Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
______________Д.Ф. Базылев	______________С.М. Босяков
«01» июля 2024 г.	«02» июля 2024 г.

Геометрия

Электронный учебно-методический комплекс для специальности:
6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки»
профилизация: «Математика»

Регистрационный № 2.4.2-24/510

Автор:
Кононов С.Г., кандидат физико-математических наук, доцент

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ 29.08.2024 г., протокол № 1.

Минск 2024

УДК 514(075.8)
К 592

Утверждено на заседании Научно-методического совета БГУ
Протокол № 1 от 29.08.2024 г.

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 11 от 02.07.2024 г.

Автор:

Кононов Сергей Гаврилович, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.

Рецензенты:

кафедра математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М.Танка» (зав. кафедрой Гриб Н.В., кандидат физико-математических наук, доцент);

Белько И.В., профессор кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет», доктор физико-математических наук, профессор.

Кононов, С. Г. Геометрия : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизация: «Математика»» / Кононов С. Г. ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. геометрии, топологии и методики преподавания математики. – Минск : БГУ, 2024. – 79 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 78–79.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) по учебной дисциплине «Геометрия» разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности: 6-05-0533-07 «Математика и компьютерные науки», профилизация: «Математика». ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Геометрия» для студентов данной специальности. В ЭУМК содержится краткий конспект лекций; перечень лабораторных занятий с материалами для работы в аудитории и дома; материалы для управляемой самостоятельной работы: варианты контрольных работ, примерные варианты тестов по дисциплине, материалы для индивидуальных заданий; примерный список экзаменационных вопросов; список рекомендованной литературы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящий электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) разработан в соответствии с образовательным стандартом первой ступени высшего образования для специальности 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки, профилизация: Математика, и предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «*Геометрия*» для студентов данной специальности.

ЭУМК включает в себя разделы: «Пояснительная записка», «Теоретический раздел» (краткий курс лекций), «Практический раздел» (материалы к лабораторным занятиям), «Раздел контроля знаний» и «Вспомогательный раздел».

«Пояснительная записка» содержит аннотацию и краткую информацию об ЭУМК. «Теоретический раздел» представляет собой краткий курс лекций, охватывающий все разделы учебной программы. В «Практическом разделе» содержатся материалы к лабораторным занятиям (задачи с разбивкой по темам) и соответствующие задания для самостоятельной работы.

В «Разделе контроля знаний» представлены примерные варианты заданий по управляемой самостоятельной работе студентов, а также примерные задачи для контрольной работы. «Вспомогательный раздел» содержит рекомендуемую по курсу литературу и электронные ресурсы.

«*Геометрия*» традиционно является одной из основных дисциплин, которые изучаются студентами-математиками в начале обучения в университете. Понятия и основные факты дисциплины «*Геометрия*» используются при изучении многих математических дисциплин, в первую очередь таких, как «*Дифференциальная геометрия и топология*», «*Дифференциальные уравнения*», «*Алгебра и теория чисел*», «*Математический анализ*». Все это определяет важность учебной дисциплины «*Геометрия*» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость своевременного внесения изменений и дополнений в ее содержание.

Главными *образовательными целями* учебной дисциплины «*Геометрия*» являются:

- углубленное изучение фигур первого и второго порядков в трехмерном евклидовом пространстве и на евклидовой плоскости;
- освоение новых по сравнению с элементарной геометрией пространств: многомерных евклидовых и аффинных и изучение фигур первого и второго порядков в этих пространствах;
- изучение аффинных преобразований и движений в аффинных и евклидовых пространствах;
- овладение основным методом исследования в аналитической геометрии – методом координат;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области аналитической геометрии для их использования при изучении других математических дисциплин.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления, способности применять геометрические методы при постановке и решении теоретических и прикладных математических задач.

Для достижения этих целей решаются следующие *задачи*:

- Определяется понятие геометрического вектора как класса эквивалентных направленных отрезков. Излагается векторная алгебра, используемая в дальнейшем как основной инструмент построения аналитической геометрии;
- Всесторонне изучаются фигуры первого и второго порядков, являющиеся основными объектами исследования в аналитической геометрии;
- Вводятся основные типы геометрических преобразований и проводится идея рассмотрения различных геометрий как совокупности инвариантов той или иной группы преобразований.

В начале изучения дисциплины с целью сохранения преемственности со школьной геометрией рассмотрение ограничивается трехмерным евклидовым пространством E^3. При этом векторы в трехмерном евклидовом пространстве E^3**,** прямые на евклидовой плоскости E^2, плоскости и прямые в пространстве E^3 изучаются всесторонне с точки зрения высшей математики. Затем рассматриваются фигуры второго порядка на плоскости E^2 и в пространстве E^3**.**

Далее рассматриваются аффинные преобразования и движения плоскости E^2 и пространства E^3, широко используемые в настоящее время в различных графических программах компьютерной геометрии.

Заключительная часть дисциплины «*Геометрия*» посвящена многомерным аффинным и евклидовым пространствам. Определяются и изучаются фигуры первого и второго порядков в вещественных аффинных и евклидовых пространствах; аффинные преобразования и движения; аффинная и евклидова геометрия.

В течение всего процесса обучения происходит систематическое изучение геометрических преобразований, проведение теоретико-группового взгляда на геометрию.

Учебная дисциплина «*Геометрия*» относится *к модулю «Алгебра и геометрия»* 1 государственного компонента.

Изучение дисциплины «*Геометрия*» в течение всего срока обучения проходит во *взаимосвязи* с изучаемыми параллельно дисциплинами: «*Введение в специальность*», «*Алгебра и теория чисел*», «*Математический анализ*».

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

–векторы в $\mathbf{E}^3$, операции над векторами;

–эллипсы, гиперболы, параболы, эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, их канонические уравнения и свойства;

–понятия *n*-мерного аффинного и евклидова пространств; аффинные реперы и координаты точек; *к*-мерные плоскости и фигуры второго порядка, группы геометрических преобразований;

уметь:

–выполнять операции над векторами; записывать общие и параметрические уравнения плоскостей в различных пространствах, определять их взаимное расположение; находить расстояния между плоскостями;

–по общему уравнению фигуры второго порядка в $\mathbf{E}^2$ и $\mathbf{E}^3$ определять ее тип, размеры, расположение относительно системы координат; приводить общее уравнение фигуры второго порядка в аффинном пространстве к нормальному виду;

владеть:

–методом координат при решении основных задач аналитической геометрии.

Дисциплина изучается в 1 и 2 семестрах очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «*Геометрия*» отведено 314 часов, в том числе 140 аудиторных часов, из них: лекции – 70 часов, лабораторные занятия – 60 часов, управляемая самостоятельная работа – 10 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 9 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – зачет и экзамен – 1 семестр, экзамен – 2 семестр.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ
ВВЕДЕНИЕ

Общепризнано особое положение математики среди других наук, которое заключается в строгости ее определений и построений, абсолютной истинности математических утверждений – именно это привлекает к постижению математики многих людей. Строгость математической науки достигается тем, что теоремы той или иной области математики выводятся (доказываются) по определенным логическим законам из некоторых сравнительно простых утверждений, которые в этой области считаются истинными, т.е. из *аксиом*. В наибольшей степени это относится к геометрии, изложение которой в "Началах" Евклида (III в. до н.э.) было первым в истории человечества аксиоматическим построением научной теории. Содержание "Начал" до сих пор остается основой школьной элементарной геометрии. Плоскость и пространство, где развивается школьная геометрия, называются *евклидовыми*. В дальнейшем аксиомы Евклида были всесторонне изучены и дополнены. Наиболее известной является аксиоматика Д. Гильберта[1], включающая 20 аксиом.

По многим причинам полное и скрупулезное аксиоматическое изложение евклидовой геометрии в школе невозможно. Такой подход реализуется в высшей математике в рамках дисциплины "Основания геометрии". При преподавании дисциплины «Геометрия» мы не будем рассматривать систему аксиом Гильберта. [2] Тем не менее, используя в начале нашего курса материал элементарной школьной геометрии, мы можем быть уверены в его возможном строгом обосновании в рамках аксиоматики Гильберта. Кроме гильбертовской существуют и другие системы аксиом евклидовой геометрии. Среди них, прежде всего, следует упомянуть аксиоматику Г. Вейля[3].

Аксиоматическое построение теории предполагает наличие некоторых *первичных* (неопределяемых) *понятий* и *первичных отношений* между ними, свойства которых описываются аксиомами. В аксиоматике Гильберта евклидовой геометрии первичными понятиями являются *точка, прямая, плоскость,* первичными отношениями – *инцидентность, лежать между, конгруэнтность.* В аксиоматике Вейля первичными понятиями являются понятия *точка и вектор,* первичными отношениями – *операции над векторами и точками*.

Аналитическая геометрия изучает геометрические фигуры с помощью алгебры, используя *метод координат.* Впервые этот метод применил французский математик и философ Рене Декарт (1596 – 1650). В его честь наиболее часто используемые системы координат называются *декартовыми.* В общем случае введение координат в некотором множестве означает замену

---

[1] Давид Гильберт (1862 – 1943) – немецкий математик.

[2] Подробное изложение аксиоматики Гильберта имеется в книгах:[7],[8]. Гильбертовская аксиоматика планиметрии обсуждается в книге [10].

[3] Герман Вейль (1885 – 1955) – немецкий математик. Построение элементарной геометрии на основе аксиоматики Вейля проведено, например, в книгах [11], [12].

элементов этого множества элементами другого, более удобного для исследования, множества. В геометрии метод координат позволяет заменять точки пространства тройками вещественных чисел и формулировать геометрические утверждения с помощью уравнений, неравенств и других формальных выражений. Решая уравнения или исследуя их алгебраическими методами, получают решение геометрической задачи или описывают свойства фигур.

Далее в рамках теоретического раздела УМК будет изложен материал, относящийся к основам дисциплины «Геометрия», покрывающий содержание вопросов, предлагающихся на государственном экзамене по окончании учебы на механико-математическом факультете. В полном объеме с содержанием дисциплины можно ознакомиться по учебному пособию [3], доступному в электронной библиотеке БГУ.

1.1. Векторы

1.1.1. Понятие вектора

Вектор – одно из важнейших математических понятий. Помимо геометрии векторы используются в других разделах математики. Кроме того, многие физические величины, такие, например, как скорость, ускорение, сила, интерпретируются как векторы. В данной главе рассматриваются векторы в элементарной евклидовой геометрии, определяемые направленными отрезками прямых. В общем случае вектор – это элемент того или иного *векторного пространства* и его природа может быть разнообразной: в роли векторов могут выступать числа (наборы чисел), функции, многочлены, *матрицы* и т.д.

Определение 1.1.1. Направленным отрезком *называется отрезок прямой, для которого одна из его граничных точек выбрана в качестве начала, а другая – в качестве конца отрезка.*

Направленный отрезок будем обозначать символом AB; здесь A – начало отрезка, B – конец. Направленный отрезок изображается в виде прямолинейной стрелки, направленной от начала к концу (рис. 1.1).

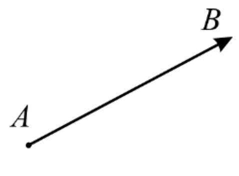


Рис. 1.1

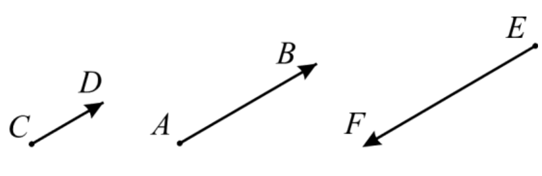


Рис. 1.2

Случай, когда $A = B$, не исключается, направленный отрезок AA называется ***нулевым***. Направленный отрезок BA называется ***противоположным*** для направленного отрезка AB . Далее нас будут интересовать только направленные отрезки, поэтому иногда для краткости *направленный отрезок* будем называть просто *отрезком*. Длину произвольного отрезка AB будем обозначать $|AB|$.

Если есть два ненулевых направленных отрезка, которые лежат на параллельных прямых или на одной прямой, то выполняется одно из двух условий: либо они *одинаково направлены*, либо *противоположно направлены*. На рисунке 1.2 отрезки AB и CD одинаково направлены ($AB \uparrow\uparrow CD$), отрезки AB и EF противоположно направлены ($AB \uparrow\downarrow EF$). Обычно направленные отрезки задаются таким образом, что мы можем отличить первую ситуацию от второй.

Определение 1.1.2. *Направленный отрезок AB называется* ***эквивалентным*** *направленному отрезку CD* (обозначение $AB \sim CD$)*, если длина отрезка AB равна длине отрезка CD* $(|AB| = |CD|)$ *и отрезки AB и CD одинаково направлены* ($AB \uparrow\uparrow CD$). *Все нулевые отрезки эквивалентны между собой* ($\forall\, A, B \in \mathbf{E^3} \quad AA \sim BB$) *и никакой нулевой отрезок не эквивалентен никакому ненулевому.*

Определение 1.1.3. Вектором *называется класс эквивалентных направленных отрезков.*

Векторы обозначаются строчными латинскими буквами со стрелкой наверху: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, … Таким образом, каждый вектор $\vec{a}$ представляет собой бесконечное множество направленных отрезков, эквивалентных между собой: $\vec{a} = \{AB, CD, EF, ... \mid AB \sim CD \sim EF \sim ...\}$. Каждый направленный отрезок, составляющий данный вектор, называется *представителем* этого вектора. Если $AB -$ представитель вектора $\vec{a}$, то для вектора $\vec{a}$ используют также обозначение $\overrightarrow{AB}$. Изобразить вектор, т.е. все направленные отрезки, составляющие данный вектор, невозможно, обычно для изображения вектора рисуют его представителя и ставят обозначение вектора (рис. 1.3).

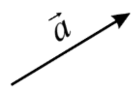


Рис. 1.3

По определению, все нулевые отрезки образуют один класс эквивалентности, т.е. один вектор. Этот вектор называется ***нулевым*** и обозначается $\vec{0}$. Множество всех векторов пространства обозначим $\mathbf{V(E^3)}$.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ – ненулевые векторы. Отложив их от некоторой точки O, т.е. построив точки A и B такие, что $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB},$ можно говорить о числе φ, $0 \le \varphi \le \pi,$ выражающем (в радианах) величину угла AOB. Отметим, что число φ не зависит от выбора точки O. Действительно, если отложить векторы $\vec{a}, \vec{b}$ от другой точки O' ($\vec{a} = \overrightarrow{O'A'}, \vec{b} = \overrightarrow{O'B'}$), то углы AOB и $A'O'B'$ имеют попарно параллельные и одинаково направленные стороны, поэтому их величины равны. Число φ называется ***величиной угла*** между векторами $\vec{a}$ è $\vec{b}$. Ненулевые векторы $\vec{a}$ è $\vec{b}$ называются ***ортогональными*** (или ***перпендикулярными***), если величина угла между ними равна $\frac{\pi}{2}$ (обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$). Нулевой вектор считается ортогональным любому вектору.

Определение 1.1.4. *Пусть* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ *– некоторая система векторов. Векторы* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ *называются* ***коллинеарными*** (***компланарными***)*, если при откладывании их от некоторой точки* O *получающиеся точки* $A, B, C, \ldots$ *лежат на одной прямой* Δ*, проходящей через точку* O (*в одной плоскости* π*, проходящей через точку* O)*. В случае коллинеарности или компланарности говорят также, что векторы* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ ***параллельны*** *прямой* Δ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots \| \Delta$) *или плоскости* π ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots \| \pi$).

1.1.2. Сумма векторов. Произведение векторов на числа

Определение 1.1.5. Суммой *вектора* $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ *и вектора* $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ *называется вектор* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$.(Рис. 1.4).

Таким образом, для любых точек $O, A, B \in \mathbf{E}^3$ верно равенство

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}, \tag{1}$$

которое называется ***равенством треугольника***.

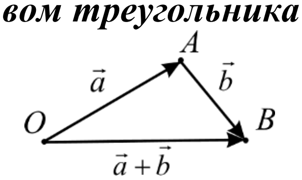


Рис. 1.4

Сумма двух неколлинеарных векторов $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ может быть вычислена по следующему ***правилу параллелограмма***: сумма векторов-сторон параллелограмма, выходящих из одной вершины, равна вектору-диагонали, выходящему из этой же вершины: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 1.5).

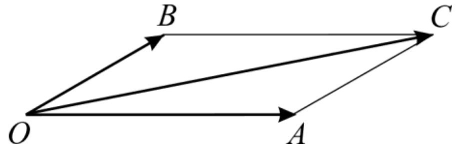


Рис. 1.5

Отметим следующие основные свойства сложения векторов, справедливые для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$.

Теорема 1.1.1. (i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (***коммутативность*** *сложения векторов)*;

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (***ассоциативность*** *сложения векторов*);

(iii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (*нулевой вектор* $\vec{0}$ *является* ***нейтральным элементом*** *относительно сложения*);

(iv) *для любого вектора* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ *существует* ***противоположный*** *вектор* $(-\vec{a}) \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$, т.е. такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

С алгебраической точки зрения теорема 1.1.1 означает, что *множество* всех векторов пространства $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ относительно операции сложения является *абелевой группой.*

Определение 1.1.6. *Пусть* $\vec{a}$ – *произвольный вектор,* λ – *произвольное вещественное число.* ***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** λ *называется вектор, который обозначается* $\lambda\vec{a}$ *и определяется следующими условиями*:

(i) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$;

(ii) $\begin{cases} \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \textit{ если } \lambda > 0, \\ \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, \textit{ если } \lambda < 0. \end{cases}$

Теорема 1.1.2. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ *и для любых чисел* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *верны равенства*:

(i) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

(ii) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

(iii) $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;

(iv) $1\vec{a} = \vec{a}$.

Тот факт, что операции сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа удовлетворяют утверждениям теорем 1 и 2 на языке алгебры означает, что $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ является *вещественным векторным* (*линейным*) *пространством.*

Пусть

$$\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k \text{ –} \tag{2}$$

конечная система векторов,

$$\lambda_1, ..., \lambda_k \text{ –} \tag{3}$$

произвольные вещественные числа. Вектор

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_k\vec{a}_k \tag{4}$$

называется ***линейной комбинацией*** системы векторов (2) с коэффициентами (3). Говорят также, что $\vec{a}$ ***линейно выражается*** через систему векторов (2).

Линейная комбинация (3) называется ***тривиальной***, если все коэффициенты равны нулю: $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0.$ Ясно, что тривиальная линейная комбинация любой системы векторов равна нулевому вектору: $0\vec{a}_1 + ... + 0\vec{a}_k = \vec{0}.$ Линейная комбинация (3) называется ***нетривиальной***, если среди коэффициентов (2) есть ненулевые числа.

Определение 1.1.7. *Система векторов* (1) *называется* ***линейно зависимой***, *если существует нетривиальная линейная комбинация системы* (1), *равная нулевому вектору. Система векторов, не являющаяся линейно зависимой, называется* ***линейно независимой***.

Другими словами, система векторов (4) линейно независима, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, т. е. из равенства $\lambda_1\vec{a}_1 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}$ следует, что $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.

1.1.3. Базисы

Определение 1.1.8. Базисом *множества* $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$ *векторов прямой* $\mathbf{E}^1$ *называется ненулевой вектор* $\vec{e} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$.

Теорема 1.1.3. *Пусть* $\vec{e}$ *– базис множества* $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$. *Тогда любой вектор* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$ *линейно выражается через* $\vec{e}$:

$$\vec{a} = x\vec{e}, \ x \in \mathbf{R}. \tag{5}$$

Число x определяется однозначно и называется ***координатой*** *вектора* $\vec{a}$ *в данном базисе.*

Определение 1.1.9. Базисом *множества* $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ *векторов плоскости* $\mathbf{E}^2$ *называется упорядоченная пара* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *неколлинеарных векторов этой плоскости.*

Теорема 1.1.4. *Пусть* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *– базис множества* $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$. *Тогда любой вектор* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ *линейно выражается через базис* (*раскладывается по базису*):

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \ x, y \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Числа x и y определяются однозначно и называются ***координатами*** *вектора* $\vec{a}$ *в данном базисе.*

Определение 1.1.10. Базисом *множества* $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ *векторов пространства* $\mathbf{E}^3$ *называется упорядоченная тройка* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *некомпланарных векторов.*

Теорема 1.1.5. *Пусть* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *– базис множества векторов пространства* $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$. *Тогда любой вектор* $\vec{a} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ *линейно выражается через базис* (*раскладывается по базису*):

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \ x, y, z \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Числа x, y, z *определяются однозначно и называются* ***координатами*** *вектора* $\vec{a}$ *в данном базисе.*

Среди множества всех базисов выделяют так называемые *ортонормированные базисы,* которые удобны при вычислениях.

Определение 1.1.11. Ортонормированным базисом *называется базис, векторы которого попарно ортогональны и имеют единичную длину.*

Обычно ортонормированные базисы на плоскости обозначаются $(\vec{i}, \vec{j})$, в пространстве – $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (рис. 1.5).

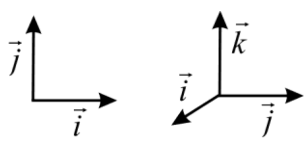


Рис. 1.5

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – базис в пространстве $\mathbf{E}^3$. Отложим векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ от некоторой точки *O*, получим соответственно точки E_1, E_2, E_3. Обозначим π плоскость, проходящую через точки O, E_1, E_2 (рис. 1.6).

