\tau\}_{i=0}^I$, построенных таким образом, чтобы запись $X(t_i) \approx X_i^\tau$ имела математический смысл в каждом рассматриваемом случае для параметра τ , убывающего к 0.

Чаще всего для отрезка $[t_0; T]$ и заданного достаточно большого натурального числа I имеем сетку узлов $t_i = t_0 + \tau i$, $\tau = \frac{T-t_0}{I}$, $i = \overline{0, I}$.

Под статистической аппроксимацией процесса $X(t)$ будем понимать $(I+1)$ -семейство случайных выборок $\left\{ \left\{ \bar{X}_{i,k}^\tau \right\}_{k=1}^K \right\}_{i=0}^I$ размерности K с неизвестным распределением случайных величин X_i^τ , $i = \overline{0, I}$.

Для процесса $X(t) = \{X_1(t), \dots, X_D(t)\}$, $t \in [t_0; T]$, численную аппроксимацию задаем на той же сетке узлов $\{t_i\}$ для всех составляющих $X_d(t)$, $d = \overline{1, D}$, $t \in [t_0; T]$. Для каждой составляющей $X_d(t)$, $d = \overline{1, D}$, $t \in [t_0; T]$, строим статистическую аппроксимацию в виде $(I+1)$ -мерного множества случайных выборок $\left\{ \left\{ \bar{X}_{d;i,k}^\tau \right\}_{k=1}^K \right\}_{i=0}^I$.

Определение 6.6. Стандартным одномерным процессом движения Броуна $B = \{B(t), t \in R^+\}$ называется семейство случайных величин $B(t) = B(\omega, t)$, определенных на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и удовлетворяющих следующим свойствам:

- 1) $P\{\omega : B(\omega, 0) = 0\} = 1$;
- 2) процесс $\{B(t)\}$ имеет стационарные независимые приращения;
- 3) для произвольных s, t , $0 \leq s < t$, случайные величины $B(t) - B(s)$ имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $t - s$, т. е.

$$P\{a \leq (B(t) - B(s)) < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx, \quad a, b \in R;$$

4) $P\{\omega: B^\omega(t) = B(\omega, t)$ есть непрерывная функция для $t \in \{R^+\} = 1$.

Лемма 6.1. Процесс движения Броуна удовлетворяет следующим свойствам:

1) $(B(t_1), \dots, B(t_n))$ является гауссовским вектором с нулевым математическим ожиданием для произвольных $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$;

2) $E(B(t)B(s)) = \min(t, s)$ для произвольных $t, s \geq 0$.

Многомерное движение Броуна выразим, используя определение 6.6.

Определение 6.7. Стандартным D -мерным процессом движения Броуна будем называть векторный процесс $\{B^D(t), t \geq 0\}$, для которого составляющие $B_1(t), \dots, B_D(t)$ являются такими независимыми скалярными процессами движения Броуна, что

$$E(B_d(t)B_l(s)) = \delta_{dl} \min(t, s),$$

$$\delta_{dl} = \begin{cases} 1, d=l, \\ 0, d \neq l. \end{cases}$$

$$d, l=1, 2, \dots, D, \quad t, s \in R^+.$$

Рассмотрим метод аппроксимации движения Броуна с помощью метода суммирования его приращений. Он является наипростейшим и наиболее применяемым для построения процессов с независимыми стационарными приращениями и называется схемой Эйлера. Зададим натуральное число I , определим $\tau = \frac{T}{I}$ и введем сетку точек

$\{t_i = i\tau/i = 0, 1, \dots, I\}$ на $[0; T]$. Используя конечную последовательность независимых случайных величин $\{X_i\}, X_i \sim N(0, 1)$, что равносильно $\frac{1}{\tau^2} X_i \sim N(0, \tau)$, $i=1, \dots, I$, строим конечную последовательность случайных величин $B^\tau(t_i)$ следующим образом:

$$B^\tau(0) = 0,$$

$$B^\tau(t_i) = B^\tau(t_{i-1}) + \tau^{\frac{1}{2}} X_i, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Для нахождения значений процесса $B^\tau(t_i)$ на всем промежутке $[0; T]$ можно использовать линейную интерполяцию

$$B^\tau(t) = B^\tau(t_{i-1}) + \tau^{\frac{1}{2}} X_i(t - t_{i-1}); t \in (t_{i-1}; t_i), i = \overline{1, I}.$$

Алгоритм 1. Генерирование приближенной траектории движения Броуна $\bar{B}^\tau(\omega_0, t)$, $t \in [0; T]$, для заданного ω_0 состоит в использовании последнего равенства для $B^\tau(t)$, при этом случайные величины X_i заменяются их реализациями $\bar{X}_i$, $i = \overline{1, I}$. Тогда используем следующее равенство:

$$\bar{B}^\tau(\omega_0, t) = \bar{B}^\tau(\omega_0, t_{i-1}) + \tau^{\frac{1}{2}} \bar{X}_i(t - t_{i-1}), t \in (t_{i-1}, t_i),$$

а для $t = t_i$ получим $\bar{B}^\tau(\omega_0, t_i) = \bar{B}^\tau(\omega_0, t_{i-1}) + \tau^{\frac{1}{2}} \bar{X}_i$, $i = \overline{1, I}$.

Определение 6.8. Случайный процесс, определяемый соотношением

$$N_\lambda = \left\{ N_\lambda(\omega, t) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{(0, t]}(T_j), t \in R^+ \right\},$$

$t = 0, 1, 2, \dots$, называют процессом Пуассона, если $\{T_j\}$, $j \geq 1$, является последовательностью случайных величин вида

$$T_j = \sum_{l=1}^j E_l,$$

где $\{E_l\}$, $l \geq 1$, означает последовательность таких независимых случайных величин, что $E_l \sim E(\lambda)$, т. е. имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , $l = 1, 2, \dots$, $\lambda > 0$, – параметр интенсивности.

Замечание 6.1. Разность $N_\lambda(\omega, t) - N_\lambda(\omega, s) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{(s, t]}(T_j(\omega))$ – приращение процесса Пуассона для $0 \leq s < t$, определяющее число случайных величин T_j , попадающее в промежуток $(s, t]$, $I_{(s, t]}(\cdot)$ – индикаторная функция.

Теорема 6.5. Процесс Пуассона $N_\lambda = \{N_\lambda(t), t \in R^+\}$ имеет следующие свойства:

- 1) $P\{N_\lambda(0) = 0\} = 1$;

- 2) процесс $N_\lambda(t)$ имеет стационарные независимые приращения;
 3) распределения случайных величин $N_\lambda(t)$ определяются равенством

$$P\{N_\lambda(t) = i\} = p_i(\lambda t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots;$$

- 4) если $0 \leq s < t < \infty$, то имеем

$$P\{(N_\lambda(t) - N_\lambda(s) = i)\} = p_i(\lambda(t-s)), \quad i = 0, 1, \dots$$

Построим траекторию $\bar{N}_\lambda(\omega_0, t)$ процесса Пуассона на отрезке $[0; T]$.

Алгоритм 2. Вначале генерируем последовательность $\{\bar{E}_l\}$, $l = 1, 2, \dots$, реализаций случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром λ . Далее последовательно вычисляем $\bar{T}_j = \sum_{l=1}^j \bar{E}_l$ так долго, что для некоторого числа J получим $\bar{T}_J \geq T$, а затем принимаем, что

$$\bar{N}_\lambda(\omega_0, t) = J, \quad t \in [\bar{T}_{J-1}, \bar{T}_J),$$

причем $\bar{T}_0 = 0$.

Алгоритм 3. Траектория скомпенсированного процесса Пуассона $\tilde{N}_{\lambda_0}$ определяется равенством

$$\tilde{N}_\lambda(t) = \bar{N}_\lambda(t) - \lambda t.$$

Тогда

$$\tilde{N}_\lambda(\omega_0, t) = \bar{N}_\lambda(\omega_0, t) - \lambda t \quad \text{для всех } t \in [0; T].$$

Пусть случайная величина X имеет устойчивое распределение, т. е. $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, $\alpha \in (0; 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1; 1]$, $\mu \in R$.

Определение 6.9. Случайным α -устойчивым процессом будем называть процесс $X(t)$; $t \in [0; \infty)$, все конечномерные распределения которого являются α -устойчивыми случайными векторами, $\alpha \in (0; 2]$.

Определим и приведем свойства процесса, который обобщает процесс движения Броуна.

Определение 6.10. Случайный процесс $X(t)$, $t \geq 0$, будем называть α -устойчивым движением Леви, если:

1) $P\{X(\omega, 0)=0\}=1$;

2) процесс $X(t)$ имеет стационарные независимые приращения;

3) $(X(t) - X(s)) \sim S_\alpha \left((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, \beta, 0 \right)$ для произвольных $0 \leq s < t < \infty$.

Случайный процесс $X(t)$, для которого выполняются соотношения п. 1–3 при $\alpha \in (0; 2]$, $\beta \in [-1; 1]$, будем обозначать символом $L_{\alpha, \beta}(t)$, $t \geq 0$, а $L_\alpha(t)$, $t \geq 0$, будем обозначать симметричное α -устойчивое движение Леви (случай $\beta=0$).

