

# БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**УТВЕРЖДАЮ**

Ректор Белорусского  
государственного университета

\_\_\_\_\_ А.Д.Король

08 июня 2024 г.

Регистрационный № 1659/м.



## **ADVANCED MATHEMATICAL MODELLING**

Учебная программа учреждения образования  
по учебной дисциплине для специальности

**7-06-0533-06 Mechanics and Mathematical Modelling**

Profiling: Theoretical and Applied Mechanics

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 7-06-0533-06-2023 и учебного плана № М54а-5.4-114/уч. от 11.04.2023.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Л. А. Пилипчук** – доцент кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕЦЕНЗЕНТ:**

**М. П. Дымков** – профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета, доктор физико-математических наук.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой теоретической и прикладной механики  
механико-математического факультета БГУ  
(протокол № 12 от 28.05.2024)

Научно-методическим советом БГУ  
(протокол № 8 от 31.05.2024)

Заведующий кафедрой



М.А. Журавков

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цель учебной дисциплины** – создание базы для освоения основных идей и методов современной механики и математики, подготовка высококвалифицированных специалистов, способных ставить и решать задачи из различных областей науки и техники. Формирование установки на творческую профессиональную деятельность; развитие профессионального мышления, которое обеспечило бы будущему специалисту возможность свободно оперировать профессиональными знаниями, видеть проблемы и оптимальные пути их решения в самостоятельной практической деятельности.

### Задачи учебной дисциплины:

– ознакомление магистрантов с основными методами и современными информационными технологиями математического моделирования для решения прикладных задач математического программирования и оптимизации;

– формирование навыков решения прикладных задач с использованием моделей разреженного матричного анализа, математического программирования и оптимизации;

– использование комплексного подхода к анализу методов и современных информационных технологий математического моделирования для решения прикладных задач разреженного матричного и сетевого анализа и оптимизации.

– моделирование процессов оценки потоков в интеллектуальных транспортных системах, алгоритмы декомпозиции разреженных систем линейных алгебраических уравнений и их приложения в потоковых моделях.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с углубленным высшим образованием (магистра).

Дисциплина «Advanced mathematical modelling» посвящена изучению математических подходов, методов, вычислительных алгоритмов и технологий конструктивной теории декомпозиции для разработки численных методов разреженного матричного анализа для установления полной наблюдаемости сетей большой размерности, математическим моделям задач линейной оптимизации с неточными данными, разработке пользовательских программ в системе Wolfram Mathematica, основанных на основных положениях математического моделирования для решения научных и практических задач;

Учебная дисциплина относится к модулю «Mathematical modelling in Engineering» компонента учреждения образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных связей и программ по дисциплинам: «Partial differential equations», «Integral transforms and complex variable functions» «Continuum mechanics» и «Mechanics of advanced materials».

### **Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Advanced mathematical modelling» должно обеспечить формирование следующей **специализированной компетенции**:

SC. Use devices, equipment, tools and equipment to achieve experimental verification of the result, the goals set for the problems to be solved in modern experimental mechanics.

В результате освоения учебной дисциплины «Advanced mathematical modelling» магистрант должен:

#### **знать:**

– проблематику составления сетевых моделей и постановки задач математического программирования;

– проблематику составления алгоритмов решения прикладных задач математического программирования с использованием сетевых моделей и современных технологий создания их численных методов;

#### **уметь:**

– составлять алгоритмы для решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений, описывающих основные ограничения сетевых моделей задач математического программирования;

– получать аналитические и численные решения систем линейных алгебраических уравнений для различных типов разреженности сетевых задач и проводить анализ полученных результатов;

– проводить анализ полученных результатов при решении линейных и нелинейных задач математического программирования с неточными входными данными;

#### **иметь навык:**

– подходами к решению задач математического программирования и оптимизации большой размерности

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Advanced mathematical modelling» отведено:

– для очной формы получения углубленного высшего образования: 90 часов, в том числе 36 аудиторных часа, из них: лекции (в том числе дистанционно) – 18 часов, лабораторные (в том числе дистанционно) – 18 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

## SYLLABUS

### Chapter 1. The sensor location problem of estimating flow on the unobserved part of a bidirectional network

#### *Theme 1.1 The problem of minimizing the size of a set of monitored nodes*

Strategies for identifying the location of special programmable devices (sensors) in the nodes a bidirectional network. Collecting, processing, analyzing information about the flow function. NP - complete problem of minimizing the set of monitored nodes.