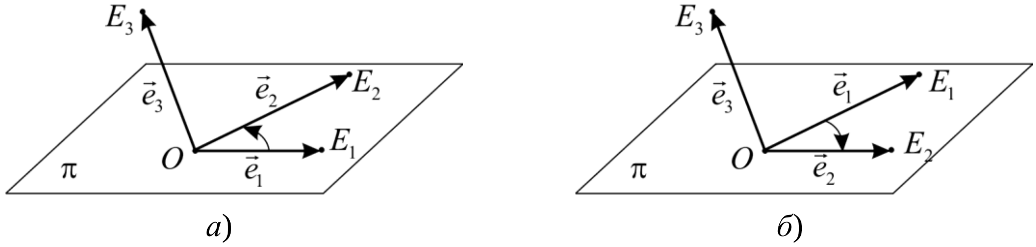


Рис. 1.6

Поскольку векторы, составляющие базис, не компланарны, то точка E_3 не лежит в плоскости π, а лежит в одном из двух полупространств, на которые пространство разбивается плоскостью π. Базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется ***правым***, если, глядя на плоскость π из точки E_3 (из «конца» вектора $\vec{e}_3$), мы видим кратчайший поворот вектора $\vec{e}_1$ до вектора $\vec{e}_2$ происходящим в направлении, противоположном направлению поворота часовой стрелки (рис. 1.6, а). Базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется ***левым***, если, глядя из «конца» вектора $\vec{e}_3$, мы видим кратчайший поворот вектора $\vec{e}_1$ до вектора $\vec{e}_2$ происходящим в направлении движения часовой стрелки (рис. 1.6, б). Моделями правого и левого базисов могут служить первые три пальца руки человека, соответственно правой и левой, расположенных в естественном положении (рис. 1.7).

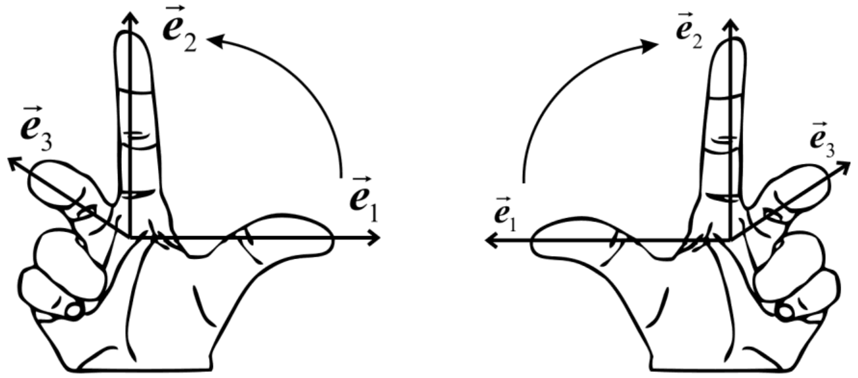


Рис. 1.7

Этим объясняется употребление терминов *правый* и *левый*. ***Правой*** (***левой***) ***ориентацией*** **пространства** $\mathbf{E}^3$ называется выбор класса правых (левых) базисов множества векторов пространства. Легко убедиться, что справедливы следующие свойства ориентации:

(i) *перестановка любых двух векторов в упорядоченной тройке некомпланарных векторов меняет ориентацию на противоположную*;

(ii) *замена одного из векторов в упорядоченной тройке некомпланарных векторов на противоположный вектор меняет ориентацию на противоположную*.

1.1.4. Скалярное произведение векторов

Определение 1.1.12. *Пусть* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– произвольные векторы.* ***Скалярным произведением*** *вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ *называется число* (*скаляр*), *которое обозначается* $\vec{a}\vec{b}$ *и определяется следующим образом*:

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \textit{ если } \vec{a} \neq \vec{0} \textit{ и } \vec{b} \neq \vec{0} \ (\varphi - \textit{величина угла между } \vec{a} \textit{ и } \vec{b}), \\ 0, \textit{ если хотя бы один из векторов } \vec{a} \textit{ или } \vec{b} \textit{ нулевой.} \end{cases}$$

Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$, т.е. неотрицательное число $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$ будем обозначать $\vec{a}^2$. Из определения вытекают следующие формулы для вычисления длины произвольного вектора $\vec{a}$ и величины угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через скалярное произведение:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}, \quad \varphi = \arccos\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \tag{8}$$

Утверждение 1.1.1. *Для любых векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ *и любого числа* $\lambda \in \mathbf{R}$ *верны следующие равенства*:

(i) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ *– свойство* ***коммутативности*** *скалярного произведения*;

(ii) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;

(iii) $\begin{cases} (\vec{b} + \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{a} + \vec{c}\vec{a}, \\ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}. \end{cases}$

Справедливость равенств (ii) *и* (iii) *означает, что скалярное произведение* ***билинейно***.

(iv) $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Свойство (iv) *означает, что равенство нулю скалярного произведения двух векторов является* ***критерием их ортогональности***.

Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – ортонормированный базис множества векторов $V(\mathbf{E}^3)$,

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ – произвольныt векторы, заданные своими координатами в этом базисе. В этом случае скалярное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

а формулы (1) для длины вектора и величины угла между векторами имеют вид:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad \varphi = \arccos\frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{9}$$

Если векторы $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ плоскости, то получаем аналоги формул $(1')$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (10)$$

1.1.5. Векторное произведение векторов

Определение 1.1.13. *Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы.* ***Векторным произведением*** *вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, который обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ и определяется следующими условиями*:

(i) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$;

(ii) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$;

(iii) *упорядоченная тройка векторов* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b})$ *– правая.*

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные векторы, то их ***векторное произведение*** *полагают равным нулевому вектору*: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.

Отметим, что в случае неколлинеарных векторов для определения вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ нужны все три условия (i), (ii) и (iii): условие (i) определяет только длину (ненулевую) вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. Условиям (i) и (ii), очевидно, удовлетворяют два взаимно противоположных вектора. И только все три условия (i), (ii), (iii) задают вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ однозначно (рис. 1.34).

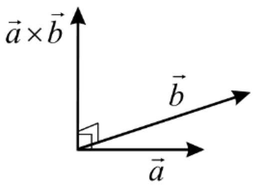


Рис. 1.34

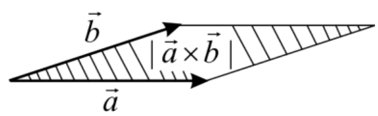


Рис. 1.35

Заметим также, что для неколлинеарных векторов *длина $|\vec{a}\times\vec{b}|$ векторного произведения численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$* (рис. 1.35).

Утверждение 1.1.2. *Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$ и любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$ верны следующие равенства*:

(i) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ *– свойство* ***антикоммутативности*** *векторного произведения*;

(ii) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

(iii) $\begin{cases} \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c}), \\ (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = (\vec{b}\times\vec{a}) + (\vec{c}\times\vec{a}). \end{cases}$

Справедливость равенств (ii) *и* (iii) *означает, что векторное произведение* (*как и скалярное*) ***билинейно***.

(iv) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\,\|\,\vec{b}$.

Свойство (iv) *означает, что равенство нулю векторного произведения двух векторов является* ***критерием их коллинеарности***.

Пусть $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ – правый ортонормированный базис множества векторов $V(\mathbf{E}^3)$, $\vec{a}(x_1,y_1,z_1), \vec{b}(x_2,y_2,z_2)$ – произвольные векторы, заданные своими координатами в этом базисе. В этом случае скалярное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (11)$$

1.1.6. Смешанное произведение векторов

Определение 1.1.14. *Пусть* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ *– упорядоченная тройка произвольных векторов.* ***Смешанным произведением*** *тройки векторов* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ *называется число* $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$. *Смешанное произведение обозначается* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Отложив их от некоторой точки A, получим точки соответственно B, D, A_1, не лежащие в одной плоскости с точкой A. Следовательно, отрезки AB, AD, AA_1 можно считать тремя ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящими из одной вершины A (рис. 1.38).

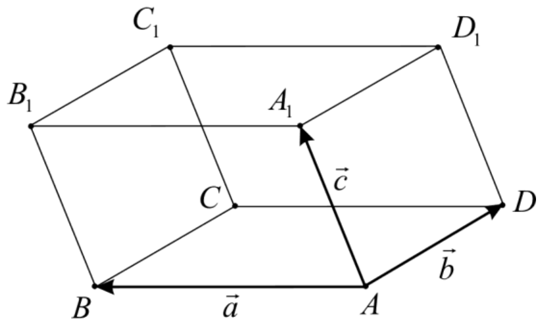


Рис. 1.38

Этот параллелепипед будем называть *параллелепипедом, построенным на векторах* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Обозначим V число, выражающее объем этого параллелепипеда. Введенное обозначение будем использовать в следующей теореме, выражающей геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 1.1.5. *Пусть* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *– некомпланарные векторы. Тогда*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left[\begin{array}{l} V,\ \text{если тройка } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ правая;}\\ -V,\ \text{если тройка } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ левая.}\end{array}\right.$$

Пусть $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ – правый ортонормированный базис множества векторов $V(\mathbf{E}^3)$, $\vec{a}(x_1,y_1,z_1), \vec{b}(x_2,y_2,z_2), \vec{c}(x_3,y_3,z_3)$ – произвольные векторы, заданные своими координатами в этом базисе. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Согласно следствию 1.8.2, критерием компланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является равенство нулю определителя (1), составленного из координат векторов в ортонормированном базисе. Это же верно для произвольного базиса.

1.2. Уравнения прямых на плоскости $\mathbf{E}^2$, плоскостей и прямых в пространстве $\mathbf{E}^3$

1.2.1. Аффинные реперы и уравнения фигур

В аналитической геометрии фигуры на плоскости или в пространстве задаются обычно уравнениями или параметрически при фиксировании некоторой системы координат, чаще всего, аффинного репера. *Аффинные реперы* являются обобщением известных из средней школы систем координат на плоскости и в пространстве. Чтобы задать аффинный репер на прямой, на плоскости или в пространстве, надо зафиксировать точку и выбрать базис соответствующего множества векторов. Помимо аффинных реперов используются также *полярная система координат* на плоскости и *сферическая* или *цилиндрическая* системы координат в пространстве.

Определение 1.2.1. Аффинным репером на прямой $\mathbf{E}^1$ *называется набор* $(O, \vec{e}_1)$, *где* O *– точка,* $\vec{e}_1$ *– базис множества* $V(\mathbf{E}^1)$ *векторов прямой, т.е. ненулевой вектор прямой* (рис. 2.1). ***Координатой точки*** $M \in \mathbf{E}^1$ *в репере* $(O, \vec{e}_1)$ *называется координата* ***радиус-вектора*** $\overrightarrow{OM}$ *в базисе* $\vec{e}_1$.

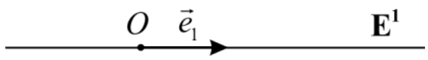


Рис. 2.1

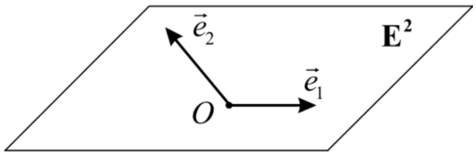


Рис. 2.2

Таким образом, координата точки M в репере $(O, \vec{e}_1)$ – это число $x \in \mathbf{R}$, которое определяется равенством $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1$. Прямую с фиксированным репером $(O, \vec{e}_1)$ будем называть ***координатной осью*** и обозначать Ox. Если x – координата точки M, то используют запись $M(x)$.

Определение 1.2.2. Аффинным репером на плоскости $\mathbf{E}^2$ *называется набор* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, *где* O *– точка плоскости,* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *– базис множества* $V(\mathbf{E}^2)$ *векторов плоскости, т.е. упорядоченная пара неколлинеарных векторов плоскости* (рис. 2.2). ***Координатами точки*** $M \in \mathbf{E}^2$ *в репере* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *называется координаты* ***радиус-вектора*** $\overrightarrow{OM}$ *точки* M *в базисе* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Таким образом, координаты точки M в репере $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ – это пара чисел (x,y), $x,y \in \mathbf{R}$, таких, что $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Если (x,y) – координаты точки M, то используют запись $M(x,y)$. Те же аргументы, что и в случае прямой, показывают, что координаты точки в данном репере определяются однозначно. Имея репер $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ на плоскости, можно говорить о двух координатных осях. Координатная ось с репером $(O,\vec{e}_1)$ называется ***осью абсцисс*** и обозначается Ox, координатная ось с репером $(O,\vec{e}_2)$ называется ***осью ординат*** и обозначается Oy. Первая x и вторая y координаты точки называются соответственно ***абсциссой*** и ***ординатой*** этой точки**.** Способ определения координат векторов, изложенный в § 1.4, позволяет выяснить геометрический смысл координат. Для нахождения абсциссы x точки M нужно спроектировать ее на ось Ox параллельно оси Oy. Если $M_1 = pr_{Ox}M$, то x – координата точки M_1 на оси абсцисс. Аналогично, y – координата точки $M_2 = pr_{Oy}M$ на оси ординат (рис. 2.3).

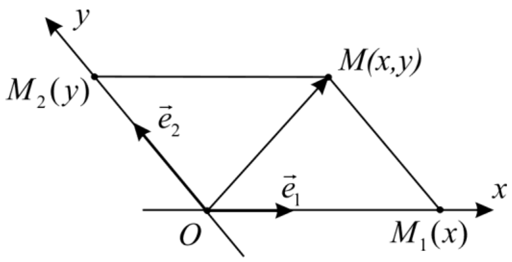


Рис. 2.3

Определение 1.2.3. Аффинным репером в пространстве $\mathbf{E}^3$ *называется набор* $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, *где* O *– точка,* $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ *– базис множества* $V(\mathbf{E}^3)$ *векторов пространства, т.е. упорядоченная тройка некомпланарных векторов*. (рис. 2.4). ***Координатами точки*** $M \in \mathbf{E}^3$ *в репере* $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ *называется координаты* ***радиус-вектора*** $\overrightarrow{OM}$ *точки* M *в базисе* $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

Таким образом, координаты точки M в репере $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ – это тройка чисел (x,y,z), $x,y,z \in \mathbf{R}$, таких, что $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Если (x,y,z) – координаты точки M, то используют запись $M(x,y,z)$. Далее можно повторить все то, что говорилось выше в случае плоскости с очевидными дополнениями. Помимо координатных осей абсцисс Ox и ординат Oy в пространстве добавляется ***ось аппликат*** Oz. Кроме того, в пространстве имеются три ***координатные плоскости***, определяемые парами осей: это плоскости Oxy, Oxz и Oyz. Каждая из координат x,y,z точки M есть координата проекции точки M на соответствующую ось параллельно дополнительной координатной плоскости (рис. 2.4). Координаты точки в данном репере определяются однозначно.

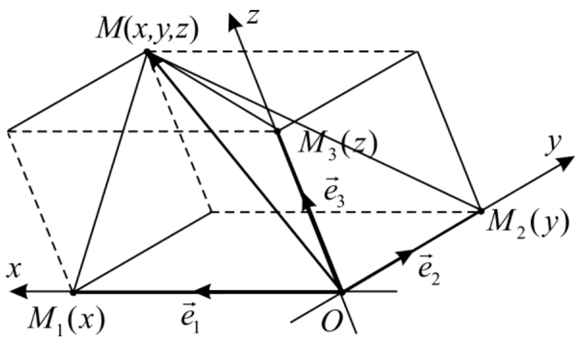


Рис. 2.4

Аффинные реперы называются также ***аффинными*** (или ***декартовыми***) ***системами координат*** и обозначаются: Ox (для прямой), Oxy (для плоскости), $Oxyz$ (для пространства). Точка O, входящая в репер, называется ***началом системы координат.*** В случаях, когда $(\vec{i},\vec{j})$ или $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ – ортонормированные базисы, говорят об ***ортонормированном репере*** плоскости $(O,\vec{i},\vec{j})$ (рис. 2.5) и ***ортонормированном репере*** пространства $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (рис. 2.6). Ортонормированные реперы называются также ***декартовыми прямоугольными системами координат***.

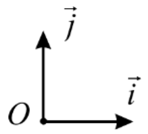


Рис. 2.5

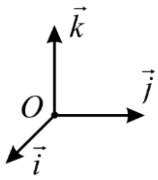


Рис. 2.6

Утверждение 1.2.1. (i) *Пусть* $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *– аффинный репер на плоскости* $\mathbf{E}^2$, $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ *– произвольные точки плоскости, заданные своими координатами в данном репере. Тогда*:

(i) *вектор* $\overrightarrow{AB}$ *в базисе* $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *имеет следующие координаты*: $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1)$;

(ii) *середина* C *отрезка* AB *имеет следующие координаты*: $C\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$;

(iii) *если* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *– ортонормированный репер, то расстояние между точками* A *и* B *вычисляется по формуле*:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1)$$

Фигурой называется произвольное множество точек Ф в пространстве, на плоскости или на прямой. Аналитическая геометрия изучает фигуры, используя ***метод координат***. Его суть заключается в том, что фиксируя некоторую систему координат, точки заменяют их координатами и задают фигуру как множество решений уравнения (системы уравнений) или неравенства (системы неравенств). Далее уравнения или неравенства анализируют методами алгебры и результаты анализа интерпретируют геометрически как свойства фигуры.

Определение 1.2.4. *Пусть* $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *– аффинный репер на плоскости* $\mathbf{E}^2$, $F: D \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ *– вещественнозначная функция двух аргументов, заданная на подмножестве* D *множества* $\mathbf{R}^2$. *Будем говорить, что уравнение*

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

является ***уравнением фигуры*** $\Phi \subset \mathbf{E}^2$ *в данном репере, если множество решений уравнения* (1) *совпадает с множеством координат точек фигуры* Φ.

Другими словами, уравнение (1) является уравнением фигуры Φ в репере $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, если эта фигура может быть определена следующим образом:

$$\Phi = \{M(c_1,c_2) \in \mathbf{E}^2 \mid F(c_1,c_2) \equiv 0\}.$$

Если Φ имеет уравнение (1), то говорят также, что фигура Φ ***задана*** этим уравнением.

Для нахождения уравнения фигуры в данном репере следует для произвольной точки плоскости $M(x, y)$ через ее координаты x и y записать характеристическое свойство этой фигуры, т.е. условие, которому удовлетворяют точки фигуры и только они.

Определение 1.2.5. *Пусть* $\Phi -$ *фигура на плоскости* $\mathbf{E}^2$, $T -$ *некоторое множество, элементы которого будем называть* ***параметрами***. *Сюръективное отображение*

$$f: T \to \Phi, t \mapsto f(t) \tag{2}$$

называется ***параметризацией*** *фигуры* Φ.

1.2.2. Уравнения прямой на плоскости

Прямую на плоскости $\mathbf{E}^2$ можно задавать различными способами. Например, на прямой Δ можно зафиксировать некоторую точку M_0, которую будем называть ***начальной точкой*** прямой, и выбрать ненулевой вектор $\vec{a}$ этой прямой, который будем называть ***направляющим вектором*** прямой. Тогда необходимое и достаточное условие того, что точка M лежит на прямой Δ, формулируется следующим образом:

$(M \in \Delta)$ $\Leftrightarrow$ (*векторы* $\overrightarrow{M_0M}$ *и* $\vec{a}$ *коллинеарны*) (рис. 2.7).

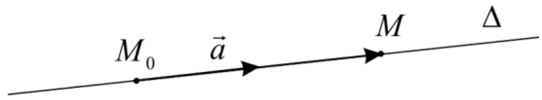


Рис. 2.7

Пусть O – фиксированная точка плоскости, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ – радиус-вектор начальной точки M_0, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор произвольной точки (иногда говорят *текущей* точки) M плоскости. Коллинеарность векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$

означает, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого $t \in \mathbf{R}$. Учитывая, что $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, имеем следующую цепочку эквивалентностей:

$(M \in \Delta) \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}) \Leftrightarrow (\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}), t \in \mathbf{R}$.

Таким образом, мы получили ***векторно-параметрическое задание*** прямой Δ:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \; t \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$

По формуле (1) можно найти радиус-вектор $\vec{r}$ любой точки прямой Δ в зависимости от значения параметра $t \in \mathbf{R}$ (рис. 2.8).

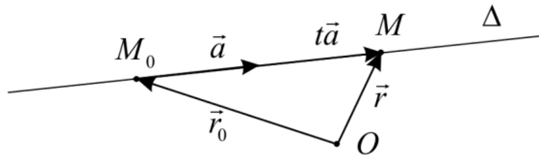


Рис. 2.8

Равенство (3) называют также (допуская вольность речи) ***векторно-параметрическим уравнением*** прямой Δ.

Присоединим к точке O базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ множества векторов плоскости $V(\mathbf{E}^2)$, получим аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ на плоскости $\mathbf{E}^2$. Пусть (x, y) и (x_0, y_0) – координаты соответственно точек M и M_0 в данном репере. Согласно определения 1.2.3, (x, y) и (x_0, y_0) – координаты соответственно радиус-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Пусть (l, m) – координаты направляющего вектора прямой $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда векторное равенство (1) равносильно двум скалярным равенствам:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, t \in \mathbf{R}. \end{cases} \qquad (4)$$

Формулы (4) выражают координатно-параметрическое задание прямой, они называются также ***координатно-параметрическими уравнениями*** прямой Δ. Придавая параметру t подходящее числовое значение, по формулам (4) можно найти координаты (x, y) любой точки прямой Δ.