Лемма 6.2. Имеет место соотношение

$$L_{2,0}(t) \stackrel{D}{=} \sqrt{2}B(t), \quad t \in R^+.$$

Замечание 6.2. 1. Симметричное α -устойчивое движение Леви является процессом $\frac{1}{\alpha}$ -самоподобным. Это значит, что для произвольного

$c > 0$ процессы $X(ct)$, $t \geq 0$, и $c^{\frac{1}{\alpha}}X(t)$, $t \geq 0$, имеют одни и те же конечно-мерные распределения, т. е. $X(ct) \stackrel{D}{=} c^{\frac{1}{\alpha}}X(t)$.

2. Траектории α -устойчивого движения Леви имеют фрактальную структуру.

Подобно процессу движения Броуна аппроксимацию движения Леви $L_{\alpha, \beta}(t)$ можно реализовать с помощью метода суммирования приращений, зная, что рассматриваемый процесс имеет стационарные независимые приращения.

Алгоритм 4. Определим сетку $\{t_i = i\tau, i = \overline{1, I}\}$ на отрезке $[0; T]$, где I – заданное натуральное число; $\tau = \frac{T}{I}$. Введем следующую независимую последовательность случайных величин $X_i, i = 1, 2, \dots, I$ со стандартным α -устойчивым распределением, т. е. $X_i \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$, и построим конечную последовательность случайных величин $L_{\alpha, \beta}^\tau(t_i)$ следующим образом:

$$L_{\alpha, \beta}^\tau(0) = 0,$$

$$L_{\alpha, \beta}^\tau(t_i) = L_{\alpha, \beta}^\tau(t_{i-1}) + \tau^{\frac{1}{\alpha}}X_i, \quad i = 1, 2, \dots, I.$$

Для нахождения значений процесса $L_{\alpha,\beta}^\tau$ на всем промежутке $[0; T]$ можно сделать линейную интерполяцию

$$L_{\alpha,\beta}^\tau(t_i) = L_{\alpha,\beta}^\tau(t_{i-1}) + \tau^{\frac{1}{\alpha}} X_i(t - t_{i-1}), t \in (t_{i-1}, t), i = \overline{1, I}.$$

Алгоритм 5. Генерирование траектории $\overline{L_{\alpha,\beta}^\tau}(\omega_0 t), t \in (0; T)$, α -устойчивого движения Леви для заданного ω_0 можно реализовать подобно алгоритму для траекторий движения Броуна. В последнем равенстве вместо случайных величин X_i следует подставить их реализации $\overline{X_i}, i = \overline{1, I}$.

6.3. Примеры распределений и процессов Леви, используемые в финансовой математике

Для исследования финансовых временных рядов применяют следующие распределения и соответствующие им процессы: нормальное распределение, скошенное нормальное распределение, t -распределение Стьюдента, скошенное t -распределение Стьюдента, гамма-распределение, распределение Коши, устойчивое распределение. В настоящее время широко используются следующие распределения и с такими же названиями процессы Леви: VG (*Variance Gamma*), NIG (*Normal Inverse Gaussian*), CGMY (*Carr, German, Madan, YOR*), IG (*Inverse Gaussian*), GIG (*Generalized Inverse Gaussian*), GH (*Generalized Hyperbolik*), HYP (*Hyperbolic*), TS (*Tempered Stable*), CTS (*Classical Tempered Stable*), MTS (*Modified Tempered Stable*), KR (*Kim, Rachew*), Meixner.

ГЛАВА 7

ОЦЕНКА ИНДЕКСА «ТЯЖЕЛОГО ХВОСТА» РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

7.1. Регулярное изменение решения стохастического уравнения

Представим применение теоремы Х. Кестена [67] для доказательства регулярного изменения решения стохастического уравнения. Эти результаты могут также использоваться для доказательства свойства регулярного изменения модели GARCH.

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in Z, \quad (7.1)$$

для некоторой последовательности $\{(A_t, B_t)\}$ независимых, одинаково распределенных $d \times d$ случайных матриц A_t и d -мерных случайных векторов B_t , $t \in Z$.

Необходимое и достаточное условие для существования единственного строго стационарного решения стохастического рекуррентного уравнения (7.1) введено в теореме 5.1.

В общих условиях стационарное решение стохастического рекуррентного уравнения (7.1) удовлетворяет условию многомерного регулярного изменения [48; 67]. Рассмотрим комбинацию теорем 3 и 4 в работе Х. Кестена [67] как модификацию фундаментального результата.

Теорема 7.1. Пусть $\{(A_t, B_t)\}$ – независимые, одинаково распределенные $d \times d$ случайные матрицы A_t и d -мерные случайные векторы с неотрицательными компонентами B_t , $t \in Z$. Предположим, что выполняются следующие условия:

- а) при некоторой $\lambda > 0$, $E\|A_1\|^\lambda < 1$;
- б) A_1 имеет ненулевые строки п. н.;
- в) множество

$$\left\{ \ln \|a_1 \dots a_n\| : n \geq 1, a_1 \dots a_n > 0 \text{ и } a_1 \dots a_n \in \text{supp} \left(P_{A_1} \right) \right\}$$

порождает плотную группу в R ;

- г) существует такая константа $k_0 > 0$, что

$$E \left(\min_{i=1, \dots, d} \sum_{j=1}^d A_{ij} \right)^{k_0} \geq d^{k_0/2}, \quad (7.2)$$

$$E \left(\|A_1\|^{k_0} \ln^+ \|A_1\| \right) < \infty. \quad (7.3)$$

Тогда имеем следующее:

1) существует единственное решение $k_1 \in (0; k_0]$ уравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln E \|A_n \dots A_1\|^{k_1} = 0; \quad (7.4)$$

2) существует единственное строго стационарное решение $\{X_t\}$ стохастического рекуррентного уравнения (7.1);

3) если $E|B_1|^{k_1} < \infty$, то для X_1 выполняется условие регулярного изменения:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{k_1} P((x, X_1) > u) = w(x), \text{ существующее при всех } x \in R^d \setminus \{0\} \quad (7.5)$$

и $w(x) > 0$ при всех векторах x , все элементы которых положительные.

Замечание 7.1. В случае $d = 1$ условие теоремы Х. Кестена будет особенно простым. Действительно, если A_1 – неотрицательная случайная величина с нерешетчатым распределением на $[0; \infty)$, $E \ln A_1 < 0$, $E A_1^{k_0} \geq 1$ и $E(A_1^{k_0} \ln^+ A_1) < \infty$, то все условия теоремы 7.1 выполняются и уравнение (7.4) обращается в уравнение $E A_1^{k_1} = 1$, которое имеет единственное положительное решение. Если $E A_1^{k_1} < \infty$, то X_1 является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом k_1 .

Ясно, что (7.5) является частным случаем равенства (2.7), где медленно меняющаяся функция $L(x)$ выступает положительной константой. Прямым следствием теоремы 2.13 является следующий результат.

Следствие 7.1. Пусть, что все условия теоремы 7.1 выполняются, тогда единственное строго стационарное решение $\{X_t\}$ стохастического рекуррентного уравнения (7.1) является регулярно меняющимся: если k_1 в уравнении (7.4) – нечетное число, то существуют такие константа C и случайный вектор Θ на единичной сфере S^{d-1} , что

$$u^{k_1} P(|X| > tu, X / |X| \in A) \xrightarrow{v} Ct^{-k_1} P(\Theta \in A), \quad u \rightarrow \infty,$$

для всех борелевских множеств A , $A \subset S^{m-1}$ и $t > 0$.

Следствие 7.2. Предположим, что имеют место условия следствия 7.1, тогда конечномерные распределения стационарного решения $\{X_t\}$ стохастического рекуррентного уравнения (7.1) являются регулярно меняющимися с индексом k_1 .

Можем записать, что

$$(X_1, \dots, X_m) = (A_1, A_2, A_1, \dots, A_m, \dots, A_1)X_0 + R_m,$$

где компоненты случайного вектора R_m имеют более «легкие хвосты», чем компоненты случайного вектора X_0 . Свойства регулярного изменения случайного вектора разбирали Б. Басрак, Р. А. Дэвис, Т. Микош [14].

7.2. Регулярное изменение совместного распределения модели GARCH и оценка индекса «тяжелого хвоста» модели ARCH(1) с устойчивыми остатками

Хорошо известно, что регулярное изменение совместных распределений обеспечивает многие свойства моментов процесса, а также структуру зависимости между наблюдениями. Подставляя квадраты y_t^2 и σ_t^2 стационарной модели GARCH $\{y_t\}$ и ее условной дисперсии $\{\sigma_t^2\}$ в стохастическое уравнение (5.7), для его решения можно использовать классическую теорию «тяжелых хвостов», которую развивали Х. Кестен (1973), П. Эмбрех, Т. Микош (1997), С. М. Голди (1991) для выяснения свойства регулярного изменения совместных распределений модели GARCH. В разделе 7.2 покажем, что конечномерные совместные распределения данной модели являются регулярно меняющимися распределениями, т. е. распределениями с «тяжелыми хвостами».

