

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

А.Д.Король

10 июня 2024 г.

Регистрационный № УД-13117/уч.



ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

направления специальности:

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2024 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01-2021, учебных планов БГУ: № G31-1-003/уч. от 25.05.2021, № G31-1-061/уч. ин. от 31.05.2021, № G 31-1-207/уч. от 22.03.2022, №G 31-1-243/уч. ин. от 27.05.2022.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Вячеслав Иванович Янчевский - профессор кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физ.-мат. наук, профессор, академик НАН Беларуси.

РЕЦЕНЗЕНТ:

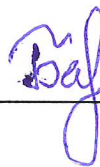
Анна Александровна Осиновская - ведущий научный сотрудник отдела алгебры Института математики НАН Беларуси, кандидат физ.-мат. наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ
(протокол № 10 от 31.05.2024)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 8 от 31.05.2024)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии
и методики преподавания математики



Д.Ф. Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Избранные главы геометрии и топологии» является углубление изучения свойств проективных алгебраических кривых (плоских) с помощью понятий дифференциальной геометрии таких, как касательные пространства, точки перегиба, особые точки и т.п.

Задачей учебной дисциплины является осуществление перехода от простых геометрических аффинных (евклидовых) геометрических объектов, возникающих в аналитической геометрии, к восприятию более сложных проективных образов.

Важность постановки такой задачи вытекает, прежде всего, из необходимости прояснения такой взаимосвязи с другими дисциплинами: «Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия и топология» и кроме того, позволяет обратиться к рассмотрению таких важных с точки зрения приложений объектов как эллиптические кривые.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Избранные главы геометрии и топологии» относится к **циклу дисциплин специализации** компонента учреждения высшего образования.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Избранные главы геометрии и топологии» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции**:

БПК. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать: понятия проективных алгебраических кривых, кратностей пересечения кривых, касательных, особенности точек, точек перегиба, гессианов, теорему Безу и формул Плюккера;

уметь: вычислять кратности точек на кривых, координаты точек пересечения, уравнения касательных и двойственных кривых;

владеть: основами аппарата плоской проективной алгебраической геометрии.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 7 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Избранные главы геометрии и топологии» отведено:

– в очной форме получения высшего образования: 108 часов, в том числе 54 аудиторных часа, из них: лекции – 48 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛАНИМЕТРИИ.

Тема 1.1. Проективная плоскость и ее аффинные экраны. Связь с аффинной геометрией.

Определение проективной плоскости, модели проективной плоскости. Определение аффинных экранов, отображение проективных объектов в аффинной геометрии с помощью проектирования.

Тема 1.2. Бесконечные точки относительно экранов.

Бесконечные точки относительно экранов. Конечные и бесконечные точки и прямые относительно фиксированного экрана. Относительность понятия бесконечности точек и прямых.

Тема 1.3. Однородные и неоднородные координаты.

Определение координат проективных точек как множество направляющих векторов соответствующих аффинных прямых. Неоднородные координаты как аффинные координаты соответствующих аффинных образов.

Тема 1.4. Проективные плоские алгебраические кривые.

Проективные плоские алгебраические кривые как геометрические места точек проективной плоскости, определяемые нулями однородных многочленов. Тождества Эйлера для однородных многочленов. Алгебраические замкнутые поля.

Тема 1.5. Минимальные многочлены и степень кривой, ее геометрический смысл.

Однородные многочлены и геометрические места их нулей. Понятие минимального многочлена. Алгебраические и геометрические свойства понятия степени кривой.

Тема 1.6. Неприводимые компоненты кривой, их связь с идеалами кривых. Кратные компоненты.

Теорема о разложимости однородных многочленов в произведении их неприводимых множителей. Определение неприводимой компоненты кривой. Понятие идеала кривой и связь простых идеалов с неприводимыми компонентами. Понятие кратных компонент.

РАЗДЕЛ 2. ОБЪЕДИНЕНИЕ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ.

Тема 2.1. Кратность пересечения кривой и прямой.

Параметрические уравнения проективной прямой, проходящей через две точки. Теорема о кратности пересечения прямой и кривой.

Тема 2.2. Кратность точек. Касательные прямые. Кратные касательные.