Если прямая Δ параллельна координатной оси Ox, то у направляющего вектора вторая координата m равна нулю и уравнения (2) принимают вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \qquad (2')$$

Поскольку $l \neq 0$, то равенства $(2')$ означают, что у точек прямой первая координата может быть любым вещественным числом, в то время как вторая – фиксирована. Следовательно, точка $M(x, y)$ лежит на прямой Δ, $\Delta \parallel Ox$ (рис. 2.9) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$y = y_0.$$

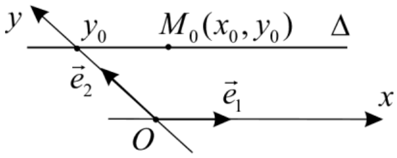


Рис. 2.9

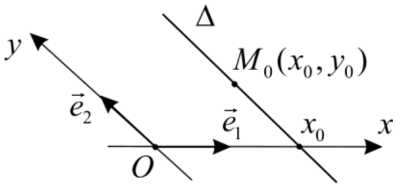


Рис. 2.10

Аналогично, прямая Δ', проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельна координатной оси Oy (рис. 2.10), задается условием

$$x = x_0. \tag{5}$$

Пусть прямая Δ не параллельна координатным осям Ox и Oy, т.е. $l \neq 0, m \neq 0$. В этом случае из системы (2) можно исключить t и получить следующее уравнение прямой Δ:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{6}$$

Если (6) рассматривать как пропорцию, т.е. считать, что равенство (6) эквивалентно равенству $(x - x_0)m = (y - y_0)l$, то уравнениями вида (6) можно задавать все прямые без исключения, т.е. можно задавать и прямые, параллельные координатным осям. Например, уравнение $\dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{m}$ означает, что $(x - x_0)m = (y - y_0)0$, т.е. $x = x_0$ (поскольку $m \neq 0$). Таким образом, будем считать, что любая прямая может быть задана уравнением (6), которое называется ***каноническим уравнением*** прямой.

Если прямая Δ не параллельна координатной оси Oy, т.е. $l \neq 0$, то можно определить число $k = \dfrac{m}{l}$, которое называется ***угловым коэффициентом*** прямой. Название объясняется тем обстоятельством, что в случае прямоугольной системы координат Oxy на плоскости $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ – величина угла между осью Ox и прямой Δ (*угла наклона* прямой Δ к оси Ox) (рис. 2.11).

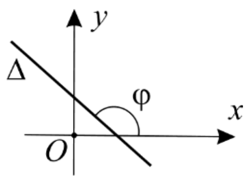


Рис. 2.11

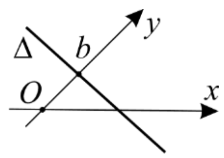


Рис. 2.12

Разумеется, в случае общей декартовой системы координат, число k не имеет такого геометрического смысла. Преобразовав уравнение (6), получаем следующее ***уравнение прямой по точке*** $M_0(x_0, y_0)$ ***и угловому коэффициенту*** k:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{7}$$

В свою очередь, уравнение (6) очевидным образом приводится к виду

$$y = kx + b. \tag{8}$$

Число b здесь – величина отрезка, отсекаемого прямой Δ на оси Oy, т.е координата (на оси Oy) точки пересечения прямой Δ с осью (рис. 2.12).

Теорема 1.2.1. *Пусть* $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ *– аффинный репер на плоскости* $\mathbf{E}^2$.

(i) *Любая прямая на плоскости* $\mathbf{E}^2$ *может быть задана в данном репере линейным уравнением вида*

$$Ax+By+C=0. \tag{9}$$

(ii) *Обратно, любое уравнение* (10) *при условии, что числа* A *и* B *не равны нулю одновременно, задает в данном репере прямую.*

Уравнение (10) называется ***общим уравнение*** *прямой.*

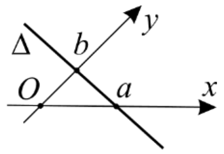


Рис. 2.13

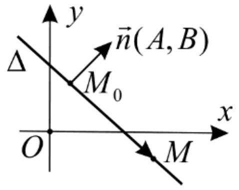


Рис. 2.14

Будем называть ***нормальным вектором прямой*** любой ненулевой вектор, перпендикулярный прямой. Пусть (9) – общее уравнение прямой Δ в ортонормированном репере $(O,\vec{i},\vec{j})$. Покажем, что в этом случае вектор $\vec{n}(A,B)$ – нормальный вектор прямой Δ. Действительно, выше было отмечено, что вектор $\vec{a}(-B,A)$ – направляющий вектор прямой, т.е. $\vec{a}\parallel\Delta$. Так как $\vec{n}\vec{a}=-AB+BA=0,$ то $\vec{n}(A,B)\perp\Delta$.

Если для прямой Δ заданы начальная точка $M_0(x_0,y_0)$ своими координатами в ортонормированном репере $(O,\vec{i},\vec{j})$ и нормальный вектор прямой $\vec{n}(A,B)$ своими координатами в базисе $(\vec{i},\vec{j})$, то можно записать ***уравнение прямой по точке и нормальному вектору*** в виде:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{10}$$

В самом деле, очевидно, что точка $M(x,y)$ лежит на прямой Δ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}(A,B)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)$ перпендикулярны. Равенство (10) как раз и выражает это условие.

1.2.3. Уравнения плоскости в пространстве

Пусть π – плоскость в пространстве $\mathbf{E}^3$, M_0 – фиксированная (начальная) точка плоскости, $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ – базис множества $V(\pi)$ векторов плоскости ($\vec{a}_1,\vec{a}_2$ – *направляющие векторы* плоскости π). Очевидно, что точка M пространства принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ принадлежит множеству $V(\pi)$, т.е. представляется в виде

$$\overrightarrow{M_0M}=t_1\vec{a}_1+t_2\vec{a}_2 \tag{11}$$

для некоторых $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$. Зафиксируем в пространстве точку O и обозначим $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ радиус-векторы соответственно точек M_0 и M. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ и равенство (11) можно переписать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2,\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \qquad (12)$$

Формула (12) называется ***векторно-параметрическим уравнением*** плоскости π.

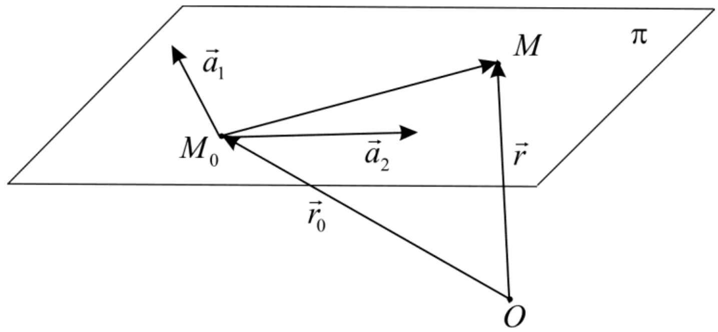


Рис. 2.15

Присоединим к точке O базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ множества $V(\mathbf{E}^3)$ векторов пространства, получим аффинный репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в пространстве $\mathbf{E}^3$. Пусть (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) – координаты соответственно точек M и M_0 в данном репере. Согласно определения 1.2.3, (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) – координаты также радиус-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Пусть (l_1, m_1, n_1) и (l_2, m_2, n_2) – координаты соответственно векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда векторное равенство (12) равносильно трем скалярным равенствам.

Еще один способ задания плоскости в пространстве получается, если заметить, что необходимым и достаточным условием принадлежности точки M плоскости π является компланарность векторов $\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$. Последнее условие можно выразить через координаты векторов (утверждение 1.8.2) и тем самым записать уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Раскрывая определитель, получим, что уравнение (13) есть линейное уравнение с тремя неизвестными вида

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) называется ***общим уравнением*** плоскости π.

Хорошо известно, что любая плоскость однозначно определяется своими тремя точками, не лежащими на одной прямой. Пусть это будут точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Выберем в качестве начальной точки плоскости $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а в качестве базисных векторов множества $V(\pi)$ – неколлинеарные векторы

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ и } \vec{a}_2 = \overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

В этом случае можно записать общее уравнение плоскости по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (15)$$

Для случая пространства справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *– аффинный репер в пространстве* $\mathbf{E}^3$.

(i) *Любая плоскость в пространстве* $\mathbf{E}^3$ *может быть задана в данном репере линейным уравнением вида*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (16)$$

(ii) *Обратно, любое уравнение* (16) *при условии, что числа A, B и C не равны нулю одновременно, задает в данном репере плоскость.*

Будем называть ***нормальным вектором плоскости*** любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости. Пусть (16) – общее уравнение плоскости π в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. В этом случае вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости π. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что этот вектор ортогонален вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, построенному по любым точкам M_1, M_2 плоскости π. Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) =$$

$$= (Ax_2 + By_2 + Cz_2) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = (-D) - (-D) = 0,$$

т.е. $\vec{n}(A, B, C) \perp \pi$.

Если для плоскости π заданы начальная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ своими координатами в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}(A, B, C)$ своими координатами в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, то можно записать уравнение плоскости π в данном репере в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (17)$$

В самом деле, очевидно, что точка $M(x, y, z)$ лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}(A, B, C)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ перпендикулярны (рис. 2.26). Равенство (7) как раз и выражает это условие.

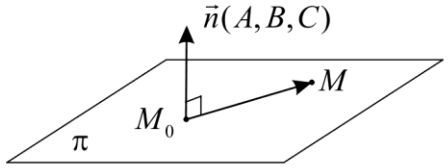


Рис. 2.16

1.2.4. Уравнения прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана векторно-параметрическим уравнением:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a},\ t \in \mathbf{R}. \tag{18}$$

Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – аффинный репер в пространстве $\mathbf{E}^3$. Пусть (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) – координаты соответственно точек M и M_0 в данном репере, (l, m, n) – координаты направляющего вектора прямой $\vec{a}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Тогда векторное равенство (18) равносильно трем скалярным равенствам:

$$\begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{19}$$

Формулы (19) выражают координатно-параметрическое задание прямой, они называются также ***координатно-параметрическими уравнениями*** прямой Δ.

Исключая из уравнений (9) параметр $t,$ получаем равенства

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{20}$$

которые называются ***каноническим уравнением*** прямой в пространстве. Поскольку направляющий вектор $\vec{a}(l, m, n)$ прямой ненулевой, то хотя бы одно из чисел l, m, n не равно нулю. Допустим, что $l \neq 0$. Тогда равенства (10), эквивалентны системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n}, \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы (как и в случае прямой на плоскости, равенства дробей рассматриваются как пропорции) является линейным уравнением, задающим плоскость. Таким образом, прямая Δ задается здесь как пересечение двух плоскостей. В общем случае, если прямая рассматривается как пересечение двух плоскостей π_1 и π_2 с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно, то эта прямая задается системой уравнений вида:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

При этом, согласно теореме 2.4.2, коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы не пропорциональны. Уравнения (21) называются ***общими уравнениями*** прямой.

1.3. Эллипс, гипербола, парабола, их уравнения и свойства

1.3.1. Эллипс

Определение 1.3.1. Эллипсом *называется фигура на плоскости* $\mathbf{E}^2$, *которая в некоторой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Здесь a *и* b *– фиксированные положительные числа, причем* $a>b$. Уравнение (1) называется ***каноническим уравнением*** эллипса.

Будем считать, что система координат Oxy расположена на плоскости стандартным образом относительно наблюдателя: ось Ox горизонтальна и направлена слева направо, ось Oy вертикальна и направлена снизу вверх. Поскольку в уравнение (1) неизвестные x и y входят в квадратах, то вместе с любой точкой $M_0(x_0,y_0)$, принадлежащей эллипсу, ему принадлежат точки $M_1(-x_0,y_0)$, $M_2(x_0,-y_0)$, $M_3(-x_0,-y_0)$. Это означает, что эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Поэтому, чтобы нарисовать эллипс, достаточно изобразить его часть, лежащую в верхней полуплоскости относительно оси Ox , и затем достроить недостающую часть, пользуясь симметрией. Из уравнения (1) получаем, что в верхней полуплоскости, т.е. при условии, что $y\ge 0$, эллипс задается графиком функции

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Область определения этой функции – отрезок $[-a;a]$; $y(-a)=y(a)=0$. Таким образом, эллипс пересекает ось Ox в точках $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$. Так как $y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, то функция возрастает на отрезке $[-a;0]$ и убывает на отрезке $[0;a]$; точка $x=0$ – точка максимума и $y(0)=b$. В точках $x=\pm a$ производная не определена, $\lim\limits_{x\to -a} y'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} y'(x)=-\infty$. Это означает, что эллипс пересекает ось Ox в точках A_1 и A_2 перпендикулярно прямой Ox. Поскольку $y''=-\frac{b}{a}\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}<0$ на интервале $(-a;a)$ то график исследуемой функции – дуга кривой, выпуклой вверх, соединяющей точки A_1 и A_2 . Полученной информации достаточно для того, чтобы нарисовать график рассматриваемой функции. Используя симметрию относительно оси Ox, получаем изображение всего эллипса (рис. 3.1).

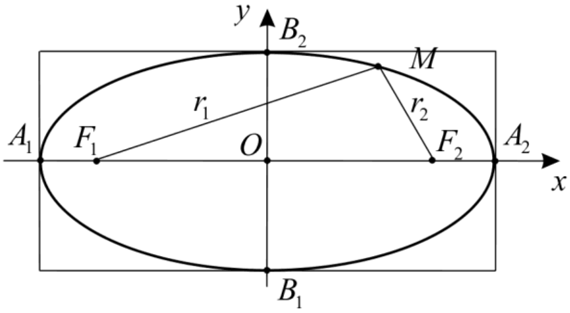
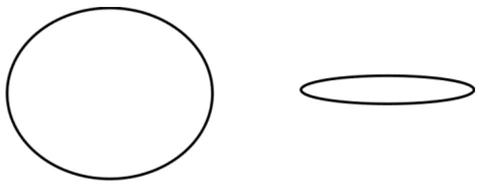


Рис. 3.1

Таким образом, эллипс – ограниченная фигура, лежащая внутри прямоугольника размерами $2a \times 2b$ со сторонами параллельными осям координат и с центром в начале координат. Этот прямоугольник называется ***основным прямоугольником*** эллипса. Эллипс касается середин сторон основного прямоугольника в точках $A_1(-a,0), A_2(a,0), \quad B_1(0,-b), B_2(0,-b)$, которые называются ***вершинами*** эллипса. Числа a и b называются соответственно ***большей полуосью*** и ***меньшей полуосью*** эллипса, прямые A_1A_2 и B_1B_2 – ***осями*** эллипса.

Так как в уравнении (1) эллипса $a > b$, можно определить число $c = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$. Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$ называется ***эксцентриситетом***. Эксцентриситет эллипса – положительное число, меньшее единицы, характеризующее его форму. Если ε стремится к 0, то полуоси b и a отличаются мало, и эллипс приближается к окружности, если ε стремится к 1, то полуось b значительно меньше a и эллипс приближается к отрезку (рис. 3.2).



$\varepsilon = 0{,}016$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon = 0{,}987$

Рис. 3.2

Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ называются ***фокусами*** эллипса. Если $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1 и MF_2, а также их длины $r_1 = |MF_1|,\ r_2 = |MF_2|$ называются ***фокальными радиусами*** точки M. Вычислим значения фокальных радиусов:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{(x+c)^2 + (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + a^2 - \cancel{c^2} - \cancel{x^2} + c^2\frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{a^2 + 2xc + c^2\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = a + \varepsilon x.$$

При извлечении последнего квадратного корня следует учесть, что $0<\varepsilon<1$ и для точки $M(x,y)$ эллипса верно неравенство: $|x|\le a.$ Аналогично, $r_2=a-\varepsilon x.$ Заметим, что $r_1+r_2=2a,$ т.е. для любой точки эллипса с уравнением (1) сумма расстояний до фокусов постоянна и равна $2a$. Отмеченное свойство является *характеристическим* для эллипса. Это означает, что верно следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть F_1 и F_2 – две точки плоскости, расстояние между которыми равно $2c,\ c>0.$ Тогда фигура Φ , состоящая из всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до F_1 и F_2 постоянна и равна $2a,\ a>c,$ есть эллипс. Точки F_1 и F_2 являются фокусами этого эллипса.*

Доказательство. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 и F_2 , а начало системы координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2 . В этой системе координат точки F_1 и F_2 имеют следующие координаты: $F_1(-c,0), F_2(c,0).$ Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка плоскости. Тогда

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ |MF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

Следовательно, уравнение фигуры Φ имеет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{2}$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат. Раскрывая скобки и приводя подобные, получим уравнение:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Еще раз возводим в квадрат обе части уравнения и приводим подобные:

$$x^2(a^2-c^2)+y^2a^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как по условию $a>c,$ то можно определить число $b=\sqrt{a^2-c^2}>0,$ $b<a$. Разделив обе части последнего уравнения на $a^2b^2,$ получим, что все точки фигуры Φ удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как $c=\sqrt{a^2-b^2}$, то точки F_1 и F_2 являются его фокусами. ►

Наряду с каноническим уравнением (1), часто используют параметрическое задание эллипса, которое получается следующим образом. Пусть Oxy – прямоугольная система координат. Рассмотрим две концентрические окружности с центром в точке O и радиусами a и b (рис. 3.3).

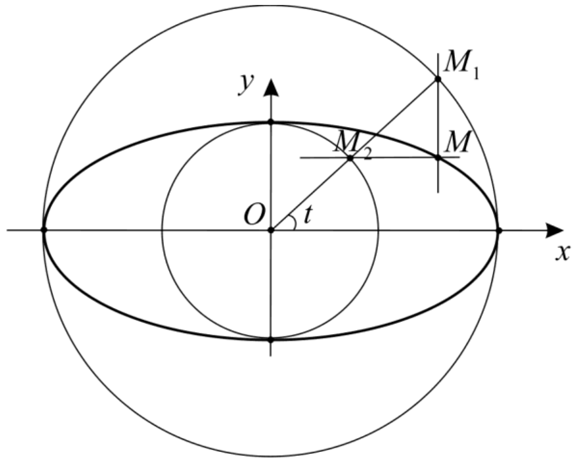


Рис. 3.3

Пусть t произвольное вещественное число. Из точки O проведем луч, образующий угол t с положительным направлением оси Ox. Этот луч пересекает окружности в точках $M_1(a\cos t, a\sin t)$ и $M_2(b\cos t, b\sin t)$. Через точку M_1 проведем прямую, параллельную оси Oy, а через точку M_2 проведем прямую, параллельную оси Ox. Эти прямые пересекаются в точке $M(a\cos t, b\sin t)$, которая, очевидно, лежит на эллипсе с уравнением (1). Легко видеть, что если t принимает все вещественные значения, то M пробегает все точки эллипса, следовательно, параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \; t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Отметим что эллипс может быть получен из окружности преобразованием *сжатия* к диаметру окружности.

Определение 1.3.2. Сжатием *плоскости* $\mathbf{E}^2$ *к прямой* Ox *вдоль прямой* Oy *называется отображение* $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ *, которое на произвольную точку плоскости* $M(x, y)$*, заданную своими координатами, действует по правилу*:

$$M(x, y) \mapsto M'(x, ky). \qquad (3)$$

Здесь k *– фиксированное вещественное число,* $0 < k < 1$ *, которое называется* ***коэффициентом сжатия*** (рис. 3.4).

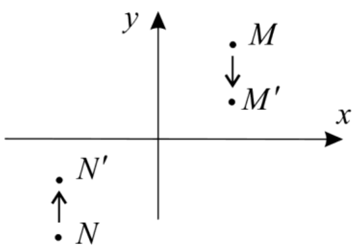


Рис. 3.4

Утверждение 1.3.1. *Пусть* Φ *– фигура на плоскости* $\mathbf{E}^2$ *, заданная уравнением* $F(x, y) = 0$ *относительно прямоугольной системы координат* Oxy.

Тогда фигура $\Phi' = f(\Phi)$ *, полученная из* Φ *сжатием* (3)*, имеет уравнение* $F(x, \frac{y}{k}) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что точка плоскости $M'_0(x_0, y_0)$ принадлежит фигуре Φ' тогда и только тогда, когда она получена преобразованием сжатия из точки $M_0(x_0, \frac{y_0}{k})$ фигуры Φ . Следовательно,

$$M'_0(x_0, y_0) \in \Phi' \;\Leftrightarrow\; F(x_0, \frac{y_0}{k}) \equiv 0 . \blacktriangleright$$

В качестве следствия этого утверждения получаем, что применяя преобразование сжатия к окружности Φ с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ относительно прямоугольной системы координат Oxy , получаем фигуру Φ' с уравнением $x^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 = a^2$ или $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ka)^2} = 1$, т.е. эллипс с полуосями a и $b = ka$.

1.3.2. Гипербола

Определение 1.3.3. Гиперболой *называется фигура на плоскости* $\mathbf{E}^2$*, которая в некоторой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (4)$$

Здесь a *и* b *– фиксированные положительные числа.*

Уравнение (4) называется ***каноническим уравнением*** гиперболы.

Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка гиперболы, то из уравнения (3) вытекает, что $|x_0| \geq a.$ Это означает, что гипербола – фигура, лежащая вне полосы шириной $2a$, которая определяется неравенством: $|x| < a$. Поскольку в уравнение (4) неизвестные x и y входят в квадратах, то гипербола, также как эллипс, симметрична относительно осей координат и начала координат. Поэтому, чтобы нарисовать гиперболу, достаточно изобразить ее часть, лежащую в первой четверти, и затем достроить недостающие части, пользуясь симметрией. Считая $x \geq 0,\; y \geq 0,$ из уравнения (4) получаем, что в первой четверти гипербола задается графиком возрастающей функции

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

У этого графика есть наклонная асимптота с уравнением $y = kx + b,$ где

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\frac{b}{a}\ ,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y(x)-\frac{b}{a}x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x)=0.$$

Далее нетрудно установить, что график функции представляет собой выпуклую вверх кривую, выходящую вертикально из точки $A_2(a,0)$ и асимптотически приближающуюся к прямой $y=\frac{b}{a}x$, но не пересекающую эту прямую. Используя симметрию, получаем изображение всей гиперболы (рис. 3.5).

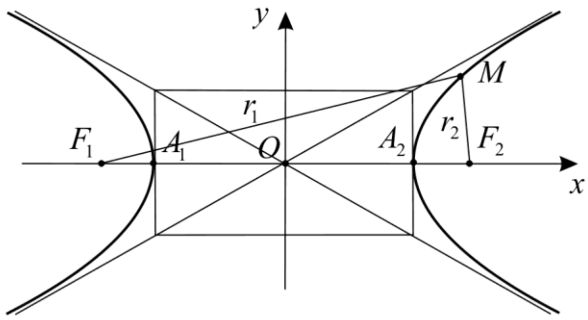


Рис. 3.5

Гипербола Ф состоит из двух частей (ветвей), обозначим их: $\Phi^+=\{M(x,y)\in\Phi\mid x>0\}$ и $\Phi^-=\{M(x,y)\in\Phi\mid x<0\}$ – соответственно правая и левая ветви на рисунке 6. Точки $A_1(-a,0), A_2(a,0)$ принадлежат гиперболе и называются ее ***вершинами***. Числа a и b называются ***полуосями*** гиперболы, a – ***действительная*** полуось, b – ***мнимая*** полуось. Прямая Ox называется ***действительной осью***, прямая Oy называется ***мнимой осью*** гиперболы.

Для изображения гиперболы на листе бумаги или на доске обычно поступают следующим образом. Вначале рисуют прямоугольник размерами $2a\times 2b$ со сторонами параллельными осям координат и с центром в начале координат, такой же, как для эллипса с уравнением (1). Этот прямоугольник называется ***основным прямоугольником*** гиперболы. Затем проводят асимптоты гиперболы $y=\pm\frac{b}{a}x$. Это прямые, на которых лежат диагонали основного прямоугольника. И наконец, рисуют ветви гиперболы Φ^- и Φ^+ так, чтобы они касались основного прямоугольника в вершинах $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$ и асимптотически приближались к прямым $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Определим число $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$, также как для эллипса, называется ***эксцентриситетом***. Эксцентриситет гиперболы –

положительное число, большее единицы, характеризующее ее форму ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$ на рис. 3.7). Если ε стремится к 1, то мнимая полуось b значительно меньше действительной полуоси a и гипербола приближается к двум лучам. Если ε стремится к $+\infty$, то мнимая полуось b значительно больше действительной полуоси a и гипербола приближается к паре параллельных прямых.

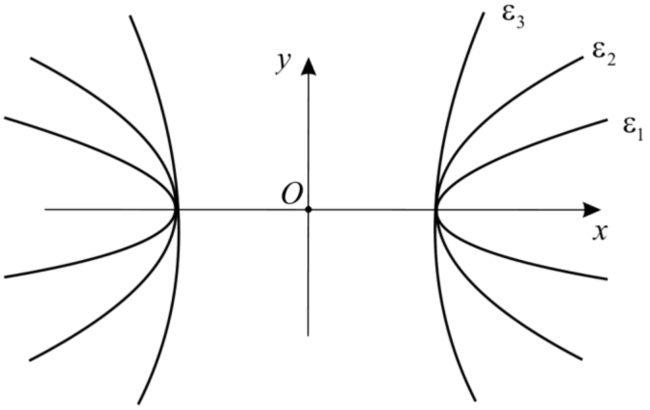


Рис. 3.6

У гиперболы с каноническим уравнением (4) имеются ***фокусы***, это две точки: $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ (рис. 3.5). Если $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы, то отрезки MF_1 и MF_2, а также их длины $r_1 = |MF_1|$, $r_2 = |MF_2|$ называются ***фокальными радиусами*** точки M. Вычислим значения фокальных радиусов:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{(x+c)^2 + (c^2 - a^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} =$$

$$= \sqrt{\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + c^2\frac{x^2}{a^2} + a^2 - \cancel{c^2} - \cancel{x^2}} = \sqrt{a^2 + 2xc + c^2\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a+\varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = \left[\begin{array}{l} a + \varepsilon x, \text{ если } x > 0, \\ -(a+\varepsilon x), \text{ если } x < 0. \end{array}\right.$$

При раскрытии модуля следует учесть, что $\varepsilon > 1$ и для точки $M(x,y)$ гиперболы $|x| \geq a$. Аналогично,

$$r_2 = |a - \varepsilon x| = \left[\begin{array}{l} -(a - \varepsilon x), \text{ если } x > 0, \\ a - \varepsilon x, \text{ если } x < 0. \end{array}\right.$$

Заметим, что $r_1 - r_2 = 2a$, если $x \in \Phi^+$, и $r_1 - r_2 = -2a$, если $x \in \Phi^-$, т.е. для любой точки гиперболы с уравнением (4) абсолютная величина разности расстояний до фокусов постоянна и равна $2a$. Отмеченное свойство является *характеристическим* для гиперболы. Это означает, что верно следующее утверждение.

Теорема 1.3.2. *Пусть F_1 и F_2 – две точки плоскости, расстояние между которыми равно $2c$, $c > 0$. Тогда фигура Φ, состоящая из всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до F_1 и F_2*

постоянна и равна $2a,\ a < c,$ *есть гипербола. Точки* F_1 *и* F_2 *являются фокусами этой гиперболы.*

Доказательство. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через точки F_1 и F_2, а начало системы координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. В этой системе точки F_1 и F_2 имеют следующие координаты: $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка плоскости. Тогда

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

Следовательно, уравнение фигуры Φ имеет вид:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \tag{5}$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Перенесем второй корень в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат. Раскрывая скобки и приводя подобные, получим уравнение:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Еще раз возводим в квадрат обе части уравнения и приводим подобные:

$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так как по условию $c > a,$ то можно определить число $b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0.$ Разделив обе части последнего уравнения на a^2b^2, получим, что все точки фигуры Φ удовлетворяют уравнению гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Очевидно, точки F_1 и F_2 являются фокусами этой гиперболы. ►

Наряду с гиперболой, заданной уравнением (4), можно рассматривать гиперболу, которая задается уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эти две гиперболы называются ***сопряженными*** друг для друга. У сопряженных гипербол один и тот же основной прямоугольник и совпадают асимптоты, только действительные и мнимые оси меняются местами (рис. 3.8).

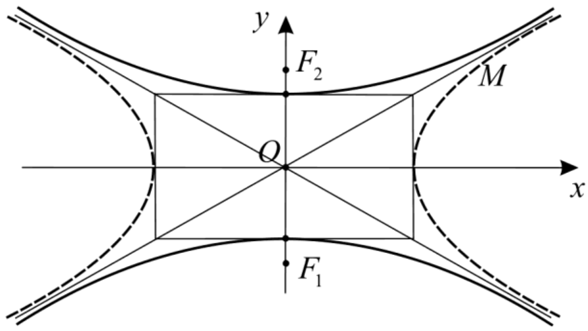


Рис.3.7

Гиперболу можно задать параметрически. Соответствующие формулы подобны тем, которые использовались при задании эллипса, только обычные синус и косинус заменяются на гиперболические:

$$\begin{cases} x = a\ \mathrm{ch}t, \\ y = b\ \mathrm{sh}t,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{6}$$

Отметим, что формулы (6) задают только одну ветвь гиперболы, вторая ветвь задается формулами:

$$\begin{cases} x = -a\ \mathrm{ch}t, \\ y = b\ \mathrm{sh}t,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

В средней школе *гиперболой* называется график обратно пропорциональной зависимости, т.е. график функции $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Используя материал следующего параграфа, можно показать, что этот график является гиперболой в смысле определения 1.3.3. Для этой гиперболы исходные оси координат являются асимптотами, а прямые с уравнениями $y = \pm x$ – осями. Чтобы это доказать, надо от прямоугольной системы координат Oxy перейти к другой, повернув исходную систему координат вокруг точки O на 45° . В новой системе координат рассматриваемый график задается уравнением $\frac{x^2}{2|k|} - \frac{y^2}{2|k|} = 1$.

1.3.3. Парабола

Парабола известна из школьного курса математики. Здесь мы приведем некоторые термины, принятые при рассмотрении параболы в аналитической геометрии.

Любая парабола при подходящем выборе прямоугольной системы координат Oxy (начало системы координат следует совместить с вершиной параболы, ось Oy – с касательной к параболе в вершине, ось Ox направить в ту полуплоскость относительно Oy, в которой лежат ветви параболы) может быть задана уравнением:

$$y^2 = 2px,\ p > 0, \tag{7}$$

которое называется ***каноническим уравнением*** параболы. Число p называется ***фокальным параметром*** параболы, точка $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – ***фокусом***. Для параболы с уравнением (7) ось Ox является осью симметрии, точка $O(0,0)$ – вершиной.

Принято считать, что ***эксцентриситет*** любой параболы равен единице, $\varepsilon = 1$. Эксцентриситет параболы, также как в случаях эллипса и гиперболы, характеризует форму фигуры. Поскольку у всех парабол эксцентриситет постоянен, то это означает, что у всех парабол форма одинакова. В математике в таком случае говорят, что фигуры ***конформны***. Более точно, это означает, что любую параболу можно перевести в любую другую преобразованием ***подобия***, т.е. таким преобразованием, при котором расстояния между соответствующими точками увеличивается (или уменьшается) в одно и тоже число раз. Примером преобразования подобия может служить преобразование плоскости $f : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$, которое произвольную точку $M(x, y)$ переводит в точку $M'(kx, ky), k > 0$, Такое преобразование называется ***гомотетией с центром в точке*** $O(0,0)$ ***и коэффициентом*** k. Очевидно, что при гомотетии расстояния между соответствующими точками увеличиваются в k раз. Пусть Φ_1 и Φ_2 – две параболы с фокальными параметрами p_1 и p_2, заданные уравнениями соответственно $y^2 = 2p_1x$ и $y^2 = 2p_2x$. Читателю предлагается в качестве упражнения убедиться в том, что первая парабола переводится во вторую гомотетией с коэффициентом $k = \frac{p_2}{p_1}$

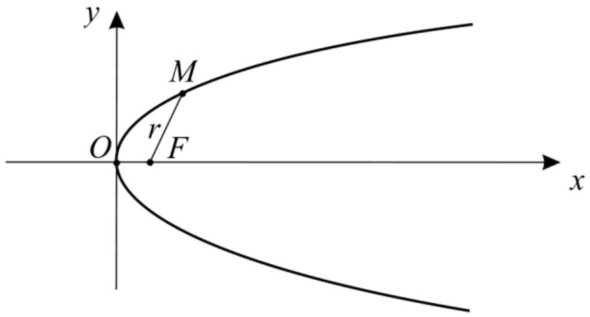


Рис. 3.8

Для произвольной точки $M(x, y)$ параболы отрезок MF, а также его длина $r = |MF|$ называются ***фокальным радиусом*** точки M. Вычислим значение фокального радиуса:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = x + \frac{p}{2}.$$

1.3.4. Некоторые общие свойства эллипса, гиперболы и параболы

В этом пункте мы используем обозначения, введенные выше, в частности, мы считаем, что эллипс, гипербола и парабола заданы в прямоугольной системе координат каноническими уравнениями соответственно (1), (3) и (6).

Определение 1.3.4. Директрисами эллипса и гиперболы *называются две прямые* Δ_1 *и* Δ_2 *с уравнениями соответственно* $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$. ***Директрисой параболы*** *называется прямая* Δ *с уравнением* $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 3.9).

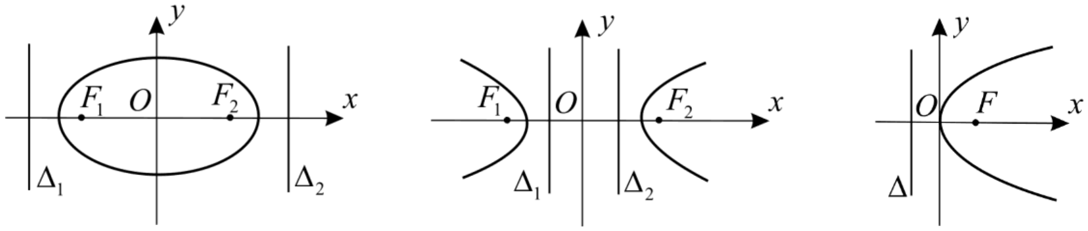


Рис. 3.9

Будем говорить, что в случаях эллипса и гиперболы фокус F_i и директриса Δ_i, $i = 1,2$, *соответствуют* друг другу. Первое общее свойство трех упомянутых фигур выражается следующим утверждением.

Утверждение 1.3.2. *Для любой точки эллипса, гиперболы или параболы отношение ее расстояний до фокуса и до соответствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно эксцентриситету.*

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса, $r = a + \varepsilon x$ – расстояние от M до левого фокуса F_1 , $d = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon x + a}{\varepsilon}$ – расстояние от M до левой директрисы Δ_1 . Тогда $\frac{r}{d} = \varepsilon$. Для правых фокуса и директрисы доказательство аналогично.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы, $r = |a - \varepsilon x|$ – расстояние от M до правого фокуса F_1 , $d = \left|x - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon}$ – расстояние от M до правой директрисы Δ_1. Тогда $\frac{r}{d} = \varepsilon$. Для левых фокуса и директрисы доказательство аналогично.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы, тогда $r = |x + \frac{p}{2}|$ – расстояние от M до фокуса F , $d = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ – расстояние от M до директрисы Δ. Тогда $\frac{r}{d} = 1 = \varepsilon$.▶

Доказанное свойство является характеристическим для трех фигур.

Утверждение 1.3.3. *Пусть* Δ *– прямая на плоскости* $\mathbf{E}^2$*,* F *– точка плоскости, не лежащая на* Δ*,* ε *– положительное число.*

Тогда фигура Φ*, состоящая из всех точек плоскости, для которых отношение расстояний до точки* F *и до прямой* Δ *постоянно и равно* ε*, суть: эллипс, если* $\varepsilon < 1$*; гипербола, если* $\varepsilon > 1$*; парабола, если* $\varepsilon = 1$.

Коротко заключение утверждения можно записать следующим образом:

$$\Phi = \{M \in \mathbf{E}^2 \mid \frac{d(M,F)}{d(M,\Delta)} = \varepsilon\} - \left[\begin{array}{l} \textit{эллипс, если } \varepsilon < 1, \\ \textit{гипербола, если } \varepsilon > 1, \\ \textit{парабола, если } \varepsilon = 1. \end{array}\right.$$

Доказательство. Выберем прямоугольную систему координат *Oxy* на плоскости $\mathbf{E}^2$ так, что ось *Oy* совпадает с прямой Δ, а ось *Ox* проходит через точку F перпендикулярно Δ. Тогда координаты заданной точки: $F(k,0)$, где k – расстояние от F до Δ. Если $M(x,y)$ – произвольная точка плоскости, то уравнение фигуры Φ имеет вид:

$$\frac{\sqrt{(x-k)^2 + y^2}}{|x|} = \varepsilon \text{ или } (x-k)^2 + y^2 = x^2\varepsilon^2.$$

Преобразовывая уравнение далее, получим:

$$x^2(1-\varepsilon^2) - 2xk + k^2 + y^2 = 0. \qquad (8)$$

Пусть $\varepsilon \neq 1$. Вынесем множитель $1-\varepsilon^2$ из слагаемых, содержащих x, и дополним оставшиеся члены до полного квадрата:

$$(1-\varepsilon^2)\left(x^2 - 2x\frac{k}{1-\varepsilon^2} + \frac{k^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right) + y^2 = \frac{k^2}{(1-\varepsilon^2)} - k^2 \text{ или}$$

$$\left(x - \frac{k}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{k^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}.$$

Введем обозначение $a^2 = \dfrac{k^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$ и разделим обе части последнего уравнения на a^2. Получим в итоге следующее уравнение фигуры Φ:

$$\frac{\left(x - \frac{k}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1. \qquad (9)$$

Очевидно, что (9) является уравнением эллипса, если $\varepsilon < 1$, и уравнением гиперболы, если $\varepsilon > 1$.

Если в уравнении (8) $\varepsilon = 1$, то его можно переписать в виде $y^2 = 2k(x - \dfrac{k}{2})$. Последнее уравнение, очевидно, задает параболу. ►

Читателю предлагается в качестве упражнения убедиться в том, что F и Δ являются для фигуры Φ соответствующими друг другу фокусом и директрисой.

Далее мы найдем уравнения касательных прямых к эллипсу, гиперболе, параболе.

Если ограничиться первой координатной четвертью, то дуга эллипса, лежащая в этой четверти, является графиком функции

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Из школьного курса математики известно, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В рассматриваемом случае

$$f'(x_0) = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} = -\frac{bx_0}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Следовательно, уравнение касательной:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0) \text{ или } \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Так как $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, получаем окончательно уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Учитывая, что эллипс симметричен относительно координатных осей, нетрудно убедиться, что уравнением (10) задается касательная к эллипсу в его произвольной точке.

Аналогично получаются уравнения касательных к гиперболе:

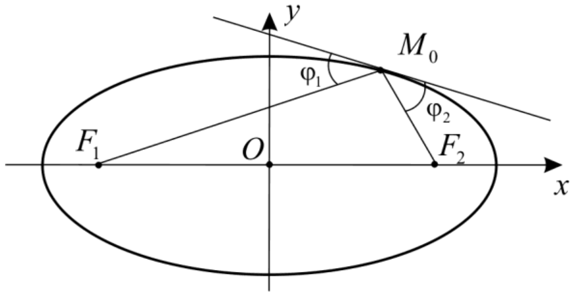
$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{11}$$

и параболе:

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{12}$$

Теперь можно установить так называемые «оптические» свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Утверждение 1.3.4. *Касательная в любой точке эллипса или гиперболы составляет равные углы с фокальными радиусами этой точки* (рис. 3.10).



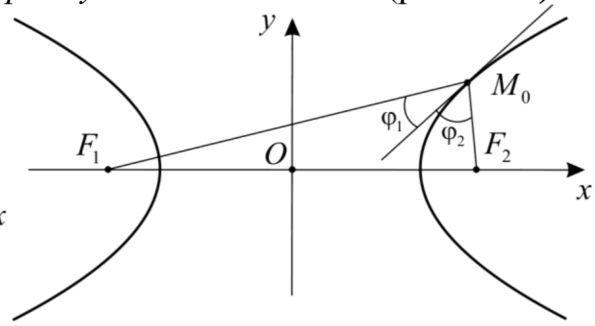


Рис. 3.10

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка эллипса. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{F_1M_0}(x_0+c, y_0)$ и $\overrightarrow{M_0F_2}(c-x_0, -y_0)$, а также направляющий вектор $\vec{m}\left(\dfrac{y_0}{b^2}, -\dfrac{x_0}{a^2}\right)$ касательной. Пусть φ_1 и φ_2 – величины углов соответственно между $\overrightarrow{F_1M_0}$ и $\vec{m}$, и между $\overrightarrow{M_0F_2}$ и $\vec{m}$. Тогда:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\dfrac{(x_0+c)y_0}{b^2} - \dfrac{x_0y_0}{a^2}}{|\vec{m}|\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}} = \frac{x_0y_0(a^2-b^2)+cy_0a^2}{a^2b^2|\vec{m}|r_1} = \frac{cy_0(a^2+cx_0)}{a^2b^2|\vec{m}|r_1} = \frac{\varepsilon y_0}{b^2|\vec{m}|};$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{\dfrac{(c-x_0)y_0}{b^2} + \dfrac{x_0y_0}{a^2}}{|\vec{m}|\sqrt{(c-x_0)^2+y_0^2}} = \frac{x_0y_0(b^2-a^2)+cy_0a^2}{a^2b^2|\vec{m}|r_2} = \frac{cy_0(a^2-cx_0)}{a^2b^2|\vec{m}|r_2} = \frac{\varepsilon y_0}{b^2|\vec{m}|}.$$

Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_2$. Доказательство в случае гиперболы проводится аналогично. ►

Если считать, что модели эллипса и гиперболы выполнены из зеркального материала, то можно сформулировать физическую (оптическую) интерпретацию доказанных свойств:

луч, выпущенный из одного фокуса эллипса, отразившись от эллипса, попадает в другой фокус;

луч, выпущенный из одного фокуса, отразившись от гиперболы, идет по прямой, проходящей через второй фокус и точку отражения.