Рассмотрим модель GARCH(p, q):

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in Z, \quad (7.6)$$

где $\{\varepsilon_t, t \in Z\}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины; $\omega_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $1 \leq i \leq p$, $\beta_j \geq 0$, $1 \leq j \leq q$.

Перепишем представление (5.7) стохастического уравнения GARCH-модели в следующем виде:

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in Z, \quad (7.7)$$

где

$$A_n = \begin{bmatrix} \tau_n & \beta_q & \alpha & \alpha_p \\ I_{q-1} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p-2} & 0 \end{bmatrix},$$

$\tau_n = (\beta_1 + \alpha_1 \varepsilon_n^2, \beta_2, \dots, \beta_{q-1}) \in R^{q-1}$; $\xi_n = (\varepsilon_n^2, 0, \dots, 0) \in R^{q-1}$; I_n – единичная матрица, $n = 0, 1, 2, \dots$; $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) \in R^{p-2}$; $B_t = (\omega_0, 0, \dots, 0)^T \in R^{p+q-1}$; $X_n = (\sigma_n^2, \dots, \sigma_{n-q+1}^2, y_{n-1}^2, \dots, y_{n-p+1}^2)^T \in R^{p+q-1}$.

Из независимости последовательности остатков $\{\varepsilon_t\}$ вытекает, что последовательность $\{(A_t, B_t)\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных $d \times d$ случайных матриц A_t и d -мерных векторов B_t , где $d = p + q$.

Используя теорему 7.1, имеем результат о регулярном изменении совместных распределений модели GARCH в теореме 7.2.

Теорема 7.2. Допустим, выполнены условия:

1) ε_1 имеет такую положительную плотность на R , что $E |\varepsilon_1|^h < \infty$ при всех $h < h_0$ и $E |\varepsilon_1|^{h_0} = \infty$ при некоторой $h_0 \in (0; \infty]$;

2) не все параметры α_i и β_i нулевые.

Тогда существуют такие константа $k_1 > 0$ и ограниченная функция $w(x)$, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^{k_1} P((x, X_1) > u) = w(x) \text{ существует при всех } x \in R^d \setminus \{0\},$$

т. е. (x, X_1) является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом k_1 . Кроме того, если $x \in [0, \infty)^d \setminus \{0\}$, то $w(x) > 0$; если k_1 – нечетное, то X_t является регулярно меняющейся случайной величиной с индексом k_1 , т. е. существует такой случайный вектор Θ на единичной сфере S^{p+q-2} , что

$$u^{k_1} P(|X| > tu, X / |X| \in A) \xrightarrow{v} t^{-k_1} P(\Theta \in A), u \rightarrow \infty, \quad (7.8)$$

для всех борелевских множеств A , $A \subset S^{m-1}$.

Доказательство. Из условия 1 теоремы видно, что условие замечания 5.1 выполняется. Отсюда вытекает единственное строго стационарное решение модели GARCH. Рассмотрим подпоследовательность $\tilde{X}_t = X_{tm}$ последовательности $\{X_t\}$, определяющейся стохастическим уравнением (7.7), при некотором натуральном числе m . Тогда перепишем

$$X_{tm} = A_{tm} \dots A_{t(m-1)+1} X_{t(m-1)} + B_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_{tm} \dots A_{tm-k+1} B_{tm-k} = A_t X_{t(m-1)} + B_t, t \in Z,$$

где $\{(\tilde{A}_t, \tilde{B}_t)\}$ – независимая, одинаково распределенная последовательность, поэтому для $\{\tilde{X}_t\}$ выполняется стохастическое уравнение

$$\tilde{X}_t = \tilde{A}_t \tilde{X}_{t-1} + \tilde{B}_t, t \in Z. \quad (7.9)$$

Из условия 1 теоремы и понятия экспоненты Ляпунова (5.5) следует: при достаточно большом значении m существует такое достаточно маленькое число $\lambda > 0$, что $E \|\tilde{A}_1\|^\lambda < 1$ и $E |\tilde{B}_1|^\lambda < \infty$. Отсюда вытекает, что условие 1 теоремы 7.1 выполняется.

Заметим, что компоненты случайной матрицы A_1 имеют полилинейные выражения случайных величин ε_i^2 . Кроме того, из условия $E |\varepsilon_1|^h < \infty$ при всех $h < h_0$ и $E |\varepsilon_1|^{h_0} = \infty$ следует, что $E |\varepsilon_1|^h$ принимает любое большое значение, когда h близко к значению h_0 . Получается, что (7.2) выполняется при достаточно большом значении k_0 , (7.3) – при $h < h_0$.

Далее покажем свойство натуральных чисел $\ln \|a_1 \dots a_n\|$, где значения a_i лежат в $\text{supp}(A_1)$ и порождают плотную группу в R . Действительно, зная, что компоненты случайной матрицы A_1 имеют полилинейные выражения случайных величин ε_i^2 с плотностью на $(0; \infty)$, получим, что у A_1 все компоненты положительные. Поскольку полилинейные выражения компонент случайной матрицы A_1 являются непрерывными функциями от ε_i^2 , то опоры A_1 и $\|A_1\|$ – связанные множества. Отсюда имеем, что при достаточно большом значении m опора $\ln \|A_1\|$ содержит интервал, который приводит к плотности натуральных чисел $\ln \|a_1 \dots a_n\|$.

Видим, что для стохастического уравнения (7.9) выполняются все условия теоремы 7.1. Отсюда получим регулярное изменение случайной величины (x, X_1) с индексом $k_1 > 0$. В случае если k_1 – нечетное число, получим (7.8) из следствия 7.1.

Следствие 7.3. Пусть выполняются условия теоремы 7.2, тогда «хвост» распределения стационарной модели GARCH (7.6) «ведет себя» по степенному закону: существуют константа $k_1 > 0$ и положительные константы $c_{|X|}$ и c_σ такие, что

$$P(|X_1| > x) \sim c_{|X|} x^{-2k_1} \text{ и } P(|\sigma_1| > x) \sim c_\sigma x^{-2k_1}.$$

Используя результат Л. Бреймана [28], получим

$$P(|X_1| > x) = \frac{1}{2} P(\sigma_1 | \varepsilon_1| > x) \sim E |\varepsilon_1|^{2k_1} P(\sigma_1 > x).$$

Предположим, что ε_1 – симметрическая случайная величина, поэтому X_1 также является симметрической случайной величиной.

Пример 7.1. ε_1 имеет нормальное распределение или распределение Стьюдента. Тогда $\text{sign}(\varepsilon_1)$ и $|\varepsilon_1|$ независимые. Отсюда имеем

$$P(X_1 > x) = \frac{1}{2} P(|X_1| > x) \sim \frac{1}{2} E |\varepsilon_1|^{2k_1} c_\sigma x^{-2k_1}.$$

В общем случае значения $c_{|X|}$, c_σ и индекс k_1 трудно вычислить, но при ARCH(1) или GARCH(1,1) это можно сделать.

Пример 7.2. Модель GARCH(1,1) с $\alpha_0 + \beta_0 = 1$, $\{\varepsilon_t\}$ имеет нормальное распределение, $E\varepsilon_0^2 = 1$. Тогда уравнение (7.11) имеет единственный корень $k = 2$. Таким образом,

$$E \ln A_0 < \ln E(\alpha_0 \varepsilon_0^2 + \beta_0) = 0 \text{ и } P(A_0 > 1) = P(\alpha_0 \varepsilon_0^2 + \beta_0 > 1) > 0.$$

Отсюда получим

$$P(\sigma_0 > x) \sim C_0 x^{-2} \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

$$P(|y_0| > x) \sim C_0 x^{-2} \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Оценим индекс «тяжелого хвоста» k_1 распределения модели ARCH(1) с устойчивыми остатками.

Рассмотрим процесс GARCH(1,1):

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (7.10)$$

где $\{\varepsilon_t^2, t \in \mathbb{Z}\}$ – независимые, одинаково распределенные κ -устойчивые случайные величины, $\kappa \in (0; 2]$; $\omega_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$.

Пусть $A_0 = \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_0^2$. Исследуем свойства поведения распределений модели GARCH(1,1) и остатков $\{\varepsilon_t\}$. Связь между степенями «хвоста» модели GARCH(1,1), ее коэффициентами и распределением остатков исследована в работах Е. Иглесиаса, Ц. Старица, Н. Вагнера [60; 112; 121]. Из теоремы 7.2 видно, что если $E \ln A_0 < 0$, $P(A_0 > 1) > 0$, то существует константа $h_0 > 0$ при $EA_0^h < \infty$ для всех $h < h_0$, $EA_0^{h_0} = \infty$, уравнение

$$EA_0^{k/2} = 1 \quad (7.11)$$

имеет единственный положительный корень $k = k_1$, модель (7.10) имеет единственное стационарное решение. Кроме того, существует такая положительная константа C_0 , что

$$P(\sigma_0 > x) \sim C_0 x^{-k_1} \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (7.12)$$

и

$$P(|y_0| > x) \sim E|\varepsilon_0|^{k_1} P(\sigma_0 > x) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (7.13)$$

Когда $\{\varepsilon_t\}$ – κ -устойчивые случайные величины, $\kappa \in (0; 2]$, тогда условие 1 теоремы 7.2 выполняется. В этом случае необходимые и достаточные условия для существования единственного стационарного решения GARCH(1,1) модели (7.10) всегда выполняются [99]. Из свойства момента устойчивых распределений также вытекает, что уравнение (7.11), где ε_0^2 – κ -устойчивая случайная величина, имеет единственный положительный корень, который меньше κ . Значит, если квадраты остатков являются κ -устойчивыми случайными величинами, то характер поведения «тяжелых хвостов» (7.12) и (7.13) модели GARCH(1,1) выполняется и поведения «хвостов» модели тяжелее, чем поведения «хвостов» ее остатков [79].