Понятие кратности точки, как результат пересечения пучка прямых с кривой в заданной точке, их кратности.

Тема 2.3. Особые точки. Конечность числа особых точек.

Особые точки кривой как точки с высокой кратностью пересечения с пучком прямых в каждой из таких точек. Теорема о конечности числа особых точек.

Тема 2.4. Теорема Безу.

Понятие кратности пересечения двух кривых. Неравенства для определения сумм кратности кривых в точке пересечения и доказательство теоремы Безу.

РАЗДЕЛ 3. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА, ГЕССИАНЫ.

Тема 3.1. Определение поляр и их свойства.

Определение поляр и точек перегиба и их свойства.

Тема 3.2. Существование точек перегиба.

Доказательство существования точек перегиба и их конечности. Связь со степенью кривой.

Тема 3.3. Неравенства для числа точек перегиба.

Доказательство неравенства для числа точек перегиба в зависимости от различных свойств заданной кривой. Кривые Гесса.

Тема 3.4. Точки перегиба кубик.

Описание точек перегиба для плоских проективных кубических кривых.

Тема 3.5. Нормальные формы кубик.

Классификация кубических кривых в зависимости от особых точек и точек перегиба.

РАЗДЕЛ 4. КОНИКИ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ.

Тема 4.1. Гладкие коники и их изоморфизм проективной прямой.

Теорема об изоморфизме гладких коник и проективной прямой. Метод параметризации. Параметризуемость квадрик произвольной размерности.

Тема 4.2. Линейные системы коник, проходящих через заданные точки.

Определение линейной системы коник. Теорема о максимальности множества точек общего положения, через которые проходит заданная коника.

Тема 4.3. Вырождение коник.

Теорема о проективной классификации вырожденных коник.

РАЗДЕЛ 5. ПЛОСКИЕ ПРОЕКТИВНЫЕ КУБИКИ.

Тема 5.1. Групповой закон на кубиках.

Определение группового закона на кубических кривых. Кубики с мультипликативной и аддитивной редукциями.

Тема 5.2. Эллиптические кривые.

Эллиптические кривые и их канонические уравнения.

Тема 5.3. Пучок кубик, проходящих через 8 точек.

Описание пучков кубик. Теорема о пучке кубик, проходящих через 8 точек общего положения.

Тема 5.4. Гексаграмма Паскаля.

Формулировка и доказательство теоремы Паскаля о шестиугольнике в проективной плоскости.

РАЗДЕЛ 6. КРИВЫЕ И ИХ РОД.

Тема 6.1. Большая теорема Ферма. Морделл-Вейль-Фальтингс-Уайлз.

Исторические сведения о Большой теореме Ферма. Обсуждение теоремы Морделла-Вейля, вклада Фальтингса. Идея доказательства Большой теоремы Ферма Уайлзом.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия		
1	2	3	4	5	6	7	8
7 семестр							
1	Элементы проективной планиметрии.	12					
1.1	Проективная плоскость и ее аффинные экраны. Связь с аффинной геометрией	2					Опрос
1.2	Бесконечные точки относительно экранов.	2					Опрос
1.3	Однородные и неоднородные координаты.	2					Опрос
1.4	Проективные плоские алгебраические кривые.	2					Опрос
1.5	Минимальные многочлены и степень кривой, ее геометрический смысл.	2					Опрос
1.6	Неприводимые компоненты кривой, их связь с идеалами кривых. Кратные компоненты.	2					Опрос
2	Объединение и пересечение кривых.	12					
2.1	Кратность пересечения кривой и прямой	2					Опрос
2.2	Кратность точек. Касательные прямые. Кратные касательные.	2					Опрос
2.3	Особые точки. Конечность числа особых точек.	2					Опрос
2.4	Теорема Безу.	6					Опрос