Утверждение 1.3.5. *Касательная в любой точке параболы составляет равные углы с фокальным радиусом этой точки и осью параболы* (рис. 3.11).

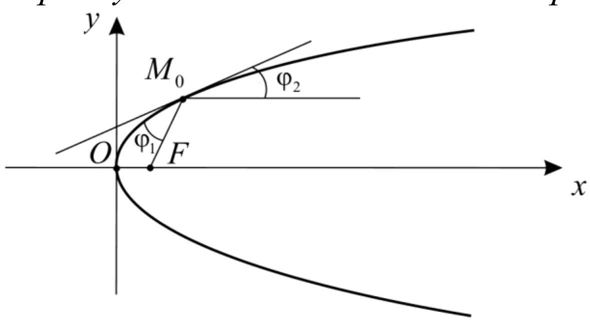


Рис. 3.11

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – точка параболы. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{FM_0}(x_0 - \dfrac{p}{2}, y_0)$ и направляющий вектор $\vec{m}(y_0, p)$ касательной. Пусть φ_1 и φ_2 – величины углов соответственно между $\overrightarrow{FM_0}$ и $\vec{m}$, и между $\vec{m}$ и осью параболы. Поскольку в рассматриваемом случае ось параболы совпадает с координатной осью Ox, то φ_2 – величина угла между $\vec{m}$ и базисным вектором $\vec{i}(1,0)$ системы координат. Тогда:

$$\cos\varphi_1 = \frac{(x_0 - \frac{p}{2})y_0 + y_0 p}{r\,|\vec{m}|} = \frac{x_0 y_0 + \frac{p}{2} y_0}{(x_0 + \frac{p}{2})\,|\vec{m}|} = \frac{y_0}{|\vec{m}|};$$

$\cos\varphi_2 = \dfrac{y_0}{|\vec{m}|}$. Таким образом, $\varphi_1 = \varphi_2$. ▶

Физическая (оптическая) интерпретация доказанного свойства параболы следующая: *луч, выпущенный из фокуса, отразившись от параболы, идет по прямой, параллельной оси параболы*. На этом свойстве основаны конструкции прожекторов, фар, передающих и принимающих антенн, в том числе параболических телевизионных.

Отметим, что помимо приведенного, существуют и другие доказательства оптических свойств, в том числе и чисто геометрические, не использующие уравнений. Заинтересовавшийся читатель может предложить свой вариант, а также найти различные доказательства в математической литературе или интернете.

1.4. Понятие аффинного пространства. Плоскости в аффинном пространстве и их уравнения

1.4.1. Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства

Понятие *аффинного пространства* возникает как обобщение понятий пространства $\mathbf{E}^3$, плоскости $\mathbf{E}^2$ и прямой $\mathbf{E}^1$. При этом поступают обычно следующим образом: выделяются некоторые существенные свойства обобщаемых понятий, эти свойства формулируются как аксиомы и новое понятие возникает как объект, удовлетворяющий данным аксиомам. В нашем конкретном случае мы отмечаем следующие общие свойства пространства $\mathbf{E}^3$, плоскости $\mathbf{E}^2$ и прямой $\mathbf{E}^1$:

(i) каждый из этих объектов является множеством точек;

(ii) каждая упорядоченная пара точек определяет вектор, множество которых составляет векторное пространство $V(\mathbf{E}^\mathbf{n})$, $n = 1, 2, 3$;

(iii) от любой точки единственным образом можно отложить любой вектор, получив при этом точку (конец соответствующего направленного отрезка).

Аксиоматизация этих свойств приводит к следующему определению.

Определение 1.4.1. *Пусть* A *− непустое множество, элементы которого будут называться* ***точками*** *и обозначаться прописными латинскими буквами* $\mathrm{A} = \{A, \ldots\}$. *Пусть* $\mathbf{V} = \{\vec{a}, \ldots\}$ *− векторное пространство над полем* $\mathbf{F}$. *Пусть, далее, каждой упорядоченной паре точек* (A, B) *поставлен в соответствие вектор, который будем обозначать* $\overrightarrow{AB}$. *Множество* A *называется*

аффинным пространством, ***связанным с векторным пространством*** $\mathbf{V}$, *если выполняются две аксиомы*:

A_{I}. *Для любой точки* $A \in \mathrm{A}$ *и любого вектора* $\vec{a} \in \mathbf{V}$ *существует единственная точка* $B \in \mathrm{A}$ *такая, что* $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;

A_{II}. *Для любых точек* $A, B, C \in \mathrm{A}$ *верно* ***соотношение Шаля***:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Тот факт, что каждой упорядоченной паре точек (A, B), $A, B \in \mathrm{A}$, ставится в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{V}$ означает, что задано отображение

$$\Phi : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathbf{V},\ (A, B) \mapsto \Phi(A, B) \equiv \overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Аксиомы A_{I} и A_{II} описывают свойства этого отображения. Отметим, что аксиома A_{I} означает фактически, что задано отображение

$$\mathrm{A} \times \mathbf{V} \to \mathrm{A},$$

сопоставляющее паре $(A, \vec{a})$ точку B такую, что $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Итак, в аффинном пространстве любой вектор можно отложить от любой точки и получить однозначно определенную точку.

Определение 1.4.2. Размерностью аффинного пространства, *связанного с конечномерным векторным пространством* $\mathbf{V}$, *называется размерность пространства* $\mathbf{V}$; n *-мерное аффинное пространство обозначается* A^n. *Если* $\mathbf{V}$ *бесконечномерно, то аффинное пространство* A *также называется* ***бесконечномерным***. *Нуль-мерное аффинное пространство* A^0 *называется* ***аффинной точкой***, 1*-мерное аффинное пространство* A^1 *называется* ***аффинной прямой***.

Замечание. Обозначение $\overrightarrow{AB}$ для вектора $\Phi(A, B)$, по виду совпадающее с обозначением класса эквивалентных отрезков, есть на самом деле лишь условность, позволяющая подчеркнуть близость этих понятий в определенном контексте (но не их совпадение). Ниже будет показано, что для любого векторного пространства существует аффинное пространство, связанное с ним. Поэтому векторы, определяемые парами точек аффинного пространства, могут иметь различную природу, они могут являться числами, многочленами, функциями, матрицами и т.д.

Приведем некоторые следствия, непосредственно вытекающие из определения аффинного пространства.

Утверждение 1.4.1. *Пусть* $A, B \in \mathrm{A}$. *Тогда* $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ *тогда и только тогда, когда* $A = B$.

Доказательство. Полагая $A = B = C$ из соотношения Шаля получаем: $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, откуда $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Из доказанного вытекает, что $\Psi(A, \vec{0}) = A$, т.е. откладывая от точки A нулевой вектор, получаем исходную точку A. Если теперь для точек A, B верно равенство $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, т.е. $\Psi(A, \vec{0}) = B$, то в силу однозначности откладывания вектора от точки получаем $A = B$.◄

Утверждение 1.4.2. *Для любых точек* $A, B \in \mathrm{A}$ *верно равенство* $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Доказательство. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ввиду соотношения Шаля и утверждения 6.1.1. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.►

В отображении Φ зафиксируем первый аргумент, положив $A = O$. Получим отображение

$$\Phi_O : \mathrm{A} \to \mathbf{V}, M \mapsto \overrightarrow{OM}. \qquad (2)$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется ***радиус-вектором*** точки M.

Утверждение 1.4.3. *Для любой точки* $O \in \mathrm{A}$ *отображение* (2), *ставящее в соответствие каждой точке ее радиус-вектор, является биекцией между множеством всех точек аффинного пространства* A *и множеством всех векторов векторного пространства* $\mathbf{V}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a} \in \mathbf{V}$, тогда для $M = \Psi(O, \vec{a})$ имеем: $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$, следовательно, отображение Φ_O сюръективно. Если $\Phi_O(A) = \Phi_O(B)$, т.е. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, то применяя соотношение Шаля, получаем: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA}$, т.е. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Утверждение 1.4.1 теперь влечет, что $A = B$, т.е. Φ_O инъективно.◄

Таким образом, отображение Φ_O отождествляет точки с векторами, поэтому Φ_O будем называть ***векторизацией*** аффинного пространства A.

Примеры аффинных пространств

1. Прежде всего, примерами аффинных пространств служат пространство $\mathbf{E}^3$, плоскость $\mathbf{E}^2$ и прямая $\mathbf{E}^1$, поскольку именно их свойства аксиоматизировались в определении 1.4.1. Эти аффинные пространства связаны с векторными пространствами соответственно $V(\mathbf{E}^3), V(\mathbf{E}^2), V(\mathbf{E}^1)$. Отображение Φ здесь возникает, если для каждой упорядоченной пары точек (A, B) построить вначале направленный отрезок AB, а затем класс эквивалентности этого отрезка, т.е. вектор $\overrightarrow{AB}$.

2. Пусть $\{A\}-$ одноэлементное множество, $\mathbf{V} = \{\vec{0}\}-$ нулевое векторное пространство над полем $\mathbf{F}$. Зададим отображение Φ следующим (единственно возможным) образом:

$$\Phi(A, A) = \vec{0}.$$

Очевидно, выполняются аксиомы $\mathrm{A}_{\mathbf{I}}$ и $\mathrm{A}_{\mathbf{II}}$. Следовательно, *любое одноэлементное множество может рассматриваться как нульмерное аффинное пространство* (*аффинная точка*), *связанное с нулевым векторным пространством над произвольным полем* $\mathbf{F}$.

Покажем теперь, что для любого векторного пространства существует аффинное пространство, связанное с ним, в частности, существуют аффинные пространства любой размерности, а также бесконечномерные аффинные пространства.

3. Пусть $\mathbf{V}$ – произвольное векторное пространство над полем $\mathbf{F}$. Положим $\mathrm{A} = \mathbf{V}$, т.е. будем рассматривать каждый элемент множества $\mathbf{V}$ и как вектор, и как точку. Рассмотрим следующее отображение:

$$\Phi : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathbf{V}, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{b} - \vec{a}.$$

Упражнение. *Проверьте, что выполняются аксиомы* $\mathrm{A}_{\mathbf{I}}$ *и* $\mathrm{A}_{\mathbf{II}}$.

Таким образом, любое векторное пространство может рассматриваться как аффинное пространство, связанное с самим собой.

В частности, если в качестве векторного пространства $\mathbf{V}$ взять векторное пространство строк $\mathbf{F^n} = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbf{F}\}$, то множество $\mathbf{F^n}$ можно рассматривать как аффинное пространство, связанное с векторным пространством $\mathbf{F^n}$. В этом случае $\mathbf{F^n}$ называется n***-мерным арифметическим аффинным пространством*** над полем $\mathbf{F}$. В этом примере вектор $\overrightarrow{AB}$, построенный по паре точек $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ имеет вид: $\overrightarrow{AB} = (\beta_1 - \alpha_1, ..., \beta_n - \alpha_n)$.

1.4.2. Плоскости (подпространства) в аффинном пространстве

Определим важное понятие *подпространства* аффинного пространства, обобщающее понятия прямых и плоскостей в пространстве $\mathbf{E}^3$.

Определение 1.4.3. *Пусть* A *– аффинное пространство, связанное с векторным пространством* $\mathbf{V}$; M_0 *– некоторая точка пространства* A; $\mathbf{W}$ – *подпространство векторного пространства* $\mathbf{V}$. ***Подпространством*** *аффинного пространства* A *называется множество*

$$\mathrm{B} = \{M \in \mathrm{A} \mid \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{W}\}. \quad (3)$$

Для подпространства B *точка* M_0 *называется* ***начальной точкой****, а* $\mathbf{W}$ – ***направляющим пространством***.

Итак, подпространство аффинного пространства состоит из всех точек, получающихся откладыванием от фиксированной точки M_0 всевозможных векторов некоторого подпространства $\mathbf{W}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ (рис. 4.1).

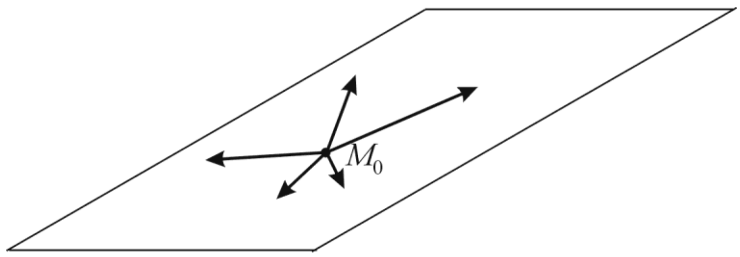


Рис. 4.1

Подпространство B аффинного пространства A, определяемое формулой (1), т.е. подпространство с начальной точкой $M_0 \in \mathrm{A}$ и направляющим пространством $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ будем обозначать $M_0 + \mathbf{W}$.

Примерами подпространств в $\mathbf{E}^3$ как в аффинном пространстве служат прямые и плоскости. Действительно, если Δ – прямая в $\mathbf{E}^3$ с начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{a}$, то Δ состоит из всех точек $M \in \mathbf{E}^3$ таких, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, t \in \mathbf{R}$. Это означает, что $\Delta = M_0 + \mathbf{W}^1$, где $\mathbf{W}^1 = L(\vec{a})$ – одномерное подпространство $V(\mathbf{E}^3)$, порожденное вектором $\vec{a}$. Точно также, плоскость π в $\mathbf{E}^3$ можно определить как подпространство: $\pi = M_0 + \mathbf{W}^2$. Здесь M_0 – начальная точка плоскости π, $\mathbf{W}^2 = V(\pi)$ – двумерное подпространство пространства $V(\mathbf{E}^3)$, состоящее из всех векторов плоскости π.

Учитывая сказанное выше, подпространства аффинного пространства принято называть также *плоскостями.* Подпространство $\mathrm{B} = M_0 + \mathbf{W}$, которое задается формулой (5), называется ***плоскостью*** в аффинном пространстве A с ***начальной точкой*** M_0 и ***направляющим пространством*** $\mathbf{W}$. Если $\dim \mathbf{W} = k$, то B называется k ***-мерной плоскостью*** в аффинном пространстве A. В дальнейшем мы будем придерживаться этой терминологии, носящей более геометрический характер. В n-мерном аффинном пространстве A^n существуют плоскости любой размерности $k, 0 \le k \le n$. Это следует из того, что в связанном с A^n n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}^n$ существуют подпространства соответствующих размерностей.

Важную роль в аффинном пространстве играют *гиперплоскости.*

Определение 1.4.4. *Пусть* A *– аффинное пространство, связанное с векторным пространством* $\mathbf{V}$. *Плоскость* $\mathrm{B} = M_0 + \mathbf{W}$ *в пространстве* A *называется* ***гиперплоскостью****, если ее направляющее пространство* $\mathbf{W}$ *имеет коразмерность* 1 *в пространстве* $\mathbf{V}$.

В частности, гиперплоскость в n-мерном аффинном пространстве – это $(n-1)$-мерная плоскость.

Утверждение 1.4.4. *Пусть* $(\mathrm{B}_i)_{i\in I}$ *– семейство плоскостей в аффинном пространстве* A *и* $\mathbf{W}_i$ *– направляющее пространство плоскости* B_i *для любого* $i \in I$. *Тогда либо* $\bigcap_{i\in I} \mathrm{B}_i = \varnothing$, *либо* $\mathrm{B} = \bigcap_{i\in I} \mathrm{B}_i$ *– плоскость в пространстве* A *с направляющим пространством* $\mathbf{W} = \bigcap_{i\in I} \mathbf{W}_i$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{B} = \bigcap_{i\in I} \mathrm{B}_i \ne \varnothing$ и $M_0 \in \mathrm{B}$. Тогда верны следующие эквивалентности:

$$(M \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{B}_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \;\; M \in \mathrm{B}_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I \;\; \overrightarrow{M_0M} \in \mathbf{W}_i) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_0M} \in \bigcap_{i\in I} \mathbf{W}_i).$$

Сравнивая начало и конец в цепочке эквивалентностей, получаем, что В является плоскостью в А с начальной точкой M_0 и направляющим пространством $\mathbf{W} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$. ►

Укажем необходимые и достаточные условия для того, чтобы две плоскости имели непустое пересечение.

Утверждение 1.4.5. *Пусть* В = $M_0 + \mathbf{W}$ *и* Р = $N_0 + \mathbf{U}$ – *плоскости в аффинном пространстве* А.

(i) *Если* В $\bigcap$ Р $\neq \varnothing$, *то для любых точек* $M \in$ В *и* $N \in$ Р *верно*: $\overrightarrow{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$.

(ii) *Если существуют точки* $M \in$ В *и* $N \in$ Р *такие, что* $\overrightarrow{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$, *то* В $\bigcap$ Р $\neq \varnothing$.

Полезна словесная формулировка этого утверждения:

две плоскости аффинного пространства пересекаются (*т. е. их пересечение не пусто*) *тогда и только тогда, когда* ***вектор-мостик*** (*вектор, «соединяющий» точки плоскостей*) *принадлежит сумме направляющих пространств этих плоскостей.*

Доказательство. (i) Пусть $P \in$ В $\bigcap$ Р. Тогда $\overrightarrow{MP} \in \mathbf{W}, \overrightarrow{PN} \in \mathbf{U}$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$.

(ii) Пусть $\overrightarrow{MN} \in \mathbf{W} + \mathbf{U}$. Это означает, что $\overrightarrow{MN} = \vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} \in \mathbf{W}$, $\vec{b} \in \mathbf{U}$. Выберем точки $P_1 = M + \vec{a} \in$ В и $P_2 = N - \vec{b} \in$ Р. Тогда $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP_2} = -\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \vec{0}$, т. е. $P_1 = P_2$. Таким образом, плоскости В и Р имеют непустое пересечение. ►

Пусть А^n – n-мерное аффинное пространство, связанное с векторным пространством $\mathbf{V^n}$ над полем $\mathbf{F}$.

Определение 1.4.5. Аффинным репером (*или* ***аффинной системой координат***) *в* n *-мерном аффинном пространстве* А^n *называется упорядоченный набор* $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$, *состоящий из фиксированной точки* O *пространства* А^n *и базиса* $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ *векторного пространства* $\mathbf{V^n}$. ***Координатами*** *точки* $M \in$ А^n *в репере* $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ *называются координаты ее радиус-вектора* $\overrightarrow{OM}$ *в базисе* $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Таким образом, координаты точки $M \in$ А^n в данном репере $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – это упорядоченный набор $(x_1, ..., x_n)$ элементов поля $\mathbf{F}$ такой, что

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n.$$

Если точка M имеет координаты $(x_1, ..., x_n)$, то используют запись $M(x_1, ..., x_n)$.

Рассмотрим способы задания плоскостей в пространстве A^n. Пусть $\mathrm{B}^k = M_0 + \mathbf{W}^k -$ k-мерная плоскость в n-мерном аффинном пространстве A^n, $k > 0$.

Зафиксируем в A^n точку O и обозначим: $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} -$ радиус-вектор начальной точки M_0 плоскости B^k; $\vec{r} = \overrightarrow{OM} -$ радиус-вектор произвольной точки $M \in \mathrm{A}^n$. Пусть $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k) -$ базис направляющего пространства $\mathbf{W}^k$ плоскости B^k. Далее, исходя из определения плоскости, запишем несколько эквивалентных утверждений:

$$M \in \mathrm{B}^k \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \in W^k \Leftrightarrow \exists t_1, t_2, ..., t_k \in \mathbf{F},\ \vec{r} - \vec{r}_0 = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_k\vec{a}_k.$$

Таким образом, радиус-вектор $\vec{r}$ произвольной точки M плоскости может быть записан в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_k\vec{a}_k. \tag{4}$$

Возникает биективное отображение

$$\vec{r} : \mathbf{F}^k \to \overrightarrow{\mathrm{B}^k}, (t_1, t_2, ..., t_k) \mapsto \vec{r}_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + ... + t_k\vec{a}_k \tag{5}$$

k-й декартовой степени $\mathbf{F}^k$ основного поля $\mathbf{F}$ на множество радиус-векторов $\overrightarrow{\mathrm{B}^k}$ всех точек плоскости B^k. Отображение (5) является параметризацией множества $\overrightarrow{\mathrm{B}^k}$, оно называется ***векторно-параметрическим*** заданием плоскости B^k. Допуская вольность речи, равенство (5) называют также ***векторно-параметрическим уравнением*** плоскости B^k, символы $t_1, t_2, ..., t_k$ из этого равенства – ***параметрами***.