В данном разделе пишем $X \sim S_k(\sigma, \beta, \mu)$, $\kappa \in (0; 2]$, $\sigma > 0$, $\beta \in [-1; 1]$, $\mu \in R$, если X является κ -устойчивой случайной величиной с характеристической функцией вида (3.5).

Теорема 7.3. Если $X \sim S_\kappa(\sigma, \beta, 0)$, $\kappa \in (0; 2]$, то при всех p , $0 < p < \kappa$, имеем

$$E|X|^p = \frac{2\Gamma\left(1 - \frac{p}{\kappa}\right)}{\Gamma(1-p)} \cos\left(\gamma p \frac{\pi}{\kappa}\right),$$

где $\gamma = \beta K(\kappa)$.

Доказательство. Пусть $q_X(x, \kappa, \beta)$ обозначает функцию плотности распределения X . Тогда при $\kappa \neq 1$

$$\begin{aligned} q_X(-x, \kappa, -\beta) &= \int_R e^{ixt} \varphi_X(t) dt = \int_R e^{ixt} \exp\left\{-|t|^\kappa \exp\left[i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{\pi}{2} K(\kappa)\right]\right\} dt = \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-ixt} \exp\left\{-|t|^\kappa \exp\left[-i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{\pi}{2} K(\kappa)\right]\right\} dt = q_X(x, \kappa, \beta). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Подобным образом получим результат (7.14) для случая $\kappa = 1$. Для получения абсолютного момента порядка p достаточно найти представление для $q_X(x, \kappa, \beta)$, когда $x > 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} q_X(-x, \kappa, -\beta) &= q_X(x, \kappa, \beta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_R e^{ixt} \varphi_X(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ixt} \exp\left\{-t^\kappa e^{-i\beta \pi K(\kappa)/2}\right\} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp\left\{-itx - t^\kappa e^{-i\gamma \pi/2}\right\} dt, \end{aligned}$$

где $\gamma = \beta K(\kappa)$.

Известно, что

$$\int_0^\infty \exp\left\{-itx - t^\kappa e^{-i\gamma \pi/2}\right\} dt = -i \int_0^\infty \exp\left\{-tx - t^\kappa e^{-i\rho \pi}\right\} dt,$$

где $\rho = \frac{\gamma + \kappa}{2}$. Отсюда получим

$$q_X(x, \kappa, \beta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{im} \int_0^{\infty} \exp\{-tx - t^\kappa e^{-i\rho\pi}\} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_X(p, \kappa, \beta) &= \int_0^{\infty} x^p q_X(x, \kappa, \beta) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x^p \operatorname{im} \int_0^{\infty} \exp\{-tx - t^\kappa e^{-i\rho\pi}\} dt dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x^p e^{-tx} dx \operatorname{im} \int_0^{\infty} \exp\{-t^\kappa e^{-i\rho\pi}\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (tx)^p e^{-tx} d(tx) t^{-(p+1)} \operatorname{im} \int_0^{\infty} \exp\{-t^\kappa e^{-i\rho\pi}\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \Gamma(p+1) \operatorname{im} \int_0^{\infty} t^{-(p+1)} \exp\{-t^\kappa e^{-i\rho\pi}\} dt. \end{aligned}$$

Пусть $z = t^\kappa e^{-i\rho\pi}$, тогда $t = z^{1/\kappa} e^{-i\rho\pi/\kappa}$, $dz = \kappa t^{\kappa-1} e^{-i\rho\pi} dt$. Отсюда при всех $p < \kappa$

$$\begin{aligned} I_X(p, \kappa, \beta) &= \frac{1}{\pi} \Gamma(p+1) \operatorname{im} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa} t^{-(p+1)} e^{-z} t^{1-\kappa} e^{-i\rho\pi} dt = \\ &= \frac{1}{\kappa\pi} \Gamma(p+1) \operatorname{im} \int_0^{\infty} z^{-(p+\kappa)/\kappa} e^{-i\rho\pi p/\kappa} e^{-z} dt = \\ &= \frac{1}{\kappa\pi} \Gamma(p+1) \operatorname{im} \left(e^{-i\rho\pi p/\kappa} \right) \int_0^{\infty} z^{-p/\kappa-1} e^{-z} dt = \\ &= -\frac{1}{\kappa\pi} \Gamma(p+1) \sin\left(\frac{\rho\pi p}{\kappa}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{\kappa}\right) = \\ &= \frac{1}{p\pi} \sin\left(\frac{\rho\pi p}{\kappa}\right) \Gamma(p+1) \Gamma\left(1 - \frac{p}{\kappa}\right). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Из (7.14) и (7.15) имеем

$$\begin{aligned}
E|X|^p &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^p q(p, \kappa, \beta) dx = \int_{-\infty}^0 (-x)^p q_X(x, \kappa, \beta) dx + \int_0^{+\infty} (x)^p q_X(x, \kappa, \beta) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} (x)^p q_X(-x, \kappa, \beta) dx + \int_0^{+\infty} (x)^p q_X(p, \kappa, \beta) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} (x)^p q_X(x, \kappa, -\beta) dx + \int_0^{+\infty} (x)^p q_X(p, \kappa, \beta) dx = \\
&= I_X(p, \kappa, -\beta) + I_X(p, \kappa, \beta) = \\
&= \frac{1}{p\pi} \Gamma(p+1) \Gamma\left(1 - \frac{p}{\kappa}\right) \left[\sin\left(\frac{(\kappa-\gamma)p}{\kappa} \pi\right) + \sin\left(\frac{(\kappa+\gamma)p}{\kappa} \pi\right) \right] = \\
&= \frac{2\Gamma\left(1 - \frac{p}{\kappa}\right)}{\Gamma(1-p)} \cos\left(\gamma p \frac{\pi}{\kappa}\right).
\end{aligned}$$

Используя теорему 7.3 и уравнение (7.11) получим индекс регулярного изменения модели ARCH(1) с остатками, имеющими κ -устойчивое распределение, $\varepsilon_1^2 \sim S_\kappa(1, 0, 0)$,

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega_0 + \alpha_0 y_{t-1}^2, \quad t \in Z,$$

где $k = k_1$ является корнем следующего уравнения

$$(\alpha_0)^k \frac{2\Gamma\left(1 - \frac{k}{2\kappa}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{2}\right)} \cos\left(\gamma k \frac{\pi}{2\kappa}\right) = 1$$

где $\gamma = K(\kappa)$. Тогда получим результаты, приведенные в таблице.

Оценки индекса k_1

$\alpha_0 = 0,1$						
κ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k_1	0,719	0,9032	1,089	1,276	1,2969	1,272

$\alpha_0 = 0,2$						
κ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k_1	0,6192	0,785	0,953	1,125	1,3	1,3006
$\alpha_0 = 0,3$						
κ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k_1	0,687	0,653	0,649	0,648	0,6487	0,6495
$\alpha_0 = 0,4$						
κ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k_1	0,6502	0,596	0,64	0,7795	0,923	0,9212

7.3. Оценка Hill индекса «тяжелого хвоста» устойчивых распределений

Будем использовать оценку Hill для оценки «тяжелого хвоста» α -устойчивых распределений. Показано, что в случае устойчивых распределений модификация оценки Hill, предложенная С. Резником и С. Старица в работе [107], хуже.

Данные с особенностями «тяжелых хвостов» встречаются в разнообразных областях исследований, таких как гидрология, финансы, теория надежности [11; 58]. Популярной оценкой индекса «тяжелого хвоста» распределений случайных величин является статистика Hill [55].

Предположим, что $\{X_t\}_{t \in N}$ – стационарная случайная последовательность, для которой

$$P(X_t < x) = F(x), \quad t \in N,$$

где $F(x)$, $x \in R$, – функция распределения с «тяжелым хвостом», т. е.

$$1 - F(x) \sim x^{-\alpha} L(x), \quad \alpha > 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция; $\alpha > 0$ – индекс «тяжелого хвоста». Основная статистическая проблема состоит в том, чтобы оценить параметр α .

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – n последовательных наблюдений за случайным процессом $\{X_t\}_{t \in N}$ через равные промежутки времени. Перепишем наблюдения в виде $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, где

$$X_{(i)} \geq X_{(i+1)}, \quad i = \overline{1, (n-1)}.$$

Рассмотрим статистику

$$H_{k,n} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln \frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}}, \quad (7.16)$$

$k = \overline{1, (n-1)}$. Б. Хилл предложил для оценки индекса «тяжелого хвоста» α использовать статистику $\alpha_{k,n} = H_{k,n}^{-1}$ для $k = \overline{1, (n-1)}$.