3	Точки перегиба, гессианы.	4				6	
3.1	Определение поляра и их свойства.					2	Опрос
3.2	Существование точек перегиба.					2	Собеседование
3.3	Неравенства для числа точек перегиба.					2	Учебная дискуссия
3.4	Точки перегиба кубик.	2					Опрос
3.5	Нормальные формы кубик.	2					Опрос
4	Коники на проективной плоскости.	8					
4.1.	Гладкие коники и их изоморфизм проективной прямой.	2					Опрос
4.2.	Линейные системы коник, проходящих через заданные точки.	4					Опрос
4.3.	Вырождение коник.	2					Опрос
5	Плоские проективные кубики.	10					
5.1.	Групповой закон на кубиках.	2					Опрос
5.2.	Эллиптические кривые.	2					Опрос
5.3.	Пучок кубик, проходящих через 8 точек.	2					Опрос
5.4.	Гексаграмма Паскаля.	4					Опрос
6	Кривые и их род.	2					
6.1.	Большая теорема Ферма. Морделл-Вейль-Фальтингс-Уайлз.	2					Опрос
	Итого:	48				6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. – М. : Мир, 1972.
2. Шафаревич И.П. Основы алгебраической геометрии. – М. : Наука, 1972.
3. Fulton W. Algebraic curves, Springer.
4. Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. – М. : Мир, 1991.
5. Берже М. Геометрия, тт. 1 и 2. – М. : Мир, 1984.

Дополнительная литература

1. Понтрягин Л.С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. Москва, 2019. - 174 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- устный опрос;
- собеседование;
- учебная дискуссия.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине “Избранные главы геометрии и топологии» учебным планом предусмотрен зачет.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3.1. Определение поляр и их свойства.

1. Определение поляр для заданных кривых.
2. Вычисление множества точек для специальных кривых.

Форма контроля - опрос.

Тема 3.2. Существование точек перегиба.

1. Конечность множества точек перегиба.
2. Степень кривой, множество точек перегиба, его конечность.

Форма контроля – собеседование.

Тема 3.3. Неравенства для числа точек перегиба.

1. Гессианы. Определение и свойства.

Форма контроля - учебная дискуссия.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

- **эвристический**, ориентированный на осуществление студентами личностно-значимых открытий в процессе подготовки к опросам, проводимым во время занятий.
- **практико-ориентированный**, предполагающий: - освоение содержания образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- **метод учебной дискуссии**, предусматривающий участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме;

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

В процессе **самостоятельной работы** по дисциплине «Избранные главы геометрии и топологии» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к опросам, проводимым во время занятий.
- поиск и изучение понятий и фактов прежде изучаемых дисциплин «Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия и топология», необходимых для усвоения дисциплины «Избранные главы геометрии и топологии»;
- выполнение домашних заданий;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Избранные главы геометрии и топологии»,

является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при проведении опросов во время занятий и при сдаче зачета.

К **организационным формам** проведения УСР по дисциплине «Избранные главы геометрии и топологии» относится аудиторная деятельность.

Видами отчетности УСР являются ответы во время опросов.

Контроль УСР по дисциплине «Избранные главы геометрии и топологии» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

– экспресс-опроса на аудиторных занятиях.

Учет результатов контроля текущей успеваемости студентов ведется преподавателем.

Задания студентам по УСР разрабатываются преподавателями, читающими лекции в соответствии с учебной программой.

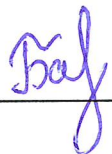
Примерный перечень вопросов к зачёту

1. Проективная плоскость и ее аффинные экраны. Связь с аффинной геометрией.
2. Однородные и неоднородные координаты.
3. Неприводимые компоненты кривой, их связь с идеалами кривых. Кратные компоненты.
4. Кратность пересечения кривой и прямой.
5. Особые точки. Конечность числа особых точек.
6. Теорема Безу.
7. Определение поляр и их свойства.
8. Существование точек перегиба.
9. Неравенства для числа точек перегиба.
10. Двойственные кривые.
11. Групповой закон на кубиках.
12. Эллиптические кривые.
13. Топология гладких комплексных кубик.
14. Большая теорема Ферма. Морделл-Вейль-Фальтингс-Уайлз.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
учебная дисциплина не требует согласования			

Заведующий кафедрой
геометрии, топологии и
методики преподавания математики
К.ф.-м.н., доцент


 _____ Д.Ф. Базылев

31. 05 _____ 2024 г.

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)
(название кафедры)

Заведующий кафедрой

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(ученая степень, ученое звание)

(И.О.Фамилия)