Пусть теперь $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n) -$ аффинный репер в пространстве A^n; $(x_1^0, ..., x_n^0) -$ координаты в этом репере начальной точки M_0 плоскости B^k (совпадающие с координатами радиус-вектора $\vec{r}_0$ в базисе $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$); $(x_1, ..., x_n) -$ координаты произвольной точки $M \in \mathrm{A}^n$ (совпадающие с координатами радиус-вектора $\vec{r}$ в базисе $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$); $(\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj})$, $j \in \{1, 2, ..., k\}, -$ координаты вектора $\vec{a}_j$ в базисе $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$. Используя эти обозначения, перепишем векторное равенство (4) в координатах. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t_1\alpha_{11} + t_2\alpha_{12} + ... + t_k\alpha_{1k}, \\ x_2 = x_2^0 + t_1\alpha_{21} + t_2\alpha_{22} + ... + t_k\alpha_{2k}, \\ \qquad ... \\ x_n = x_n^0 + t_1\alpha_{n1} + t_2\alpha_{n2} + ... + t_k\alpha_{nk}. \end{cases} \tag{6}$$

Возникает биективное отображение k-й декартовой степени $\mathbf{F}^k$ основного поля $\mathbf{F}$ на множество $\tilde{\mathrm{B}}^k$ координат всех точек плоскости B^k

$$x : \mathbf{F}^k \to \tilde{\mathrm{B}}^k, t = (t_1, t_2, ..., t_k) \mapsto (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), \tag{5}$$

где $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ определяются из равенств (6):

$x_i(t) = x_i^0 + t_1\alpha_{i1} + t_2\alpha_{i2} + ... + t_k\alpha_{ik},\ i \in \{1, 2, ..., n\}.$

Равенства (6) называются также ***параметрическими уравнениями в координатах*** плоскости B^k. Наиболее часто встречается координатно-параметрическое задание прямой, оно имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + tl_1, \\ x_2 = x_2^0 + tl_2, \\ \quad ... \\ x_n = x_n^0 + tl_n. \end{cases}$$

Здесь $(x_1^0, ..., x_n^0)$ – координаты начальной точки прямой; $(l_1, ..., l_n)$ – координаты *направляющего вектора* прямой – базисного вектора направляющего пространства.

Если $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – аффинный репер в пространстве A^n, то любое уравнение $f(x_1, ..., x_n) = 0$ с n неизвестными задает в A^n фигуру, состоящую из всех точек пространства, координаты которых являются решениями этого уравнения. Выясним, какую фигуру задает линейное уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{7}$$

где $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbf{F}$.

Мы считаем, что хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в уравнении (8) отличен от нуля. Пусть для определенности $a_n \neq 0$. Тогда

$$x_n = \frac{b}{a_n} - \frac{a_1}{a_n}x_1 - ... - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_{n-1} \ -$$

общее решение уравнения (6), здесь $x_1, ..., x_{n-1}$ – свободные неизвестные, каждый из которых независимо от других может принимать любые значения из поля $\mathbf{F}$. Эти неизвестные примем за параметры, обозначив $t_i = x_i, i \in \{1, ..., n-1\}$. Теперь все решения уравнения (6) можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_1 = t_1, \\ \quad ... \\ x_{n-1} = t_{n-1}, \\ x_n = \dfrac{b}{a_n} - \dfrac{a_1}{a_n}t_1 - ... - \dfrac{a_{n-1}}{a_n}t_{n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Сравнивая (6) с (8), можно утверждать, что равенства (8) являются параметрическими уравнениями гиперплоскости $\pi_{n-1} = M_0 + \mathbf{W}^{n-1}$ в пространстве A^n. Здесь $M_0(0, ..., 0, \frac{b}{a_n})$ – начальная точка этой гиперплоскости, а базис направляющего пространства $\mathbf{W}^{n-1}$ образуют векторы

$\vec{b}_1(1,0,...,0,-\frac{a_1}{a_n}),\ \vec{b}_2(0,1,...,0,-\frac{a_2}{a_n}),...,\vec{b}_{n-1}(0,...,0,1,-\frac{a_{n-1}}{a_n})$ или векторы $\vec{c}_1(a_n,0,...,0,-a_1),\ \vec{c}_2(0,a_n,...,0,-a_2),...,\vec{c}_{n-1}(0,...,0,a_n,-a_{n-1})$.

Заметим, что соответствующее (8) однородное уравнение

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0 \tag{9}$$

задает подпространство $\mathbf{W}^{n-1}$ векторного пространства $\mathbf{V}^n$ (если зафиксировать в $\mathbf{V}^n$ базис $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1.4.6. *Пусть* $(O,\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ *– аффинный репер в пространстве* A^n. *Каждое линейное уравнение* (7), *в котором есть отличные от нуля коэффициенты при неизвестных, задает гиперплоскость* π_{n-1} *в пространстве* A^n. *Направляющее пространство* $\mathbf{W}^{n-1}$ *гиперплоскости* π_{n-1} *задается в базисе* $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ *соответствующим однородным уравнением* (9).

Уравнение (7) называется ***общим уравнением*** гиперплоскости π_{n-1} в репере $(O,\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$.

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{10}$$

Эта система может быть *несовместной* (не иметь решений). Тогда (10) задает пустое множество. Пусть система совместна. Тогда каждое из уравнений системы задает плоскость в пространстве A^n (гиперплоскость либо все пространство A^n). Следовательно, система (9) задает пересечение m плоскостей и поскольку оно непустое, то в соответствие с утверждением 6.3.2, система (10) задает плоскость B^k в пространстве A^n, направляющее пространство которой $\mathbf{W}^k$ есть пересечение направляющих пространств плоскостей, задаваемых каждым из уравнений системы (10). Таким образом, подпространство $\mathbf{W}^k$ задается (при фиксировании в $\mathbf{V}^n$ базиса $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$) соответствующей однородной системой:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{11}$$

Из теории систем линейных уравнений известно, что число k, т. е. размерность $\mathbf{W}^k$ (а также плоскости B^k), вычисляется по формуле:

$$k=n-r,$$

где r – ранг матрицы (a_{ij}).

Определение 1.4.6. *Пусть* $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – *аффинный репер в пространстве* A^n. *Если система уравнений* (10) *задает плоскость* B^k *в пространстве* A^n, *то говорят, что* (9) – ***общие уравнения*** *плоскости* B^k *в репере* $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

Покажем, что верно и обратное, т.е. любая плоскость в данном репере $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ аффинного пространства A^n может быть задана общими уравнениями. Пусть $\mathrm{B}^k = M_0 + \mathbf{W}^k$ – k-мерная плоскость в n-мерном аффинном пространстве A^n. Из теории систем линейных уравнений известно, что при фиксировании базиса $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ векторного пространства $\mathbf{V}^n$ для любого подпространства $\mathbf{W}^k$ существует однородная система линейных уравнений (10), задающая $\mathbf{W}^k$. Пусть начальная точка M_0 плоскости B^k имеет в репере $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ координаты $(x_1^0, ..., x_n^0)$. Для каждого $i \in \{1, ..., m\}$ определим элемент $b_i \in \mathbf{F}$ равенством:

$$b_i = a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + ... + a_{in}x_n^0$$

и рассмотрим систему линейных уравнений (10), в правых частях которых стоят определенные выше b_i. Полученная система (10) совместна ($(x_1^0, ..., x_n^0)$ – решение системы), следовательно, как отмечено выше, она задает некоторую плоскость в пространстве A^n, направляющее пространство которой задается соответствующей однородной системой, т. е. совпадает с $\mathbf{W}^k$. Если заметить, что эта плоскость проходит через точку M_0 ($(x_1^0, ..., x_n^0)$ – решение системы), то можно утверждать, что система (10) задает плоскость B^k. Проведенные рассуждения показывают, что справедлива следующая теорема, устанавливающая тесную связь между плоскостями в конечномерных аффинных пространствах и системами линейных уравнений.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – *репер в аффинном пространстве* A^n. *Тогда*:

(i) *каждая совместная система линейных уравнений* (10) *задает в данном репере плоскость* B^k, *направляющее пространство которой задается соответствующей однородной системой* (11). *Размерность плоскости определяется формулой* $k = n - rang(a_{ij})$;

(ii) *любая плоскость в пространстве* A^n *может быть задана в данном репере системой линейных уравнений* (10).

Упражнение (i) *Докажите, что минимальное число уравнений в системе* (9), *задающей* k*-мерную плоскость в* n*-мерном аффинном пространстве, равно* $n-k$.

(ii) *Пусть* $(O, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ – *репер в аффинном пространстве* A^n. *Запишите параметрические и общие уравнения координатных плоскостей, определяемых этим репером.*

1.4.3. Аффинная оболочка множества точек. Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве A^n

В аффинном пространстве можно определить аналог линейной оболочки подмножества векторов векторного пространства.

Определение 1.4.7. *Пусть* S *– непустое подмножество аффинного пространства* A *.* ***Аффинной оболочкой*** $Aff(S)$ *множества* S *называется наименьшая по включению плоскость в* A*, содержащая* S*.*

Термин *наименьшая по включению* означает, что $Aff(S)$ содержится в каждой плоскости, содержащей множество S. Аффинная оболочка существует для любого непустого подмножества S. Действительно, семейство $(\mathrm{B}_i)_{i\in I}$, $S \subset \mathrm{B}_i\ \forall i \in I$, всех плоскостей в A, содержащих S, не пусто, поскольку все аффинное пространство A содержит S, т.е. является одной из таких плоскостей. Рассмотрим пересечение этого семейства $\mathrm{B} = \bigcap\limits_{i\in I}\mathrm{B}_i$. Поскольку множество S содержится в каждой плоскости B_i, то $S \subset \mathrm{B}$ и, следовательно, $\mathrm{B} \neq \varnothing$. Согласно утверждению 1.4.2, $\mathrm{B} = \bigcap\limits_{i\in I}\mathrm{B}_i$ – плоскость в A , содержащая множество S. Кроме того, по построению, плоскость B содержится в каждой плоскости, содержащей S, т.е. является наименьшей из таких плоскостей. Таким образом, $\mathrm{B} = Aff(S)$.

Рассмотрим подробнее аффинную оболочку конечного множества точек, содержащего $k+1$ точку: $S = \{M_0,...,M_k\}, k \in \{0,1,...\}$. Пусть B – плоскость с начальной точкой M_0 и направляющим подпространством $L(\overrightarrow{M_0M_1},...,\overrightarrow{M_0M_k})$, являющимся линейной оболочкой векторов $\overrightarrow{M_0M_1},...,\overrightarrow{M_0M_k}$. Плоскости B , очевидно, принадлежат все точки $M_0,...,M_k$, а сама она содержится в любой плоскости, содержащей точки $M_0,...,M_k$. Следовательно, $\mathrm{B} = Aff(S)$, в частности, направляющее пространство аффинной оболочки $Aff(M_0,...,M_k)$ совпадает с линейной оболочкой $L(\overrightarrow{M_0M_1},...,\overrightarrow{M_0M_k})$. Отсюда следует, что $\dim Aff(M_0,...,M_k) \le k$. При максимально возможном значении этой размерности, т.е. в случае, когда векторы $\overrightarrow{M_0M_1},...,\overrightarrow{M_0M_k}$ линейно независимы, используют следующую терминологию.

Определение 1.4.8. *Точки* $M_0,...,M_k$ *аффинного пространства* A *называются* ***аффинно независимыми*** (*или* ***точками общего положения***)*, если* $\dim Aff(M_0,...,M_k) = k$.

Если B и P – плоскости в аффинном пространстве, то, как легко видеть, их объединение $\mathrm{B}\bigcup\mathrm{P}$ в общем случае не является плоскостью. Например, объединение двух различных прямых в пространстве $\mathbf{E}^3$ не является ни прямой ни плоскостью, ни совпадает со всем пространством. Эта ситуация такая же, как для подпространств $\mathbf{W},\mathbf{U}$ векторного пространства $\mathbf{V}$. В линейной алгебре объединение $\mathbf{W}\bigcup\mathbf{U}$ заменяется операцией суммы подпространств $\mathbf{W}+\mathbf{U}$, в результате которой получают наименьшее по включению подпространство, содержащее $\mathbf{W}$ и $\mathbf{U}$. Точно так же поступают в геометрии.

Определение 1.4.9. *Пусть* B *и* P *– плоскости в аффинном пространстве* A. ***Суммой*** *плоскости* B *и плоскости* P *называется плоскость* $\mathrm{B}+\mathrm{P}$, *являющаяся аффинной оболочкой объединения* $\mathrm{B}\bigcup\mathrm{P}$:

$$\mathrm{B}+\mathrm{P} = Aff(\mathrm{B}\bigcup\mathrm{P}).$$

Итак, сумма плоскостей $\mathrm{B}+\mathrm{P}$ – это наименьшая по включению плоскость, содержащая обе плоскости B и P. Поскольку $\mathrm{B}\bigcup\mathrm{P}\subset\mathrm{B}+\mathrm{P}$, то в качестве начальной точки плоскости $\mathrm{B}+\mathrm{P}$ можно брать любую точку одной из плоскостей, B или P. Что касается направляющего пространства плоскости $\mathrm{B}+\mathrm{P}$, то оно описывается в следующем утверждении.

Утверждение 1.4.7. *Пусть* B *и* P *– плоскости в аффинном пространстве* A *с направляющими пространствами соответственно* $\mathbf{W}$ и $\mathbf{U}$; $\mathbf{T}$ *– направляющее пространство суммы* $\mathrm{B}+\mathrm{P}$.

(i) *Если* $\mathrm{B}\bigcap\mathrm{P}\neq\varnothing$, *то* $\mathbf{T}=\mathbf{W}+\mathbf{U}$.

(ii) *Если* $\mathrm{B}\bigcap\mathrm{P}=\varnothing$, *то* $\mathbf{T}=\mathbf{W}+\mathbf{U}+L(\overrightarrow{MN})$, *где* M *и* N *– произвольные точки соответственно плоскостей* B *и* P.

Следствие. *Пусть* $\mathrm{B} = M+\mathbf{W}$ *и* $\mathrm{P} = N+U$ *– конечномерные плоскости в аффинном пространстве* A; $k=\dim\mathrm{B}$, $m=\dim\mathrm{P}$, $d=\dim(\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U})$.

Тогда плоскость $\mathrm{B}+\mathrm{P}$ *также конечномерна и ее размерность* $s=\dim(\mathrm{B}+\mathrm{P})$ *вычисляется следующим образом*:

(i) *если* $\mathrm{B}\bigcap\mathrm{P}\neq\varnothing$, *то* $s=k+m-d$;

(ii) *если* $\mathrm{B}\bigcap\mathrm{P}=\varnothing$, *то* $s=k+m-d+1$.

Доказательство. Поскольку размерности плоскостей определяются как размерности их направляющих пространств, то формулы (i) и (ii) вытекают из соответствующих формул линейной алгебры с учетом доказанного выше утверждения 1.4.7. В случае (i) работает формула

$$\dim(\mathbf{W}+\mathbf{U})=\dim\mathbf{W}+\dim\mathbf{U}-\dim(\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}).$$

В случае (ii) принимаем в расчет то, что $\overrightarrow{MN}\notin\mathbf{W}+\mathbf{U}$, следовательно, $\mathbf{W}+\mathbf{U}+L(\overrightarrow{MN})=(\mathbf{W}+\mathbf{U})\oplus L(\overrightarrow{MN})$.▶

Определение 1.4.10. *Пусть* B *и* P *– плоскости в аффинном пространстве* A; k,m,s,d, $(k\leq m)$ *– числа, определенные в формулировке следствия* 6.2.1. *Упорядоченная четверка чисел* (k,m,s,d) *называется* ***характеристикой*** *пары плоскостей* (B,P).

Пусть $\mathrm{B} = M_0+\mathbf{W}$ и $\mathrm{P} = N_0+\mathbf{U}$ – плоскости в аффинном пространстве A.

Проанализируем их возможное взаимное расположение. Будем различать несколько случаев, принимая в расчет пересечение $\mathrm{B}\bigcap\mathrm{P}$ самих плоскостей и пересечение $\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}$ их направляющих пространств. Отметим, прежде всего, что если плоскости пересекаются, т. е. $\text{В}\bigcap\text{Р} \neq \varnothing$, то, их пересечение есть плоскость с направляющим пространством $\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}$.

Пусть плоскости не пересекаются, т.е. $\text{В}\bigcap\text{Р} = \varnothing$. Рассмотрим пересечение их направляющих пространств $\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}$, которое всегда не пусто.

Если пересечение направляющих пространств максимально возможное, т.е. $\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}=\mathbf{W}$ или $\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}=\mathbf{U}$, (что эквивалентно соответственно условиям $\mathbf{W}\subset\mathbf{U}$ или $\mathbf{U}\subset\mathbf{W}$), то будем говорить, что плоскости В и Р ***параллельны***. Можно, для наглядности, по аналогии с пространством $\mathbf{E}^3$ считать, что ненулевой вектор направляющего пространства задает в плоскости *направление* . Тогда плоскости параллельны, если они не пересекаются, но все направления одной плоскости являются направлениями другой плоскости.

Если пересечение направляющих пространств минимально, т.е. $\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}=\{\vec{0}\}$ (у плоскостей В и Р нет общих направлений), то будем говорить, что плоскости В и Р ***скрещиваются***.

Возможная альтернатива для двух описанных выше ситуаций следующая: для направляющих пространств выполняется условия:

$$\mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}\neq\{\vec{0}\},\ \mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}\neq\mathbf{W},\ \mathbf{W}\bigcap\mathbf{U}\neq\mathbf{U}$$

(у непересекающихся плоскостей В и Р есть общие направления, но множество таких направлений не совпадает с множеством направлений ни одной из плоскостей). В таком случае будем говорить, что плоскости В и Р ***частично параллельны***.

Отметим, что по характеристике (k,m,s,d) пары В и Р конечномерных плоскостей определяются размерности плоскостей (k и m), а также тип их взаимного расположения:

- плоскости пересекаются, если $s=k+m-d$ и не пересекаются, если $s=k+m-d+1$;
- плоскости параллельны, если $d=k$ и $s=m+1$;
- плоскости частично параллельны, если $0<d<k$ и $s=k+m-d+1$;
- плоскости скрещиваются, если $d=0$ и $s=k+m+1$.

Упражнение. *Докажите, что существует шесть различных вариантов* (*с различными характеристиками*) *взаимного расположения пары двумерных плоскостей и что все они реализуются в пятимерном аффинном пространстве. Выпишите характеристики пар плоскостей в каждом из шести случаев.*

1.5. Евклидовы точечные пространства

1.5.1. Понятие евклидова точечного пространства

Для понимания этого раздела нужно знать понятие и основные свойства евклидова векторного пространства. Необходимый материал можно найти в учебных пособиях по линейной алгебре либо в [3], §7.1.

Определение 1.5.1. Евклидовым точечным пространством *называется вещественное аффинное пространство* $\mathbf{E}$*, связанное с евклидовым векторным пространством* $\mathbf{V}$.

Примерами евклидовых точечных пространств являются рассматриваемые в первой части курса прямая $\mathbf{E}^1$, плоскость $\mathbf{E}^2$ и пространство $\mathbf{E}^3$, связанные соответственно с евклидовыми векторными пространствами $\mathbf{V}(\mathbf{E}^1)$, $\mathbf{V}(\mathbf{E}^2)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{E}^3)$. Еще одним важным примером является арифметическое аффинное пространство $\mathbf{R}^n$ вещественных строк длины n, связанное с векторным пространством $\mathbf{V}=\mathbf{R}^n$, в котором скалярное произведение задается формулой:

$$g((l_1,...,l_n),(m_1,...,m_n)) = l_1m_1 + ... + l_nm_n .$$

Пусть $\mathbf{E}^n$ обозначает произвольное n-мерное евклидово точечное пространство, связанное с евклидовым векторным пространством $\mathbf{V}^n$. Поскольку пространство $\mathbf{E}^n$ является вещественным аффинным пространством специального типа, к нему относится все то, что изложено в главе 6 для произвольных n-мерных аффинных пространств, в том числе в § 6.8. Далее мы будем говорить о дополнительных свойствах пространства $\mathbf{E}^n$, вытекающих из его специфики. Для краткости *евклидово точечное пространство* будем называть просто *евклидовым пространством*.

Прежде всего, в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ можно определить расстояние.

Определение 1.5.2. *Для любых точек* $A,B\in\mathbf{E}^n$ ***расстоянием*** *от точки* A *до точки* B *называется число* $d(A,B)$*, равное длине вектора* $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| \tag{1}$$

Утверждение 1.5.1. *Множество* $\mathbf{E}^n$ *с расстоянием, заданным формулой* (1)*, является* ***метрическим пространством.*** *Это означает, что для любых точек* $A,B,C\in\mathbf{E}^n$ *верно*:

(i) $d(A,B)\geq 0$; $(d(A,B)=0)\Leftrightarrow(A=B)$;

(ii) $d(A,B)=d(B,A)$;

(iii) $d(A,B)+d(B,C)\geq d(A,C)$.

Справедливость свойств (i) – (iii) для расстояния следует из свойств длины вектора.

Среди множества всех аффинных реперов в $\mathbf{E}^n$ можно выделить ***ортонормированные реперы***: $(O,\vec{i}_1,...,\vec{i}_n)$. Здесь O – фиксированная точка пространства $\mathbf{E}^n$, $(\vec{i}_1,...,\vec{i}_n)$ – ортонормированный базис евклидова векторного пространства $\mathbf{V}^\mathbf{n}$. Если $A(x_1,...,x_n)$, $B(y_1,...,y_n)$ – точки евклидова пространства, заданные своими координатами в ортонормированном репере, то расстояние между ними равно $d(A,B)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+...+(y_n-x_n)^2}$.