Известно, что если $\{X_t\}_{t \in N}$ – независимые, одинаково распределенные случайные величины [89] удовлетворяют условию сильного перемешивания [109] или модели ARCH(1) [108], то оценка $H_{k,N}$ является состоятельной для параметра $\gamma = \alpha^{-1}$, т. е. всегда существует последовательность

$$k_n \rightarrow \infty, \quad k_n / n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (7.17)$$

при которой

$$H_{k_n, n} \xrightarrow{p} \gamma, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.18)$$

Это означает, что оценка Hill на некотором интервале значений k – асимптотически постоянная величина [89; 108].

Использование оценки Hill на практике вызывает затруднение, так как не ясно, как применить соотношения (7.17) и (7.18) и, следовательно, как выбрать k_n . Наиболее содержательным является исследование графика значений оценки Hill. На графике статистики $H_{k,n}^{-1}$ для оценивания параметра α выделяем устойчивую область. На практике сделать это часто затруднительно из-за поведения функции $H_{k,n}$ и того, что оценка Hill чувствительна к выбору k . Для решения этой проблемы С. Резник и С. Старица [107] предложили простой способ усреднения оценки Hill (avHill), суть которого состоит в нахождении оценки

$$avH_{k,n} := \frac{1}{(u-1)} \sum_{p=k+1}^{uk} H_{p,n}, \quad (7.19)$$

где $u = 2, 3, \dots$.

Преимущество данной модификации состоит в том, что путем усреднения оценки Hill удастся значительно уменьшить ее вариацию. Кроме того, значение k в сумме (7.19) меньше, чем в случае оценки Hill (7.16). Это уменьшает интервал графика для вычисления статистики и способствует выбору устойчивой области на нем. Однако эта модификация не всегда работает хорошо. Покажем, что в случае устойчивых распределений модификация С. Резник и С. Старица работает хуже, чем оценка Hill.

Сгенерируем 500 независимых наблюдений α -устойчивых случайных величин с $\alpha = 0,45$, $\alpha = 1,0$ и $\alpha = 1,4$. Проанализируем график значений $\{k, avH_{k,n}^{-1}, 1 \leq k \leq 250\}$ при $u = 2$ для модификации С. Резник и С. Старица, график значений $\{k, H_{k,n}^{-1}, 1 \leq k < 500\}$ – для оценки Hill. Определим оценку параметра α в устойчивой области.

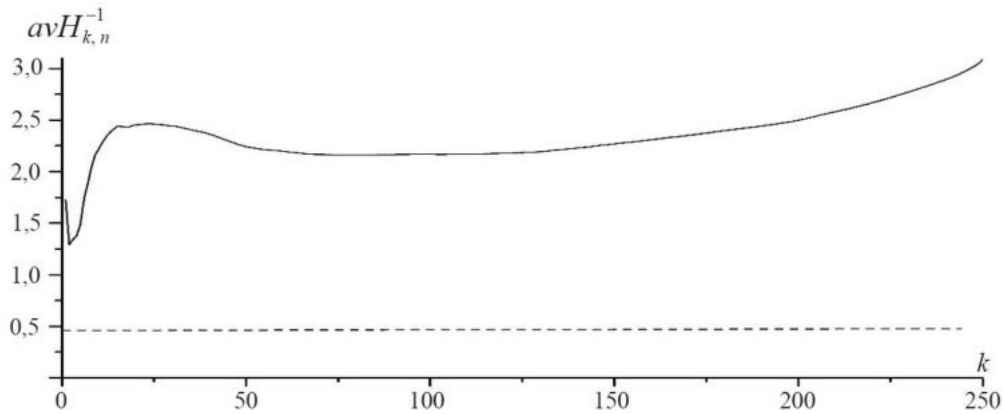


Рис. 7.1. График оценки avHill $\{k, avH_{k,n}^{-1}, 1 \leq k \leq 250\}$
 α -устойчивой случайной величины, $\alpha = 0,45$

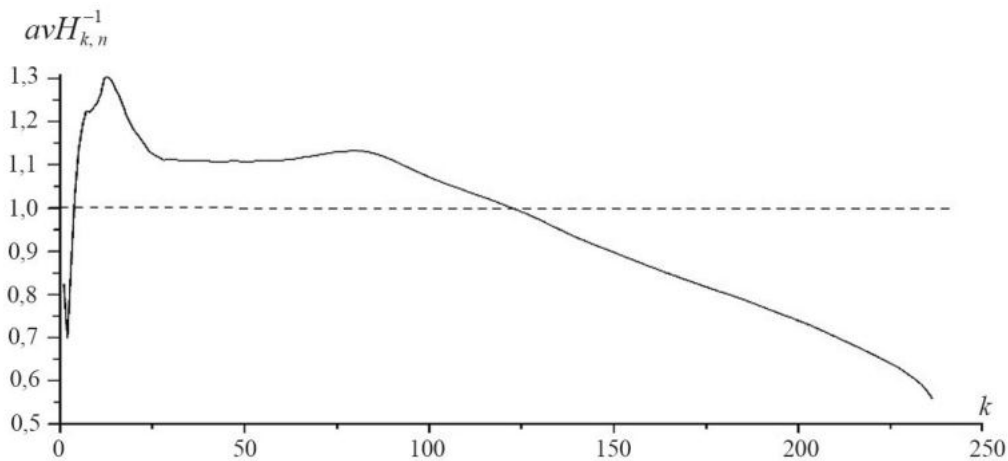


Рис. 7.2. График оценки avHill $\{k, avH_{k,n}^{-1}, 1 \leq k \leq 250\}$
 α -устойчивой случайной величины, $\alpha = 1$

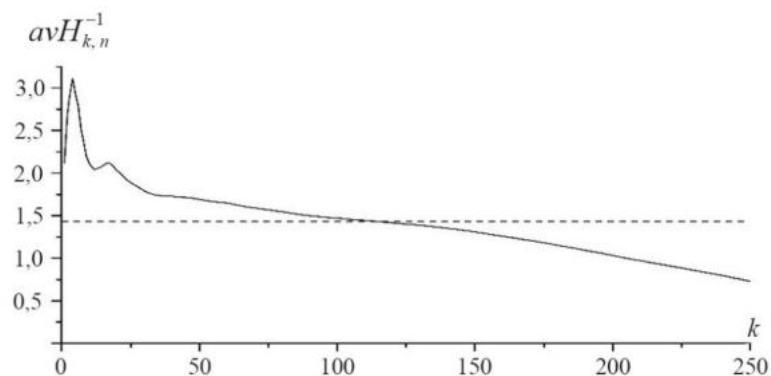


Рис. 7.3. График оценки avHill $\{k, avH_{k,n}^{-1}, 1 \leq k \leq 250\}$
 α -устойчивой случайной величины, $\alpha = 1,4$

На рис. 7.1–7.3 представлены оценки avHill для сгенерированных данных α -устойчивых случайных величин с $\alpha = 0,45$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 1,4$ соответственно. На этих графиках нет устойчивой области, поэтому нельзя определить оценку параметра α этих распределений.

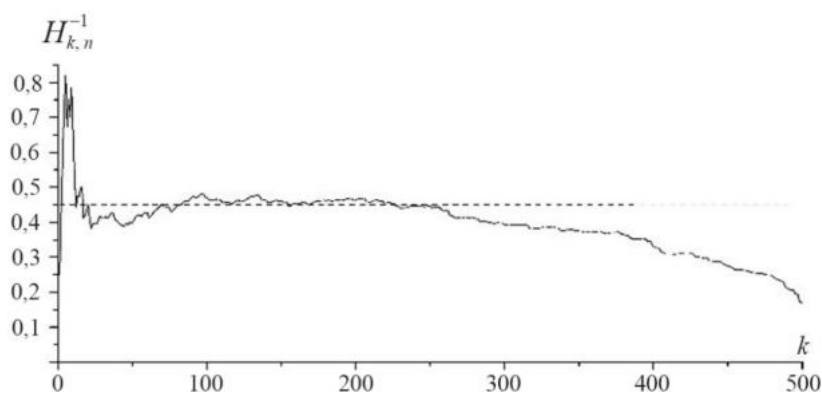


Рис. 7.4. График оценки Hill $\{k, H_{k,n}^{-1}, 1 \leq k < 500\}$
 α -устойчивой случайной величины, $\alpha = 0,45$

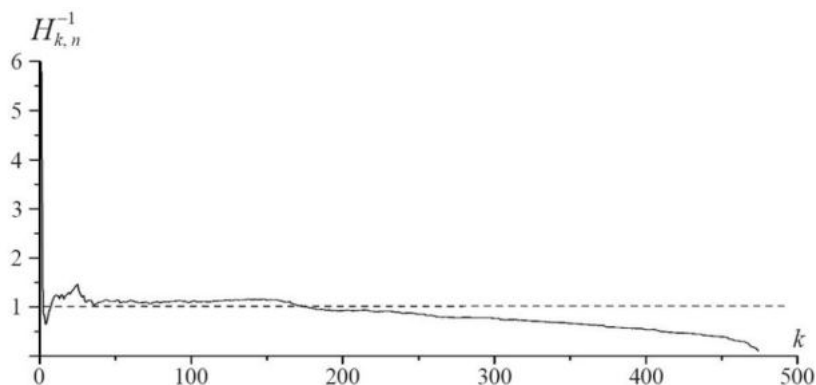


Рис. 7.5. График оценки Hill $\{k, H_{k,n}^{-1}, 1 \leq k < 500\}$
 α -устойчивой случайной величины, $\alpha = 1$