#### *Theme 1.2 Modeling the unmonitored part of the bidirectional graph*

Modeling the linear system of the unmonitored part of the bidirectional network. Unique solution. Optimal solutions. Methods and technologies of decomposition flows. Algorithms and technologies for constructing analytical and numerical solutions in the sensor location problem.

#### *Theme 1.3 Problem of constructing the fully monitored network.*

Suboptimal solutions for a bidirectional graph. Constructing the fully monitored network. Development of new approaches, strategies, technologies and algorithms for a fully monitored network.

#### *Theme 1.4 Implementation of numerical methods for establishing full network observability*

Conditions for the effective applicability of exact methods for solving the flow estimation problem on the unobservable part of a bidirectional network. Implementation of algorithmic, structural and technological solutions for problem of constructing the fully monitored network with using the system Wolfram Mathematica

### Chapter 2. Sparse matrix analysis and technologies

#### *Theme 2.1 General solution for the network part of the underdetermined sparse system of linear algebraic equations*

Underdetermined sparse systems of linear algebraic equations a special type with a large sparse submatrix with the embedded network structure. Distinguishing between the network part of the system and additional part. Finding the correspondence between the columns of a basis minor and a family of spanning trees for the network part of the system. Technology compute a basis of a solution space (characteristic vectors) of the corresponding homogeneous system. Construction of a general solution for the network part of the underdetermined sparse system.

#### *Theme 2.2 Decomposition of the underdetermined sparse system of linear algebraic equations*

Performing column decomposition of the system by separating the variables according to the sets of the arcs of the basis for the network part of the system, cyclic arcs and non-basis/non-cyclic arcs. Efficient algorithms for constructing basis graphs, basis spatial solutions, and particular solutions with using rooted trees. Implementation

in the system Wolfram Mathematica the methods of decomposition of the underdetermined sparse systems of linear algebraic equations.

***Theme 2.3 Technologies for solution of large linear systems with embedded network structure in the sensors location problem***

Construction of a general solution for the network part of the underdetermined sparse system with using algorithmic graph theory. Efficient algorithms and technology for computing the basis of the solution space. Implementation of algorithmic, structural and technological solutions of sparse systems with using the computer algebra system Wolfram Mathematica.

**Chapter 3. Mathematical models of linear optimization problems with inaccurate data**

***Theme 3.1. Modeling the optimal parameters of the objective function***

Mathematical models of linear optimization problems in finite-dimensional spaces. Feasible solution. Mathematical models of inverse problems in accordance with the selected norm. Modeling the optimal values parameters of the objective function Formation of new coefficients of the objective function for which the given feasible solution is optimal. Models, methods, algorithms and technologies for solving inverse problems of changing the parameters of the objective function with using the computer modeling system Wolfram Mathematica.

***Theme 3.2. Modeling the parameters of lower and upper bounds***

Mathematical models of inverse linear optimization problems for modeling the parameters of lower and upper bounds in accordance with the chosen norm, Partially feasible solution. Feasible solution. Modeling the parameters of lower and upper bounds. Models, methods, algorithms and technologies for solving inverse problems of changing the parameters of the lower and upper bounds with using the computer modeling system Wolfram Mathematica.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>1</b>	<b>The sensor location problem of estimating flow on the unobserved part of a bidirectional network</b>	<b>8</b>			<b>8</b>			
1.1	The problem of minimizing the size of a set of monitored nodes	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
1.2	Modeling the unmonitored part of the bidirectional graph	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
1.3	Problem of constructing the fully monitored network.	2			2			Вопросы для самопроверки,

								устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
1.4	Implementation of numerical methods for establishing full network observability	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
<b>2</b>	<b>Sparse matrix analysis and technologies</b>	<b>6</b>			<b>6</b>			
2.1	General solution for the network part of the underdetermined sparse system of linear algebraic equations	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
2.2	Decomposition of the underdetermined sparse system of linear algebraic equations	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
2.3	Technologies for solution of large linear systems with embedded network structure in the sensors location problem	2			2			Вопросы для самопроверки,

								устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
<b>3</b>	<b>Mathematical models of linear optimization problems with inaccurate data</b>	<b>4</b>			<b>4</b>			
3.1	Modeling the optimal parameters of the objective function	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
3.2	Modeling the parameters of lower and upper bounds	2			2			Вопросы для самопроверки, устный опрос, решение задач, отчет по лабораторной работе
	<b>Итого</b>	<b>18</b>			<b>18</b>			

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Основная литература

1. Gabasov R., Kirillova F.M. Linear programming methods. Part 3. Special problems. – М.: URSS, 2018. – 368 p.
2. Pilipchuk. L. A. Sparse Linear Systems and Their Applications. – Minsk: BSU, 2013. – 235 p.
3. Ahuja, R.K. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications / R.K. Ahuja, T.L.Magnanti, J.B. Orlin. – New Jersey: Prentice Hall, 1993. – 864 p.
4. Linear optimization problems with inaccurate data / M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik [etc.], – М.: URSS, 2008. – 286 p.

### Дополнительная литература

5. Pissanetski S. Sparse matrix technology. – М.: Mir, 1988. – 416 p.
6. Pilipchuk. L.A., German O.V, Pilipchuk. A.S. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph / L. A. Pilipchuk, O. V. German, A. S. Pilipchuk // Vestnik BSU. 2015. Ser. 1. Fizika. Matematika. Informatika. No. 2. P. 91–96.
7. Pilipchuk, L.A. Sparse linear systems: theory of decomposition, methods, technology, applications and implementation in Wolfram Mathematica / L.A. Pilipchuk, A.S. Pilipchuk // American Institute of Physics. AIP Conf. Proc. Vol. 1690, 060006 (2015); doi: 10.1063/1.4936744. 9 p.
8. Jensen P.A., Barnes J.W. Network flow programming. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1980.

### Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций магистрантов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений магистрантов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Диагностика результатов учебной деятельности по дисциплине «Advanced mathematical modelling» проводится, как правило, во время аудиторных занятий. Для диагностики используются:

- вопросы для самопроверки;
- устный опрос;
- отчеты по лабораторным работам;
- решение задач.

Отметка за ответы на лекциях (опрос) и лабораторных занятиях включает в себя полноту ответа, наличие аргументов, примеров из практики.

Контрольные мероприятия проводятся в соответствии с учебно-методической картой дисциплины.

Для магистрантов, пропустивших контрольные мероприятия или получивших неудовлетворительную отметку, решение о повторном проведении контрольного мероприятия выносится в соответствии с Положением о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Advanced mathematical modelling» учебным планом предусмотрен **зачет**.

Для формирования итоговой отметки по учебной дисциплине используется модульно-рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущей и промежуточной аттестации студентов по учебной дисциплине.

Формирование итоговой отметки в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации (примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущей аттестации в отметку при прохождении промежуточной аттестации):

- ответы на устный опрос – 10 %;
- решение задач – 20 %;
- отчет по лабораторной работе – 70 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе итоговой отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) - 40% и экзаменационной отметки - 60%.

### **Примерный перечень лабораторных занятий**

**Theme 1.1.** The problem of minimizing the size of the set of monitored nodes in the sensor location problem (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 1.2.** Modeling the unmonitored part in the bidirectional graphs (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 1.3.** Problem of constructing the fully monitored network (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 1.4.** Implementation of numerical methods for establishing full network observability (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 2.1.** General solution for the network part of the underdetermined sparse system of linear algebraic equations (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 2.2.** Decomposition of the underdetermined sparse system of linear algebraic equations (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 2.3.** Technologies for solution of large linear systems with embedded network structure in the sensor location problem (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 3.1.** Modeling the optimal parameters of the objective function in linear mathematical models of optimization problems with inaccurate data (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

**Theme 3.2.** Modeling the parameters of lower and upper bounds in mathematical models with inaccurate data (2 ч.)

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

### **Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих формирование профессиональных компетенций.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

#### **1. Самостоятельная работа в процессе работы с литературой.**

Просмотрите конспект сразу после занятий. Пометьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания.

Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя предлагаемую литературу.

Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь на ближайшей лекции за помощью к преподавателю.

Каждую неделю рекомендуется отводить время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

#### **2. Самостоятельная работа по составлению конспекта.**

1. Соберите литературу по теме. Изучите тот источник, где она изложена наиболее полно и на современном уровне.

2. По этому источнику составьте подробный план с указанием страниц

книги, относящихся к определенному пункту плана.

3. Изучите другие источники. Если в них встречается материал по уже имеющемуся пункту плана, запишите в плане и новый источник с указанием страниц. Если же в другом источнике материал раскрывает тему с другой стороны, добавьте еще пункт плана.

4. Проанализировав всю литературу, собранную по теме, вы получите окончательный план, по которому можно писать конспект, объединяя по пунктам материал из разных источников.

5. Отредактируйте составленный вами конспект, внимательно прочтите его и подумайте: - удовлетворяет ли вас его общий план; - хорошо ли воспринимается смысловая, логическая связь между отдельными элементами содержания; - удачно ли использованы цитаты, правильно ли установлена связь между оборотами речи и фразами; - верно ли поставлены знаки препинания в цитатах.

### **3. Подготовка к лабораторным занятиям**

Назначение лабораторных занятий - углубление и проработка теоретического материала предмета путем регулярной и планомерной самостоятельной работы студентов на протяжении всего курса. Непосредственное проведение лабораторного занятия предполагает: решение задач и упражнений по образцу; проведение анализа результатов; систематизацию материала и подготовка отчета о проведенной работе.

#### *Инструкция:*

Изучите нормативные документы, обязательную и дополнительную литературу по рассматриваемому вопросу.

прочтите конспект лекции по теме.

Внимательно изучите порядок выполнения индивидуальной практической работы или алгоритм, представленный преподавателем.

### **4. Подготовка к зачету**

Внимательно прочитайте материал по конспекту, составленному на учебном занятии.

Прочитайте тот же материал по учебнику, учебному пособию.

Постарайтесь разобраться с непонятными, в частности новыми терминами. Часто незнание терминологии мешает воспринимать материал на занятиях на должном уровне.

Ответьте на контрольные вопросы для самопроверки, имеющиеся в учебнике.

Кратко перескажите содержание изученного материала «своими словами». Заучите «рабочие определения» основных понятий, законов.

Освоив теоретический материал, приступайте к выполнению заданий, упражнений; решению задач, расчетов по индивидуальным заданиям и т.д.

## Примерный перечень вопросов к зачету

1. Strategies for identifying the location of special programmable devices (sensors) in the nodes a bidirectional network.
2. Collecting, processing, analyzing information about the flow function. Torsion of circular elastic bars: angle-of-twist and shear stresses calculation.
3. NP - complete problem of minimizing the set of monitored nodes.
4. Modeling the linear system of the unmonitored part of the bidirectional network.
5. Methods and technologies of decomposition flows.
6. Algorithms and technologies for constructing analytical solutions in the sensor location problem.
7. Algorithms and technologies for constructing the numerical solutions in the sensor location problem.
8. Optimal solutions in the sensor location problem.
9. Suboptimal solutions for a bidirectional graph in the sensor location problem.
10. Constructing the fully monitored network.
11. Development of new approaches, strategies, technologies and algorithms for a fully monitored network.
12. Conditions for the effective applicability of exact methods for solving the flow estimation problem on the unobservable part of a bidirectional network.
13. Implementation of algorithmic, structural and technological solutions for problem of constructing the fully monitored network with using the system Wolfram Mathematica.
14. Technology compute a basis of a solution space (characteristic vectors) of the corresponding homogeneous system.
15. Construction of a general solution for the network part of the underdetermined sparse system.
16. Decomposition of the underdetermined sparse system of linear algebraic equations
17. Technologies for solution of large linear systems with embedded network structure in the sensors location problem.
18. Mathematical models of linear optimization problems with inaccurate data
19. Modeling the optimal parameters of the objective function.
20. Modeling the parameters of lower and upper bounds.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики  
д-р физ.-мат. наук,  
профессор

М.А. Журавков

\_\_\_\_. \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**  
на \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ учебный год

№№ ПП	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 202\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_