Пусть $\mathrm{B}^{n_1} = M_0 + W^{n_1}, \mathrm{B}^{n_2} = N_0 + W^{n_2}$ – плоскости в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Напомним, мы различаем четыре различных типа их взаимного расположения. Они могут пересекаться ($\mathrm{B}^{n_1} \bigcap \mathrm{B}^{n_2} \neq \varnothing$) и тогда их пересечение есть плоскость с направляющим пространством $W^{n_1} \bigcap W^{n_2}$. Если же плоскости не пересекаются ($\mathrm{B}^{n_1} \bigcap \mathrm{B}^{n_2} = \varnothing$), то они могут скрещиваться, либо быть параллельными, либо частично параллельными. В пространстве $\mathbf{E}^n$ добавляется еще один тип взаимного расположения плоскостей.

Определение 1.5.3. *Плоскости* $\mathrm{B}^{n_1} = M_0 + W^{n_1}$ *и* $\mathrm{B}^{n_2} = N_0 + W^{n_2}$ *в евклидовом пространстве* $\mathbf{E}^n$ *называются* ***ортогональными*** (*или* ***перпендикулярными***), *если ортогональны их направляющие пространства, т.е.* $W^{n_1} \perp W^{n_2}$. *Для перпендикулярных плоскостей используем обозначение* $\mathrm{B}^{n_1} \perp \mathrm{B}^{n_2}$.

Обращаем внимание читателя на то, что в данном случае терминология не во всех случаях совпадает с той, которая принята в средней школе для пространства $\mathbf{E}^3$. Понятия согласованы в случаях, когда речь идет о перпендикулярности двух прямых либо о перпендикулярности прямой и (двумерной) плоскости в $\mathbf{E}^3$. Однако две перпендикулярные двумерные плоскости в $\mathbf{E}^3$ (в школьной терминологии) не являются таковыми в смысле определения 1.5.3. Далее мы уточним это различие, определив понятие величины угла между двумя плоскостями в $\mathbf{E}^n$.

Утверждение 1.5.2. *Две ортогональные плоскости в пространстве* $\mathbf{E}^n$ *либо скрещиваются, либо пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Если $\mathrm{B}^{n_1} = M_0 + W^{n_1}$ и $\mathrm{B}^{n_2} = N_0 + W^{n_2}$ – ортогональные плоскости, то $W^{n_1} \perp W^{n_2}$ и, как отмечено в конце § 7.1, $W^{n_1} \bigcap W^{n_2} = \{\vec{0}\}$. Следовательно, если $\mathrm{B}^{n_1} \bigcap \mathrm{B}^{n_2} \neq \varnothing$, то $\mathrm{B}^{n_1} \bigcap \mathrm{B}^{n_2}$ – плоскость нулевой размерности, т.е. точка. Если же $\mathrm{B}^{n_1} \bigcap \mathrm{B}^{n_2} = \varnothing$, то плоскости скрещиваются.

1.5.2. Расстояние между плоскостями

Рассмотрим важную задачу о вычислении расстояния между двумя плоскостями $\mathrm{B}^{n_1} = M_0 + W^{n_1}$ и $\mathrm{B}^{n_2} = N_0 + W^{n_2}$ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Согласно теореме линейной алгебры евклидово векторное пространство $\mathbf{V}^n$ есть прямая сумма подпространства $W^{n_1} + W^{n_2}$ и его ортогонального дополнения $(W^{n_1} + W^{n_2})^{\perp}$:

$$\mathbf{V}^n = (W^{n_1} + W^{n_2}) \oplus (W^{n_1} + W^{n_2})^{\perp}. \tag{2}$$

Рассмотрим для данных плоскостей вектор-мостик $\overrightarrow{M_0 N_0}$. В соответствии с разложением (2) этот вектор (единственным образом) раскладывается в сумму:

$$\overrightarrow{M_0 N_0} = \vec{b} + \vec{c},\ \vec{b} \in W^{n_1} + W^{n_2},\ \vec{c} \in (W^{n_1} + W^{n_2})^{\perp}. \tag{3}$$

Покажем, что $d(\mathrm{B}^{n_1}, \mathrm{B}^{n_2}) = |\vec{c}|$. Прежде всего, отметим, что существуют точки $P \in \mathrm{B}^{n_1}, Q \in \mathrm{B}^{n_2}$ такие, что $\overrightarrow{PQ} = \vec{c}$. Так как $\vec{b} \in W^{n_1} + W^{n_2}$, то $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$, где $\vec{b}_1 \in W^{n_1}, \vec{b}_2 \in W^{n_2}$. В плоскости B^{n_1} существует точка P такая, что $\overrightarrow{M_0P} = \vec{b}_1$, в плоскости B^{n_2} существует точка Q такая, что $\overrightarrow{N_0Q} = -\vec{b}_2$. Тогда $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM_0} + \overrightarrow{M_0N_0} + \overrightarrow{N_0Q} = -\vec{b}_1 + (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{b}_2 = \vec{c}$ (рис. 7.1)

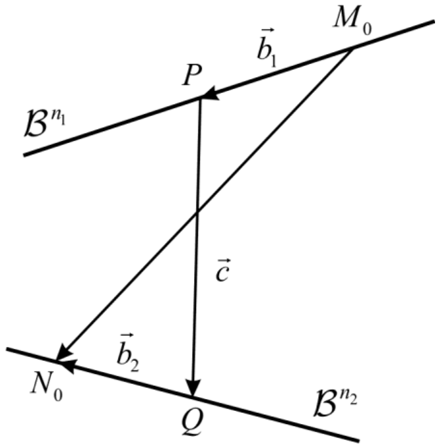


Рис. 5.1

Пусть $M \in \mathrm{B}^{n_1}, N \in \mathrm{B}^{n_2}$ – произвольные точки рассматриваемых плоскостей. Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} = \vec{a}_1 + \vec{c} + \vec{a}_2 = \vec{a} + \vec{c}$. Здесь

$$\overrightarrow{MP} = \vec{a}_1 \in W^{n_1},\ \overrightarrow{QN} = \vec{a}_2 \in W^{n_2},\ \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \in W^{n_1} + W^{n_2}.$$

Имеем:

$$d(M,N) = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{(\vec{a}+\vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{c} + \vec{c}^2} =$$
$$= \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{c}^2} \geq \sqrt{\vec{c}^2} = |\vec{c}| = d(P,Q).$$

При вычислениях мы учли, что $\vec{a} \perp \vec{c}$, т.е. $\vec{a}\vec{c} = 0$. Таким образом, расстояние между любыми точками плоскостей B^{n_1} и B^{n_2} не меньше расстояния между точками P и Q. Это и означает, что $d(\mathrm{B}^{n_1}, \mathrm{B}^{n_2}) = d(P,Q) = |\vec{c}|$.

Учитывая проведенные выше рассуждения, можно коротко сформулировать порядок действий для вычисления расстояния между двумя плоскостями:

1) по двум точкам M_0, N_0 плоскостей строится вектор-мостик $\overrightarrow{M_0N_0}$;

2) для вектора $\overrightarrow{M_0N_0}$ находится составляющая $\vec{c}$ в его разложении (3);

3) вычисляется длина вектора $\vec{c}$. Полученное число и есть искомое расстояние.

Рассмотрим подробнее частный случай, когда одна из плоскостей нульмерна, т.е. является точкой. Пусть $\mathrm{B}^k = N_0 + W^k$ k-мерная плоскость и $(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_k)$ – базис направляющего пространства W^k. Для вычисления расстояния от точки M_0 до плоскости B^k поступают обычно следующим образом. Пусть разложение (3) вектора-мостика имеет вид: $\overrightarrow{M_0N_0} = \vec{a} = \vec{b} + \vec{c},\ \vec{b} \in W^k,\ \vec{c} \in (W^k)^{\perp}$. Представляем вектор $\vec{b}$ в виде $\vec{b} = \alpha_1\vec{b}_1 + ... + \alpha_k\vec{b}_k, \alpha_i \in \mathbf{R}$ и записываем условия перпендикулярности вектора $\vec{c} = \vec{a} - \alpha_1\vec{b}_1 - \ldots - \alpha_k\vec{b}_k$ и базисных векторов $\vec{b}_i$: $\vec{c}\vec{b}_i = 0, i \in \{1,\ldots,k\}$. Таким образом, числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} \alpha_1\vec{b}_1^2 + \alpha_2(\vec{b}_1\vec{b}_2) + \ldots + \alpha_k(\vec{b}_1\vec{b}_k) = \vec{b}_1\vec{a}, \\ \alpha_1(\vec{b}_2\vec{b}_1) + \alpha_2\vec{b}_2^2 + \ldots + \alpha_k(\vec{b}_2\vec{b}_k) = \vec{b}_2\vec{a}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1(\vec{b}_k\vec{b}_1) + \alpha_2(\vec{b}_k\vec{b}_2) + \ldots + \alpha_k\vec{b}_k^2 = \vec{b}_k\vec{a}. \end{cases} \tag{4}$$

Совокупность равенств (4) можно рассматривать как систему линейных уравнений с неизвестными $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. Матрица этой системы есть матрица Грама $G(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_k) = (\vec{b}_i\vec{b}_j)_{i,j=1,\ldots,k}$) попарных скалярных произведений линейно-независимых векторов $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_k$. Эта матрица невырожденна ($\det G(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_k) > 0$) и, следовательно, система (4) имеет единственное решение. Вычислив $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, находим вектор $\vec{c}$, его длина и есть расстояние от точки M_0 до плоскости $\mathrm{B}^k = N_0 + W^k$.

Приведем еще формулу для вычисления расстояния от точки $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ до гиперплоскости π, заданными соответственно координатами и уравнением

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta \tag{5}$$

в некотором ортонормированном репере:

$$d(M_0,\pi) = \frac{|\alpha_1 x_1^0 + \ldots + \alpha_n x_n^0 - \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}}. \tag{6}$$

Эта формула получается по аналогии со случаями размерности 2 и 3 (глава 2). Сначала заметим, что вектор $\vec{n}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – нормальный вектор гиперплоскости π, т.е. ортогональный направляющему подпространству плоскости π. Далее записываем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной π:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t\alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n^0 + t\alpha_n. \end{cases} \tag{7}$$

Решая систему уравнений, составленную из уравнений (5) и (7), находим значение параметра $t_0 = -\dfrac{\alpha_1 x_1^0 + \ldots + \alpha_n x_n^0 - \beta}{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2}$, соответствующее основанию N_0 перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на гиперплоскость π. Расстояние от точки M_0 до гиперплоскости π равно расстоянию между точками M_0 и N_0. Это расстояние вычисляется по формуле (6).

2. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

2.1. Темы и задания для лабораторных занятий (номера [6] и [7] соответствуют источникам в перечне литературы).

2.1.1. Фигуры и уравнения

Занятие 1.

Фигура *– любое множество точек* Φ *пространства* $\mathbf{E}^3$*, в том числе и пустое. Аналитическая геометрия изучает фигуры с помощью алгебры, используя* ***метод координат****. Фигура называется* ***плоской****, если существует плоскость, в которой лежат все точки фигуры.*

Вначале будем рассматривать плоские фигуры, лежащие в плоскости $\mathbf{E}^2$. *Если Oxy – система координат на плоскости, то любая фигура* $\Phi \subset \mathbf{E}^2$ *может быть задана уравнением с двумя неизвестными*:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Здесь F – функция двух вещественных переменных $x, y \in \mathbb{R}$, т.е. некоторое правило, по которому упорядоченной паре вещественных чисел (x, y) из области определения $\mathbf{D}(F)$ функции F ставиться в соответствие число $F(x, y) \in \mathbb{R}$. Тот факт, что (1) – уравнение фигуры Φ означает, по определению, что Φ состоит из всех точек плоскости, координаты которых являются решениями уравнения (1), т.е.

$$\Phi = \{M(c_1, c_2) \in \mathbf{E}^2 \,|\, (c_1, c_2) \text{ - решение } (1)\}.$$

Любое уравнение (1) *задает на плоскости вполне определенную фигуру, однако одна и та же фигура может быть задана различными уравнениями.*

Далее будем решать задачи двух типов: имея уравнение (1), определять (рисовать) соответствующую фигуру и наоборот для данной фигуры составлять уравнение (1), которое ее задает.

Нарисуйте фигуры, которые задаются уравнениями:

1. $x + y - 2 = 0$;
2. $y^2 - 4y - 2x + 4 = 0$;
3. $x^2 + y^2 + x + y = 0$;
4. $xy + 2 = 0$.

Составьте уравнения следующих фигур:

1. вертикальной (горизонтальной) прямой, проходящей через точку $M_0(2, -3)$;
2. произвольной окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом $r > 0$.
3. точки $M_0(2, -3)$.

Задание на дом.

1. *Нарисуйте фигуры, которые задаются условиями*:

1) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$;

2) $|x-2|+|y+2|=2$;

3) $\max\{|x-2|,|y+2|\}=2$.

2. *Составьте уравнение двоеточия.*

3. *Пусть* F_1 и F_1 *– точки плоскости, расстояние между которыми равно* $2c>0$. *Составьте уравнение фигуры, состоящей из всех точек плоскости, для которых разность расстояний до* F_1 и F_1 *равна* $2a,\ a<c$. *Нарисуйте данную фигуру.*

Основная задача. *Пусть* F_1 и F_1 *– точки плоскости, расстояние между которыми равно* $2c>0$. *Составьте уравнение фигуры, состоящей из всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до* F_1 и F_1 *равна* $2a,\ a>c$. *Нарисуйте данную фигуру.*

Задание на дом.

1. *Нарисуйте фигуры, которые задаются условиями*:

1) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$;

2) $|x-2|+|y+2|=2$;

3) $\max\{|x-2|,|y+2|\}=2$.

2. *Составьте уравнение двоеточия.*

3. *Пусть* F_1 и F_1 *– точки плоскости, расстояние между которыми равно* $2c>0$. *Составьте уравнение фигуры, состоящей из всех точек плоскости, для которых разность расстояний до* F_1 и F_1 *равна* $2a,\ a<c$. *Нарисуйте данную фигуру.*

Занятие 2.

1. *Проверка домашнего задания.*

2. *Определить полярную систему координат. Записать связь между полярными и декартовыми координатами.* (см. § 6.1 П.С. Моденов, А.С. Пархоменко).

3. *Задачи*.

1) Напишите в полярной системе координат уравнения а) окружности с центром в начале координат; б) вертикальной (горизонтальной) прямой, проходящей через точку $M_0(2,-3)$;

2) Нарисуйте фигуры, заданные уравнениями в полярной системе координат: а) $r=\varphi$; б) $r=\sin n\varphi$; $n=1,2,3,4$.

4. *Определить системы координат в пространстве*: *декартову прямоугольную, сферическую и цилиндрическую. Записать связь между* *сферическими* (*цилиндрическими*) *и декартовыми координатами.* (см. § 6.2 [7]).

***Задание на дом*.**

1. *Нарисуйте фигуру, которая задается в полярной системе координат уравнением* $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

2. *Пусть* F_1 и F_1 – *точки плоскости. Составьте уравнение фигуры, состоящей из всех точек плоскости, для которых отношение расстояний до* F_1 и F_1 *равно* $k > 0$. *Нарисуйте данную фигуру.*

3. *Какая фигура в пространстве в декартовой прямоугольной системе координат задается уравнением* $x^2+y^2 = z^2$?

2.1.2. Векторы

Занятие 3. В аудитории: [7], № 1; 4; 11; 19; 14… На дом: [7], № 8; 22; 15; …

Занятие 4. В аудитории: [7], № 23; 25; 28; 32; 43… На дом: [7], № 26; 42; 29

Занятие 5. (*скалярное произведение векторов*). [6], № 419; 420; 424; 445; М.П.: 144(!); 148… На дом: [6], № 423; 428; 446; М.П.: 145; 149…

Занятия 6 и 7. (*векторное и смешанное произведения векторов*). В аудитории: [6], № 461; 465; 468; 470; 489; 490; М.П.: 175; 196; 209… На дом: [6], № 467; 472; 474; 491; 501; [7], № 177; 197; 208…

Занятие 8. – контрольная работа по векторам.

2.1.3. Прямые и плоскости

Занятия 9 – 11. (*прямая на плоскости*). В аудитории: [7], № 363; 367; 383; 391; 405; 416; 423; 431; 433; 446; 450; 465; 473… На дом: [7], № 364; 368; 387; 406; 418; 424; 434; 451;457; 460; …

Занятия 12 – 14. (*плоскость и прямая в пространстве*). В аудитории: [7], № 491; 492; 500; 504; 530; 534; 539; 567; 580; 578; 606; 585; … На дом: [7], № 514; 512; 520; 532; 537; 569; 582; 583; 604;621; …

Занятие 15. – контрольная работа по прямым и плоскостям.

2.1.4. Фигуры 2 порядка на плоскости

Занятия 16 – 17. В аудитории: [7], № 759; 760; 769; 805 (1, 6, 8, 10); 807(1,.14). На дом: [7], № 761; 762; 733; 805 (3, 7, 11); 807 и др. (каждому студенту индивидуальное задание).

2.1.5. Фигуры второго порядка в пространстве

В аудитории: № 945, 946, 976, 981, 985, 987, 997, 1001, 1102.

На дом: № 950, 947, 975, 979, 986, 988, 998, 1009, 1071, 1149.

2.1.6. Аффинные преобразования и движения

В аудитории: № 1159, 1153, 1163, 1166, 1175, 1187, 1229, 1234, 1102.

На дом: № 1158, 1154, 1171, 1167, 1177, 1188, 1232, 1237.

2.1.7. Плоскости в аффинных и евклидовых пространствах

Работаем в аффинном (евклидовом векторном, евклидовом точечном) пространстве строк $\mathbf{R^n}$ (n = 4,5,…)

1. Выясните, лежат ли точки A, B, C на одной прямой.

1) $A = (2,1,-2,0), B = (1,-3,-3,1), C = (4,9,0,-2);$

2) $A = (-1,0,2,2), B = (2,1,0,4), C = (-2,-1,3,0).$

2. Найдите размерность плоскости $Aff(M_0, M_1, M_2, ...)$, являющейся аффинной оболочкой точек $M_0, M_1, M_2, ...$

1) $M_0 = (0,-1,1,2), M_1 = (-1,4,0,1), M_2 = (-2,1,-3,-1), M_3 = (-1,12,2,2);$

2) $M_0 = (0,1,3,-3), M_1 = (-1,0,2,2), M_2 = (2,1,0,4), M_3 = (-2,-1,3,0), M_4 = (-1,1,2,-2).$

3. Выясните взаимное расположение плоскостей $\mathrm{B} = Aff(A, B, C)$ и $\mathrm{P} = Aff(A_1, B_1, C_1)$:

$A = (2,-1,0,4), B = (-1,2,0,3), C = (3,0,1,1),$

$A_1 = (1,1,1,1), B_1 = (8,-4,-4,6), C_1 = (-3,3,3,0).$

Ответ: частично параллельны.

4. Выясните взаимное расположение плоскостей $\mathrm{B}^2 = M_0 + L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $\mathrm{P}^2 = N_0 + L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$:

$M_0 = (1,1,2,1,0), \vec{a}_1 = (2,1,-1,1,3), \vec{a}_2 = (-3,-1,2,2,-1),$

$N_0 = (0,2,7,7,4), \vec{b}_1 = (-1,2,3,1,1), \vec{b}_2 = (1,-1,1,2,1).$

Ответ: пересекаются в точке $Q_0 = (0,1,3,4,2)$.

В аудитории: № 1612, 1614, 1616, 1166, 1630, 1633 первый вектор $(1,2,2,-1)$, 1640, 1644, 1657, 1662, 1666.

На дом: № 1621, 1613, 1615, 1617, 1641, 1646, 1658, 1659, 1673.

2.1.8. Квадрики в аффинных и евклидовых пространствах

№ 1052, 1046.

3. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

3.1. Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1. **Тема: векторы; операции над векторами**

1. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

2. Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – правый ортонормированный базис. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k},\ \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ \vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$ Найдите: 1) координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; 2) величину угла между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$; 3) длину вектора $\vec{c} \times \vec{b}$; 4) смешанное произведение $\vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

3. Найдите длину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c},$ если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарные векторы такие, что $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2,\ |\vec{c}| = 5;$ величины углов между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также между $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равны $\frac{\pi}{3}$.

4. Объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ равен 10. E, F, G – точки пересечения диагоналей граней параллелепипеда, не проходящих через вершину A. Найдите объем пирамиды $AEFG$.

5. ABC – равносторонний треугольник, вписанный в окружность радиуса R, M – точка окружности, отличная от $A, B, C.$ Найдите $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2$.

Контрольная работа № 2. **Тема: прямые и плоскости**

1. Дана прямая $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 - 2t. \end{cases}$

1) Для прямой Δ найдите: направляющий вектор; нормальный вектор; угловой коэффициент; общее уравнение.

2) Напишите уравнения прямых Δ_1 и Δ_2, параллельных Δ и отстоящих от Δ на расстояние $d = \sqrt{13}$.

3) Найдите точку, симметричную точке $M(6,6)$ относительно прямой Δ **2.** Даны точки $A(3,5)$ и $B(-1,-2)$. На прямой $7x - 6y + 1 = 0$ найдите точку C такую, что площадь треугольника ABC равна 1.

3. Найдите точки пересечения прямой $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ с координатными плоскостями.