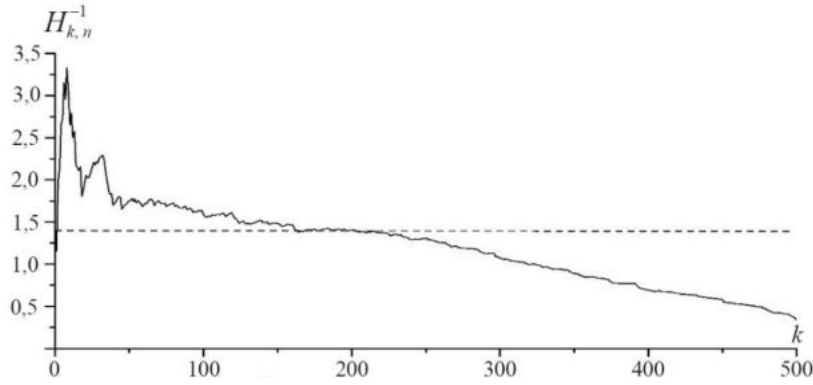


Рис. 7.6. График оценки Hill $\{k, H_{k,n}^{-1}, 1 \leq k < 500\}$
 α -устойчивой случайной величины, $\alpha = 1,4$

На графиках 7.4–7.6 представлены оценки Hill для независимых сгенерированных данных α -устойчивых случайных величин с $\alpha = 0,45$, $\alpha = 1$ и $\alpha = 1,4$ соответственно. На этих графиках достаточно широкие устойчивые интервалы для оценки параметра α , особенно в случаях $\alpha \leq 1$.

7.4. Поведение «тяжелых хвостов» процесса GARCH(1,1) с устойчивыми остатками

Рассмотрим процесс GARCH(1,1):

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t^2 = \omega + \alpha_0 y_{t-1}^2 + \beta_0 \sigma_{t-1}^2, t \in Z, \quad (7.20)$$

где $\{\varepsilon_t\}_{t \in Z}$ – независимые, одинаково распределенные α -устойчивые случайные величины; $\omega > 0, \alpha_0 > 0, \beta_0 \geq 0$.

Пусть $A_t = \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2, t \in Z$. Доказано, что процесс GARCH(1,1) имеет единственное стационарное решение тогда и только тогда, когда $E(\ln A_1) < 0$.

Рассмотрим стационарный процесс $\varepsilon_t \sim S_\alpha(1,0,0), \alpha \in (0; 2]$.

Если уравнение

$$EA_1^{k/2} = 1, k \in R, \quad (7.21)$$

имеет единственный положительный корень $k = k_0$, то процесс (7.20) является регулярно меняющимся процессом с индексом k_0 , т. е. существует такая положительная константа C_0 , что

$$P(\sigma > x) \sim C_0 x^{-k_0} \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (7.22)$$

и

$$P(|y| > x) \sim E|\varepsilon_0|^{k_0} P(\sigma > x) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (7.23)$$

Докажем, что в случае α -устойчивых остатков, $\alpha \in (0; 2]$, процесс GARCH(1,1) является регулярно меняющимся.

Теорема 7.4. При условии, что $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – α -устойчивые случайные величины, $\alpha \in (0; 2]$, процесс GARCH(1,1), определенный соотношением (7.20), является регулярно меняющимся процессом с некоторым индексом k_0 .

Доказательство. Действительно, если остатки $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ являются α -устойчивыми случайными величинами, то $\{A_t = \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – регулярно меняющиеся случайные величины с индексом $\alpha/2 \leq 1$. Всегда существует такая константа $h_0 > 0$, что $EA_1^h < \infty$ для всех $h < h_0$ и $EA_1^{h_0} = \infty$. Из условия $E(\ln A_1) < 0$ вытекает, что $EA_1 < 1$. Используя непрерывность функции $f(k) = EA_1^{k/2}$, получим, что уравнение

$$EA_1^{k/2} = 1, k \in \mathbb{R},$$

всегда имеет единственный положительный корень $k = k_0$. Если остатки $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – α -устойчивые случайные величины, то выполняются соотношения (7.22) и (7.23), т. е. $\{y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – регулярно меняющийся процесс с индексом k_0 .

Замечание 7.2. В случае, когда остатки $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ имеют стандартное нормальное распределение ($\alpha = 2$) и $\alpha_0 + \beta_0 = 1$ (процесс Integrated GARCH (IGARCH(1,1)), уравнение (7.21) имеет единственный корень $k = 2$, т. е. процесс IGARCH(1,1) является регулярно меняющимся процессом с индексом $k_0 = 2$:

$$P(\sigma > x) \sim C_0 x^{-2}, \quad P(|y| > x) \sim C_0 x^{-2} \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Итак, процесс IGARCH(1,1) с остатками $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, имеющими стандартное нормальное распределение, имеет свойство «тяжелых хвостов» с индексом $k = 2$.

Поскольку $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – α -устойчивые случайные величины, то $\{A_t = \beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$ являются регулярно меняющимися случайными величинами с индексом $\alpha/2$, поэтому $E(A_t)^k < \infty$ тогда и только тогда, когда $k < \alpha/2$. Таким образом, уравнение (7.21) имеет единственный корень $k = k_0 < \alpha$, т. е. «хвост» процесса GARCH(1,1) тяжелее, чем «хвост» остатков $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Следовательно, экстремальное поведение процесса GARCH(1,1) зависит от экстремального поведения остатков.

Однако отличие будет меньше в поведении «тяжелых хвостов» процесса GARCH(1,1) и остатков, когда индекс «тяжелых хвостов» остатков сходится к 2, особенно в случае процесса IGARCH(1,1). Действительно,

функция $f(k) = EA_1^{k/2} = E(\beta_0 + \alpha_0 \varepsilon_0^2)^{k/2}$ – непрерывная выпуклая, поэтому при $\alpha \rightarrow 2$ корень уравнения (7.21) сходится к корню уравнения $E(\beta_0 + \alpha_0 \xi^2)^{k/2} = 1$, где $\xi \sim N(0,1)$. В случае процесса IGARCH(1,1) с остатками, имеющими стандартное нормальное распределение, $E(\beta_0 + \alpha_0 \xi^2)^{k/2} = 1$ имеет единственный корень 2, т. е. индекс процесса IGARCH(1,1) k_0 сходится к 2 и совпадает с индексом «тяжелых хвостов» остатков $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ при $\alpha \rightarrow 2$.

Таким образом, экстремальное поведение процесса GARCH(1,1) похоже на экстремальное поведение остатков $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ при $\alpha \rightarrow 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М. : Мир, 1976. 755 с.
2. Ле Хонг Шон. М-оценка Хьюбера для процессов авторегрессии с симметричными устойчивыми остатками // Молодежь в науке – 2007 : прил. к журн. «Вес. Нац. акад. навук Беларусі». Минск : Белорус. наука, 2008. Ч. 3. С. 37–41.
3. Ле Хонг Шон, Труш Н. Н., Хунг Ч. Л. Некоторые свойства симметричных устойчивых случайных величин // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. № 1. С. 71–74.
4. Ле Хонг Шон, Труш Н. Н. Некоторые свойства α -устойчивых случайных величин // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 1. С. 102–109.
5. Ле Хонг Шон. Оценка параметров модели ARCH(q) с остатками, имеющими α -устойчивое распределение // X Республиканская научно-методическая конференция молодых ученых : тез. докл. междунар. мат. конф., Брест, 15–16 мая 2008 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. К. К. Красовского. Брест, 2008. С. 37.
6. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Минск : БГУ, 1999. 218 с.
7. Труш Н. Н., Гаджиева Л. Э. Оценки коэффициентов в параметрических моделях авторегрессии с устойчивыми возмущениями // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы междунар. науч. конф., Минск, 15–19 сент. 2008 г. / БГУ ; редкол.: Н. Н. Труш [и др.]. Минск, 2008. С. 344–348.
8. Труш Н. Н., Черноокый А. Л. Численное моделирование систем стохастических дифференциальных уравнений с устойчивыми возмущениями // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : материалы междунар. науч. конф., Минск, 15–19 сент. 2008 г. / БГУ ; редкол.: Н. Н. Труш [и др.]. Минск, 2008. С. 349–353.
9. Труш Н. Н., Орлова Е. Н. Статистические свойства периодограммы устойчивого случайного поля // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. № 2. С. 33–41.
10. Труш Н. Н., Ле Хонг Шон. Оценка параметров модели GARCH(1,1) с остатками, имеющими k -устойчивое распределение // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 1. С. 13–21.
11. Щетинин Е. Ю., Назаренко К. М. Математические модели и методы оценивания функций распределения экстремальных величин // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем : сб. науч. тр. М. : Янус-К, 2004. Вып. 7. С. 34–46.

12. Babillot M., Bougerol P., Elie L. The random difference equation $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ in the critical case // *Ann. Probab.* 1997. Vol. 25. P. 478–493.
13. Basrak B., Davis R. A., Mikosch T. A characterization of multivariate regular variation // *Ann. of appl. probab.* 2002. Vol. 12. P. 908–920.
14. Basrak B., Davis R. A., Mikosch T. Regular variation of GARCH processes // *Stochastic process appl.* 2002. Vol. 99, № 1. P. 95–115.
15. Berkes I., Horváth L. GARCH processes: Structure and estimation // *Bernoulli*. 2003. Vol. 9, № 2. P. 201–227.
16. Berkes I., Horváth L. The rate of consistency of the quasi-maximum likelihood estimator // *Statist. probab. lett.* 2003. Vol. 61. P. 133–143.
17. Berkes I., Horváth L. The efficiency of the estimators of the parameters in GARCH processes // *Ann. of statist.* 2004. Vol. 32, № 2. P. 633–655
18. Billingsley P. Convergence of probability measure. N. Y. : Wiley, 1968. 253 p.
19. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1987. 494 p.
20. Birkhoff G. D. Proof of the ergodic theorem // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1931. Vol. 17. P. 656–660.
21. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *J. Polit economy*. 1973. Vol. 81. P. 637–654.
22. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // *J. Econometrics*. 1986. Vol. 31. P. 307–327.
23. Bollerslev T., Wooldridge J. M. Quasi Maximum likelihood estimation and inference in Dynamic models with time varying covariances // *Econometric reviews*. 1992. Vol. 11. P. 143–172.
24. Bougerol P., Picard N. Strict stationarity of generalized autoregressive processes. // *Ann. of probab.* 1992. Vol. 20. P. 1714–1730.
25. Bougerol P., Picard N. Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series // *J. Econometrics*. 1992. Vol. 52. P. 115–127.
26. Boussama F. Ergodicité, mélange et estimation dans le modèles GARCH: ph.d. thesis. Paris, 1998. 124 p.
27. Brandt A. The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients // *Adv. appl. probab.* 1986. Vol. 18. P. 211–220.
28. Breiman L. On some limit theorems similar to the arc-sin law // *Theory probab. appl.* 1965. Vol. 10. P. 323–331.
29. Chao Li. On estimation of GARCH models with an application to Nordea stock prices [Electronic resource] // U.U.D.M. project report, 99-0465669-X. 2007. URL: <http://www.math.uu.se/research/pub/Li1.pdf> (date of access: 25.08.2008).

30. Cline D. B. H. Consistency of least squares regression estimators with infinite variance data // *J. of Statistical Planning and Inference*. 1989. Vol. 23. P. 163–179.
31. Cline D. B. H., Brockwell P. J. Linear prediction of ARMA processes with infinite variance // *Stochastic processes and their applications*. 1985. Vol. 19. P. 218–296.
32. Davis R. A., Knight J., Liu J. M-estimation for autoregressions with infinite variance // *Stochastic processes and their applications*, North-Holland. 1992. Vol. 40. P. 145–180.
33. Davis R. A., Mikosch T. The sample autocorrelations of heavy-tailed processes with applications to ARCH // *Ann. of statist.* 1998. Vol. 26. P. 2049–2080.
34. Davis R. A., Resnick S. Limit theory for moving averages of random variables with regularly varying tail probabilities // *Ann. of probab.* 1985. Vol. 13. P. 179–195.
35. Davis R. A., Wu Wei. Bootstrapping M-estimates in regression and autoregression with infinite variance // *Statistica Sinica*. 1997. Vol. 7. P. 1135–1154.
36. Doob J. L. *Stochastic processes*. Wiley : N. Y., 1953. 651 p.
37. Doukhan P. *Mixing: properties and examples* // *Lecture notes in statistics* 85. N. Y. : Springer Verlag, 1994. 142 p.
38. Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer : Berlin, 1997. 655 p.
39. Engle R. F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. P. 987–1008.
40. Engle R. F., Gonzalez G. Semiparametric ARCH models // *J. of economics and business statistics*. 1991. Vol. 9. P. 345–359.
41. Fama E. The behavior of stock market prices // *J. Bus.* 1965. Vol. 38. P. 34–105.
42. Feldheim E. *Etude de la stabilité des lois de probabilité* // Ph. d. thesis Faculté des Sciences de Paris. Paris, 1973. 139 p.
43. Feller W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications* : in 2 vol. NY : John Wiley & Sons, 1971. Vol. 2. 669 p.
44. Franke J., Hardle W., Hafner C. *Statistics of financial market*. Cham : Springer Verlag, 2004. 453 p.
45. Franq C., Zakoian J. W. Estimating weak GARCH representations. // *Econometric theory*. 2000. Vol. 16. P. 692–738.
46. Furstenbers H., Kesten H. Products of random matrices // *Ann. math. statist.* 1960. Vol. 31. P. 457–469.
47. Giraitis L., Robinson P. M. Whittle estimation of ARCH models // *Econometric theory*. 2001. Vol. 17. P. 608–631.

48. Goldie C. M. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations // *Ann. of appl. probab.* 1991. Vol. 1. P. 126–166.
49. Goldsheid I.Ya. Lyapunov exponents and asymptotic behaviour of the product of random matrices // *Lecture Notes in Math.* Berlin : Springer, 1991. Vol. 1486. P. 23–37.
50. Gouriéroux C. ARCH models and financial applications. N. Y. : Springer-Verlag, 1997. 228 p.
51. Gouriéroux C., Jasiak J. Financial econometrics: problems, models and methods. Princeton : Princeton Univ. Press, 2001. 464 p.
52. Gross S., Steiger W. L. Least absolute deviation estimates in autoregression with infinite variance // *J. Appl. Probab.* 1979. Vol. 6. P. 768–783.
53. Hall P., Heyde C. C. Martingale limit theory and its application. N. Y. : Academic Press, 1980. 308 p.
54. Hall P., Yao Q. Inference in ARCH and GARCH models with heavy-tailed errors // *Econometrica*. 2003. Vol. 71, № 1. P. 285–317.
55. Hill B. A simple approach to inference about the tail of a distribution // *Ann. statis.* 1975. Vol. 3, № 5. P. 1163–1174.
56. Heath S., Resnick S., Samorodnitsky G. Heavy tails and long range dependence in ON/OFF processes and associated fluid models // *Math. Oper. Res.* 1998. Vol. 23. P. 145–165.
57. Hols M. C. A. B., de Vries C. G. The limiting distribution of extremal exchange rate returns // *J. of applied econometrics*. 1991. Vol. 6. P. 287–302.
58. Hsing T. On tail estimation using dependent data // *Ann. statis.* 1991. Vol. 19. P. 1547–1569.
59. Ibragimov I. A., Has'minskii R. Z. Statistical estimation: Asymptotic theory. N. Y. : Springer, 1981. 403 p.
60. Iglesias E. Estimation of Tail Thickness Parameters from GARCH Models [Electronic resource]. URL: http://www.indiana.edu/~econdept/workshops/Fall_2007_Papers/Iglesias_iltail59.pdf (date of access: 03.07.2008).
61. Janicki A., Weron A. Simulation and Chaotic Behavior of α -Stable Stochastic Processes. N. Y. : Marcel Dekker, 1994. 376 p.
62. Janicki A., Weron A. Can one see alpha stable variables and processes? // *Stat. Sci.* 1994. Vol. 9. P. 109–126.
63. Jeantheau T. Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models // *Econometric theory*. 1998. Vol. 14. P. 70–86.
64. Jessen A. H., Mikosch T. Regularly varying functions // *Publications de L'Institut Mathématique*. 2006. Vol. 80(94). P. 171–192.
65. Kallenberg O. Random measures. Berlin : Akademie-Verlag, 1983. 475 p.

66. Karamata J. Sur un mode de croissance régulière des fonctions // *Mathematica (Cluj)*. 1930. Vol. 4. P. 38–53.
67. Kesten H. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices // *Acta Math.* 1973. Vol. 131. P. 207–248.
68. Kingman J. F. C. Subadditive ergodic theory // *Ann. of probab.* 1973. Vol. 1. P. 883–909.
69. Knight K. Asymptotics for L_1 regression estimators under general conditions [Electronic resource]. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.8.1958> (date of access: 03.12.2007).
70. Knight K. Limiting distributions for L_1 regression estimators under general conditions // *Ann. of statist.* 1998. Vol. 26, № 2. P. 755–770.
71. Koedijk K. G., Schafgans M. M., de Vries C. G. The tail index of exchange rate returns // *J. of international economics*. 1990. Vol. 29. P. 93–108.
72. Kokoszka P. S., Taqqu M. S. Parameter estimation for infinite variance stable ARMA processes // *J. of time series analysis*. 1994. Vol. 15. P. 203–220.
73. Kokoszka P. S., Taqqu M. S. Parameter estimation for infinite variance fractional ARIMA // *Ann. of statist.* 1996. Vol. 24. P. 1880–1913.
74. Kristensen D., Linton O. A closed-form estimator for the GARCH(1,1) model // *Econometric theory*. 2006. Vol. 22(2). P. 323–327.
75. Lee S.W., Hansen B. Asymptotic theory for the GARCH(1,1) quasi-maximum likelihood estimator // *Econometric theory*. 1994. Vol. 10. P. 29–53.
76. On the self-similar nature of Ethernet traffic / W. E. Leland [et al.] // *ACM/SIGCOMM Computer Communications Review*. 1993. P. 183–193.
77. Le Hong Son, Trough N. N. Consistency and asymptotic distribution of parameter estimators in ARCH/GARCH models with regularly varying errors // *Х Белорус. мат. конф. : тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С. Г. Красовский [и др.]. Минск, 2008. С. 28–29.*
78. Le Hong Son. Parameters estimation of GARCH(1,1) process with regularly varying tailed errors // *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения : междунар. науч. конф., Минск, 15–19 сент. 2008 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: Н. Н. Труш [и др.]. Минск, 2008. С. 407–411.*
79. Le Hong Son, Komarov I. I. Tail index estimation for ARCH(1) process with heavy-tailed errors // *Х Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. / Ин-т математики НАН Беларуси ; редкол.: С. Г. Красовский [и др.]. Минск, 2008. С. 27–28.*
80. Levy P. An introduction to GARCH models in finance // *Financial engineering news*. 2001. Vol. 22. P. 81–102.

81. Ling S., McAleer M. Stationarity and the existence of moments of a family of GARCH processes // J. Econometrics. 2002. Vol. 106. P. 109–117.
82. Ling S., McAleer M. Asymptotic theory for a new vector ARMA-GARCH model // Econometric theory. 2003. Vol. 19. P. 280–310.
83. Lukacs E., Linton B. Characteristic Functions. London : Charles Griffin, 1960. 216 p.
84. Lumsdaine R. Finite-sample properties of the maximum likelihood estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) models: A Monte Carlo investigation // J. of business and economic statistics. 1995. Vol. 13. P. 1–10.
85. Lumsdaine R. Consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator in IGARCH(1,1) and covariance stationary GARCH(1,1) models // Econometrica. 1996. Vol. 64. P. 575–596.
86. Maercker G., Moser M. Yule-Walker type estimators in GARCH(1,1) models: Asymptotic normality and bootstrap [Electronic resource]. URL: <http://statlab.uni-heidelberg.de/reports/TitlesByAuthor.html> (date of access: 12.07.2007).
87. Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // J. Bus. – 1959. Vol. 36. P. 394–419.
88. Markowitz H. Portfolio selection: efficient diversification of investments. N. Y. : Wiley, 1959. 400 p.
89. Mason D. Laws of large numbers for sums of extreme values // Ann. of probab. 1982. Vol. 10, № 3. P. 754–764.
90. Mikosch T. Regular Variation, Subexponentiality and Their Applications in probability Theory [Electronic resource]. URL: <http://www.eurandom.nl/reports/1999/013TMreport.pdf> (date of access: 14.11.2007).
91. Mikosch T. Parameter estimation for infinite variance time series // Ann. of statist. 1995. Vol. 23. P. 305–326.
92. Is network traffic approximated by stable Lévy motion of fractional Brownian motion? / T. Mikosch [et al.] // Ann. of appl. probab. 2002. Vol. 12. P. 23–68.
93. Mikosch T., Straumann D. Whittle estimation in a heavy-tailed GARCH(1,1) model // Stochastic processes and their applications. 2002. Vol. 100. P. 187–222.
94. Mikosch T., Straumann D. Stable limits of martingale transforms with application to the estimation of GARCH parameters // Ann. of statist. 2006. Vol. 34, № 1. P. 493–522.
95. Mikosch T., Stărică C. Limit theory for the sample autocorrelations and extremes of a GARCH(1,1) process // Ann. of statist. 2000. Vol. 28, № 5. P. 1427–1451.
96. Mittnik S., Rachev S. T., Paolella M. S. Stable Paretian modeling in finance: some empirical and theoretical aspects, in a practical guide to heavy tails

[Electronic resource]. URL: <http://www.pstat.ucsb.edu/faculty/rachev/publ/node1.html> (date of access: 03.12.2006).

97. Mittnik S., Rachev S. T. Stable Paretian models in Finance. N. Y. : Wiley, 2000. 874 p.

98. Mokkadem A. Propriétés de mélange des processus autoregrésifs polynomiaux // Ann. inst. H. Poincaré probab. statis. 1990. Vol. 26. P. 219–260.

99. Nelson D. Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model // Econometric theory. 1990. Vol. 6, № 3. P. 318–334.

100. Nikias C., Shao M. Signal processing with alpha stable distributions and applications. N. Y. : Wiley, 1995. 184 p.

101. Nolan J. P. Multivariate stable densities and distribution functions: general and elliptical case // Deutsche Bundesbank's 2005 Annual Fall Conference, 2005. Deutsche, 2005. 352 p.

102. Osborne M. F. M. Brownian motion in the stock market [Electronic resource] // Cootner editor. Cambridge, MIT Press. URL: <http://www.e-m-h.org/Osbo59.pdf> (date of access: 24.08.2008).

103. Patton A. J. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies // J. of econometrics. 2011. Vol. 160(1). P. 246–256.

104. Posedel P. Properties and estimation of GARCH(1,1) model // Metodoloski zvezki. 2005. Vol. 2, № 2. P. 243–257.

105. Resnick S. I. Point processes, regular variation and weak convergence // Adv. appl. prob. 1986. Vol. 18. P. 66–138.

106. Resnick S. I. Extreme values, regular variation and point processes. N. Y. : Springer-Verlag, 1987. 320 p.

107. Resnick S., Stărică C. Smoothing the Hill estimator // J. appl. probab. 1996. Vol. 33. P. 139–167.

108. Resnick S., Stărică C. Tail index estimation for dependent data // Ann. appl. probab. 1998. Vol. 8, № 4. P. 1156–1183.

109. Rootzen H., Leadbetter M., de Haan L. Tail and quantile estimation for strongly mixing stationary sequences [Electronic resource]. URL: <http://ideas.repec.org/p/fth/erroem/9024-a.html> (date of access: 09.05.2008).

110. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable Non – Gaussian Random Processes. N. Y. : Chapman & Hall, 1994. 670 p.

111. Samuelson P. A. Mathematics of speculative prices // SIAM Rev. 1973. Vol. 15. P. 1–42.

112. Stărică C. The Tales of GARCH(1,1) Processes Tell. Gothenburg : Chalmers Univ., 1999. 531 p.

113. Straumann D. Estimation in conditionally heteroscedastic time series models // Lecture notes in statistics 181. Berlin : Springer, 2005. 228 p.

114. Stout W. F. Almost sure convergence. N. Y. : Acad. press, 1974. 381 p.
115. Taylor S. J. Modelling financial time series. Chichester : John Wiley, 1989. 268 p.
116. Trough N. N., Hong Son Le, Komarov I. I. Estimations of heavy-tailed index of stable distributions // The Fifth International Workshop “Computer Algebra Systems in Teaching and Research” (CASTR'2009), Siedlce, Poland, 28–31 Jan. 2009 г. Siedlce, 2009. P. 90–96.
117. Trough N. N., Hong Son Le. Some properties of absolute order p of α -stable random variables // Proceedings of the Eighth International Conference of Computer Data Analysis And Modeling, Minsk, 11–15 Sept. 2007 / BSU ; ed.: V. Strazhev [et al.]. Minsk, 2007. P. 225–228.
118. Trough N. N., Hong Son Le. The estimations of the parameters in GARCH(1,1) models with regularly varying innovations // Barcelona Conference on Asymptotic Statistics, Barcelona, Sept. 1–5, 2008 / Centre de recerca mathematica Bellaterra ; ed.: V. Zaiats. Barcelona, 2008. P. 118–119.
119. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and Stability. Utrecht : VSP, 1999. 570 p.
120. Vervaat W. On a stochastic differential equation and a representation of a non-negative infinitely divisible random variables // Adv. appl. prob. 1979. Vol. 11. P. 750–783.
121. Wagner N., Marsh T. A. Measuring tail thickness under GARCH and an application to extreme exchange rate changes // J. of empirical finance. 2005. Vol. 12. P. 165–185.
122. Weiss A. Asymptotic theory for ARCH models: Estimation and testing // Econometric theory. 1986. Vol. 2. P. 107–131.
123. Weron R. Levy-stable distributions revisited: Tail index > 2 does not exclude the Levy-stable regime // International J. of modern physics. 2001. Vol. 12. P. 209–223.
124. Weron R. Computationally intensive Value at Risk calculations // Handbook of Computational Statistics. Berlin : Springer, 2004. P. 911–950.
125. Yao Q., Liang P. Least absolute deviations estimation for ARCH and GARCH Models // Biometrika. 2003. Vol. 90, № 4. P. 967–975.
126. Yohai V. J., Maronna R. A. Asymptotic behavior of least-squares estimates for autoregressive processes with infinite variances // Ann. of statist. 1977. Vol. 5, № 3. P. 554–560.
127. Zolotarev V. M. One-Dimensional Stable Distributions. Providence : Amer. Math. Soc. press, 1986. 284 p.