4. Луч света проходит через точку $M_1(1,-1,-1)$ и, отразившись от плоскости $\pi: x - y - z - 6 = 0,$ проходит через точку $M_2(-1,2,0)$. Напишите уравнения прямых, содержащих соответственно лучи падающий и отраженный.

***Контрольная работа № 3* . Тема: аффинные преобразования и движения плоскости E^2 и пространства E^3**

1. В какие прямые перейдут координатные оси при повороте плоскости на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг точки $M_0(-1,3)$?

2. Найдите инвариантные прямые аффинного преобразования f:

$$f:\begin{cases} x' = y-9, \\ y' = 9x+1. \end{cases}$$

Как запишется преобразование в системе координат, в которой координатными осями являются инвариантные прямые?

3. Пусть Oxy – прямоугольная система координат на плоскости. Напишите формулы, задающие композицию двух движений: $f = f_2 \circ f_1$, где f_1 – симметрия плоскости относительно оси Ox, f_2 – симметрия плоскости относительно прямой, проходящей через начало координат и составляющей угол 120° с осью Ox.

4. Докажите, что плоскость $x-y=0$ пересекает поверхность $2y^2+z^2-2x=0$ по окружности. Найдите центр и радиус этой окружности.

5. Пусть f_1, f_2, f_3, f_4 – симметрии плоскости $\mathbf{E^2}$ относительно прямых. Композиция этих отображений $f = f_1 f_2 f_3 f_4$ может быть одним из следующих преобразований:

1) *параллельный перенос*;
2) *поворот плоскости вокруг неподвижной точки*;
3) *симметрия относительно прямой*;
4) *скользящая симметрия*;
5) *тождественное отображение*.

***Контрольная работа № 4.* Тема: системы координат в аффинном пространстве; уравнения плоскостей; взаимное расположение плоскостей**

1. Напишите параметрические уравнения плоскости, являющейся аффинной оболочкой точек

$$A=(1,1,-2,2),\ B=(-3,1,4,4),\ C=(-1,2,3,6),\ D=(0,2,-1,3),\ E=(-1,0,1,2).$$

2. Даны плоскости $\mathrm{B}^2 = M_0 + W^2$ и $\mathrm{P}^2 = N_0 + U^2$ в аффинном пространстве $\mathbf{R}^4$.

Здесь $M_0=(2,5,1,5),\ W^2=\langle(1,3,-1,2),(2,4,-3,5)\rangle$;

$$N_0=(0,-3,-1,-2),\ U^2=\langle(1,5,3,5),(2,4,-6,1)\rangle.$$

Определите взаимное расположение этих плоскостей.

3. В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ найдите расстояние от точки $M_0=(8,10,-9,-1)$ до плоскости B, заданной системой уравнений:

$$\mathrm{B}: \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + +3x_3 + 5x_4 = 21, \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

а также ортогональную проекцию данной точки на плоскость B.

4. Пусть $(O, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)$ – ортонормированный репер в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Найдите расстояние от начала координат до гиперплоскости, которая отсекает на координатных осях отрезки величиной $b_1, \ldots, b_n$.

3.2. Варианты индивидуальных заданий по теме: кривые второго порядка на плоскости

1. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$

2. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$4x^2 + 12xy - y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$

3. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 110x - 230y - 475 = 0.$

4. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$5y^2 + 12xy - 12x - 22y - 19 = 0.$

5. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x - 6y - 1 = 0.$

6. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0.$

7. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0.$

8. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0.$

9. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0.$

10. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0.$

11. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 8x + 16y - 2 = 0.$

12. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$

13. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$4x^2 + 12xy - y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$

14. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$

15. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$5y^2 + 12xy - 12x - 22y - 19 = 0.$

16. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$

17. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 116 = 0.$

18. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y + 224 = 0.$

19. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$

20. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

21. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$3x^2 + 4xy + 12x + 16y - 36 = 0.$

22. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$

23. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$4x^2 + 12xy - y^2 - 8x - 12y - 5 = 0.$

24. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$16x^2+24xy+9y^2+110x-230y-475=0.$

25. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$5y^2+12xy-12x-22y-19=0.$

26. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.

$5x^2+4xy+2y^2-8x-6y-1=0.$

3.3. Варианты итогового тестирования по дисциплине «Геометрия»

Вариант 1

№ п/п	Содержание вопроса	Варианты ответа
1.	Даны точки: $A(1;\ -3)$, $B\ (5;\ 7)$. Найдите середину C отрезка AB.	1) $C(0;0)$; 2) $C(3;\ 0)$; 3) $C(-3;\ 4)$; **4) $C(3;\ 2)$;** 5) $C(2;\ 5)$.
2.	Даны два вектора: $\vec{a}(1;3;4)$ и $\vec{b}(-2;1;2)$. Найдите вектор $\vec{x}$ такой, что $4\vec{a}-\vec{b}-\vec{x}=\vec{0}$.	1) $\vec{x}(3;5;10)$; **2) $\vec{x}(6;11;14)$**; 3) $\vec{x}(3;5;7)$; 4) $\vec{x}(6;5;9)$; 5) $\vec{x}(-6;11;7)$.
3.	Угол между векторами $\overrightarrow{m}(1;1;1)$ и $\vec{n}(2;1;3)$ равен:	**1) $\arccos 2\sqrt{\frac{3}{14}}$;** 2) 90°; 3) 45°; 4) $\arccos\frac{1}{3}$; 5) 60°.
4.	Вычислите длину вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}(2;1;0)$, $\vec{b}(0;-1;2)$.	**1) $\sqrt{24}$;** 2) $\sqrt{37}$; 3) $\sqrt{53}$; 4) $\sqrt{75}$;

		5) $\sqrt{28}$.
5.	Площадь треугольника с вершинами $A(-5;0)$, $B(-2;3)$ и $C(6;1)$ равна:	1) 30; **2) 15**; 3) 10; 4) 20; 5) 25.
6.	Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(9,1,4)$, $\vec{b}(7,-5,8)$, $\vec{c}(4,0,0)$, отложенных от некоторой точки.	**1) 112**; 2) 448; 3) 224; 4) 117 5) 56.
7.	В декартовой системе координат Oxy общее уравнение прямой, для которой известны точка $A(1,-3)$ и направляющий вектор $\vec{a}(2,1)$, имеет вид:	1) $2x+y-5=0$; 2) $x+2y-3=0$; **3) x - 2y - 7 = 0**; 4) $x-2y-5=0$; 5) $x+2y-7=0$.
8.	Найдите координаты точки пересечения прямой $x=1+2t, y=3-t, z=5-3t$ с плоскостью Oxz.	1) $(5,0,0)$; 2) $(0,0,7)$; **3) (7,0,-4)**; 4) $(9,1,0)$; 5) $(3,0,-4)$.
9.	Прямые на евклидовой плоскости, заданные в прямоугольной системе координат уравнениями $x+2y-1=0$ и $2x+ky-5=0$, параллельны, если k равно:	**1) 4;** 2) – 4; 3) 2; 4) 1; 5) 3.

10.	Плоскость в пространстве **E**^{3}, заданная в прямоугольной системе координат уравнением $x-y+z=0$, перпендикулярна вектору с координатами:	1) (2,0,2); **2) (3,– 3,3);** 3) (1,1,2); 4) (1,1,0); 5) (3,4,5).
11.	Если расстояние между параллельными плоскостями с уравнениями $2x$-y+$2z$+D=0 и $2x$-y+$2z$-4=0 равно 4, то значение D равно:	1) – 12 или – 4; 2) – 12 или 4; 3) – 16 или 32; **4) 8 или – 16**; 5) 12 или 4.
12.	Фигура на плоскости, заданная в некотором аффинном репере уравнением $x^2+2y^2-2x+8y-7=0$, является:	**1) эллипсом;** 2) гиперболой; 3) параболой; 4) парой пересекающихся прямых; 5) парой параллельных прямых.
13.	Укажите координаты неподвижной точки аффинного преобразования $\begin{cases} x' = 3x + 4y + 6, \\ y' = 4x + 3y - 12. \end{cases}$	1) (1,0); 2) (1,4); **3) (5,– 4);** 4) (3,4) 5) (4,5).
14.	В евклидовом пространстве **E**^{5} заданы гиперплоскость П и точка P_0. П: $4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 54 = 0$ $P_0(-3, 3, 1, 5, -2)$ Чему равно расстояние от точки P_0 до гиперплоскости П?	1) 0; 2) 12; 3) 3; 4) 8; **5) 6.**
15.	Если в аффинном пространстве **A**^{4} прямая $x_1=-2+3t, x_2=3-2t, x_3=-1+4t, x_4=4-t$ параллельна гиперплоскости $4x_1-2x_2+Cx_3-8x_4+1=0$, то значение C равно:	**1) – 6**; 2) – 3; 3) 6; 4) 3; 5) 12.

16.	В пространстве A^5 системой уравнений задана плоскость. Какова размерность плоскости? $-4x_1 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = -2$ $4x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2$ $8x_1 - 3x_3 - x_5 = 0$	1) 0; 2) 4; 3) 2; **4) 3;** 5) 1.
17.	Эллипс задан в прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* уравнением $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$. Найдите фокусы эллипса.	1) $F_1(-\sqrt{35};0)$ и $F_2(\sqrt{35};0)$; 2) $F_1(0;-5)$ и $F_2(0;5)$; **3) $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$;** 4) $F_1(0;-\sqrt{10})$ и $F_2(0;\sqrt{10})$; 5) $F_1(-3\sqrt{5};0)$ и $F_2(3\sqrt{5};0)$.
18.	Фигура в пространстве $\mathbf{E}^3$, заданная в декартовой системе координат *Oxyz* уравнением $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{10}=0$, является:	1) однополостным гиперболоидом; 2) парой параллельных плоскостей; **3) парой пересекающихся плоскостей;** 4) гиперболическим параболоидом; 5) гиперболой.
19.	Длина дуги кривой $\begin{cases} x = 2+16\sin t, \\ y = -8+16\cos t,\ t \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{12}\right], \end{cases}$ равна:	1) 2π; 2) 3π; 3) 6π; **4) 4π;** 5) 12π.
20.	15. Прямая является касательной к кривой $x=t, y=t^2+1, z=t^3$ в точке $M(0,1,0)$. Направляющим вектором прямой является вектор с координатами:	1) (1,0,2); **2) (2,0,0);** 3) (0,2,1); 4) (0,0,1) 5) (3,4,5).

Вариант 2

№ п/п	Содержание вопроса	Варианты ответа
1.	Зная точки $A(2;\ 3)$, $C\ (5;\ 7)$, где C – середина отрезка AB, найдите точку B.	**1) $\boldsymbol{B}$(8; 11)**; 2) $B(-2;1)$; 3) $B(3;\ 4)$; 4) $B(5;\ 2)$; 5) $B(7;\ 10)$.
2.	Даны два вектора: $\vec{a}\,(2;1;3)$ и $\vec{b}\,(-7;4;-5)$. Найдите вектор $\vec{x}$ такой, что $5\vec{a}+2\vec{b}-\vec{x}=0$.	1) $\vec{x}(8;5;-2)$; 2) $\vec{x}(5;1;7)$; **3) $\vec{x}(-4;13;5)$**; 4) $\vec{x}(1;9;3)$; 5) $\vec{x}(3;1;9)$.
3.	Угол между векторами $\overrightarrow{m}(1;0;-1)$ и $\vec{n}(2;1;1)$ равен:	1) 30^o; 2) 90^o; 3) 120^o; **4) $\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$**; 5) 60^o.
4.	Вычислите длину вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}(1;3;4)$, $\vec{b}(0;2;3)$.	1) $\sqrt{9}$; **2) $\sqrt{14}$**; 3) $\sqrt{21}$; 4) $\sqrt{18}$; 5) $\sqrt{15}$.
5.	Площадь треугольника с вершинами $A(-5;0)$, $B(-2;4)$ и $C(6;0)$ равна:	1) 40; 2) 14; **3) 22;** 4) 18; 5) 44.

6.	Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(2,-8,6)$, $\vec{b}(-5,7,4)$, $\vec{c}(0,1,0)$, отложенных от некоторой точки.	**1) 38**; 2) 19; 3) 26; 4) 74 5) 78.
7.	В декартовой системе координат Oxy общее уравнение прямой, для которой известны точка $A(1,-3)$ и нормальный вектор $\vec{n}(2,1)$, имеет вид:	1) $2x+y-5=0$; 2) $x+2y-3=0$; 3) $x-2y-7=0$; **4) $\mathbf{2x+y+1=0}$**; 5) $2x-y+5=0$.
8.	Найдите координаты точки пересечения прямой $x=1+2t, y=3-t, z=6-3t$ с плоскостью Oxy.	1) $(5,2,0)$; 2) $(0,0,7)$; 3) $(7,0,0)$; 4) $(-5,4,0)$; **5) $\mathbf{(5,1,0)}$**.
9.	Прямые на евклидовой плоскости, заданные в прямоугольной системе координат уравнениями $x-y=0$ и $x+ky+2=0$, перпендикулярны, если k равно:	1) –1; **2) 1**; 3) 2; 4) –2; 5) 3.
10.	Плоскость в пространстве $\mathbf{E}^3$, заданная в прямоугольной системе координат уравнением $x+4y+z+1=0$, перпендикулярна вектору с координатами:	1) (1,– 4,1); 2) (– 4,1,0); 3) (4,– 1,1); 4) (8,– 2,8) **5) (2,8,2)**.
11.	Если расстояние между параллельными плоскостями с уравнениями $x+2y-2z+D=0$ и $x+2y-2z-5=0$ равно 3, то значение D равно:	1) – 18 или – 7; **2) 4 или – 14**; 3) – 19 или 22; 4) 11 или – 21; 5) 12 или 9.

12.	Фигура на плоскости, заданная в некотором аффинном репере уравнением $2x^2 - y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$, является:	1) эллипсом; **2) гиперболой;** 3) параболой; 4) парой пересекающихся прямых; 5) парой параллельных прямых.
13.	Укажите координаты неподвижной точки аффинного преобразования $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 3, \\ y' = 2x + 2y - 6. \end{cases}$	**1) (5,– 4)**; 2) (2,1); 3) (1,2); 4) (3,3); 5) (–1,4).
14.	В евклидовом пространстве $\mathbf{E}^5$ заданы гиперплоскость П и точка P_0: П: $2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 14 = 0$ $P_0(-1, 2, 3, -3, 1)$. Чему равно расстояние от точки P_0 до гиперплоскости П?	1) 0; **2) 4**; 3) 6; 4) 8 5) 2.
15.	Если в аффинном пространстве $\mathbf{A}^4$ прямая $x_1 = -1 + 2t,\ x_2 = 2 - t,\ x_3 = -1 + 3t,\ x_4 = 1 + t$ параллельна гиперплоскости $x_1 + 2x_2 + x_3 - Cx_4 - 1 = 0$, то значение C равно:	1) –1; 2) 2; **3) 3;** 4) 8; 5) –6.
16.	В пространстве A^5 системой уравнений задана плоскость. Какова размерность плоскости? $4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 3$ $x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3$ $-7x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -9$	1) 1; 2) 2; **3) 3**; 4) 4 5) 5.
17.	Эллипс задан в прямоугольной декартовой системе координат Oxy уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1.$ Найдите	1) $F_1(-\sqrt{11};0)$ и $F_2(\sqrt{11};0)$; 2) $F_1(0;-5)$ и $F_2(0;5)$;

	фокусы эллипса.	3) $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$; **4)** $\mathbf{F_1(0;-\sqrt{11})}$ **и** $\mathbf{F_2(0;\sqrt{11})}$; 5) $F_1(-\sqrt{41};0)$ и $F_2(\sqrt{41};0)$.
18.	Фигура в пространстве $\mathbf{E^3}$, заданная в декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{10}=2z$, является:	1) однополостным гиперболоидом; 2) парой параллельных плоскостей; 3) эллиптическим параболоидом; **4) гиперболическим параболоидом**; 5) гиперболическим цилиндром.
19.	Длина дуги кривой $\begin{cases} x=-3+2\sin t, \\ y=4+2\cos t, t\in\left[\frac{\pi}{10};\frac{3\pi}{5}\right], \end{cases}$ равна:	1) 2π; 2) 3π; 3) 6π; 4) 4π; **5)** $\boldsymbol{\pi}$.
20.	Прямая является касательной к кривой $x=t^2, y=t+1, z=t-1$ в точке $M(0,1,-1)$. Направляющим вектором прямой является вектор с координатами:	**1) (0,2,2)**; 2) (1,0,1); 3) (2,0,0); 4) (1,2,0) 5) (1,2,–1).

3.4. Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр

1. Эквивалентные направленные отрезки.
2. Понятие вектора. Коллинеарные и компланарные векторы.
3. Операция сложения векторов и ее свойства.
4. Операция умножения векторов на числа и ее свойства.
5. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
6. Геометрические критерии линейной зависимости.
7. Алгебраические критерии линейной зависимости.

8. Проекции и их свойства.

9. Базисы. Координаты вектора в данном базисе.

10. Формулы преобразования координат векторов при переходе от одного базиса к другому.

11. Скалярное произведение векторов и его свойства.

12. Векторное произведение векторов и его свойства.

13. Смешанное произведение векторов и его свойства.

14. Критерии компланарности трех векторов.

15. Аффинные реперы. Координаты точки в данном репере. Формулы преобразования координат точек при переходе от одного репера к другому.

16. Формулы преобразования координат точек на плоскости при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой.

17. Различные виды уравнений прямой на плоскости $\mathbf{E}^2$.

18. Определение взаимного расположения двух прямых на плоскости по их уравнениям.

19. Величина угла между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.

20. Геометрический смысл линейного неравенства с двумя переменными.

21. Плоскость в пространстве $\mathbf{E}^3$. Различные виды уравнений плоскости.

22. Определение взаимного расположения двух плоскостей по их уравнениям.

23. Прямая в пространстве $\mathbf{E}^3$. Различные виды уравнений прямой в $\mathbf{E}^3$.

24. Определение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве $\mathbf{E}^3$.

25. Расстояние от точки до плоскости и расстояние от точки до прямой в пространстве $\mathbf{E}^3$.

26. Эллипс.

27. Гипербола.

28. Парабола.

29. Фигуры второго порядка на плоскости $\mathbf{E}^2$.

30. Единое определение эллипса, гиперболы и параболы с помощью фокуса и директрисы.

31. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.

32. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.

33. Фигуры вращения в пространстве $\mathbf{E}^3$.

34. Цилиндрические и конические фигуры в пространстве $\mathbf{E}^3$.

35. Эллипсоиды.

36. Гиперболоиды.

37. Эллиптические параболоиды.

38. Гиперболические параболоиды.

39. Фигуры второго порядка в пространстве $\mathbf{E}^3$.

40. Плоские сечения пространственных фигур второго порядка.

41. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

2 семестр

1. Понятие аффинного преобразования плоскости $\mathbf{E}^2$ и пространства $\mathbf{E}^3$. Примеры.

2. Отображение, обратное для аффинного преобразования. Группы аффинных преобразований $Aff(\mathbf{E}^2)$ и $Aff(\mathbf{E}^3)$.

3. Образы прямой и плоскости при аффинном преобразовании.

4. Линейный оператор, индуцированный аффинным преобразованием.

5. Простое отношение точек, сохранение простого отношения точек при аффинном преобразовании.

6. Координатная запись аффинного преобразования.

7. Геометрический смысл определителя матрицы аффинного преобразования.

8. Инвариантные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования плоскости $\mathbf{E}^2$.

9. Движения плоскости $\mathbf{E}^2$ и пространства $\mathbf{E}^3$. Примеры.

10. Координатная запись движений. Классификация движений плоскости $\mathbf{E}^2$ и пространства $\mathbf{E}^3$.

11. Понятие аффинного пространства. Примеры.

12. Радиус-вектор точек аффинного пространства, биекция аффинного пространства и связанного с ним векторного пространства при фиксировании точки.

13. Аффинные реперы и координаты в аффинном пространстве. Формулы преобразования координат.

14. Понятие плоскости в аффинном пространстве. Начальная точка и направляющее пространство плоскости.

15. Пересечение плоскостей в аффинном пространстве. Аффинная оболочка множества точек.

16. Сумма плоскостей в аффинном пространстве.

17. Аффинно независимые точки в аффинном пространстве.

18. Взаимное расположение двух плоскостей в аффинном пространстве. Характеристика пары плоскостей.

19. Параметрические и общие уравнения плоскостей в аффинном пространстве.

20. Определение взаимного расположения двух плоскостей по их уравнениям.

21. Барицентрические линейные комбинации точек и барицентрические координаты в аффинном пространстве.

22. Выпуклые фигуры в вещественном аффинном пространстве.

23. Выпуклая оболочка множества точек в вещественном аффинном пространстве.

24. n-мерный параллелепипед в вещественном аффинном и евклидовом пространствах.

25. n-мерный симплекс в вещественном аффинном и евклидовом

пространствах.

26. Скалярное произведение в вещественном векторном пространстве и его свойства. Примеры.

27. Евклидово векторное пространство, ортогональность векторов и подпространств, величина угла между векторами, ортогональное дополнение подпространства, ортонормированные базисы.

28. Понятие евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^n$, ортогональность плоскостей в $\mathbf{E}^n$.

29. Расстояние между фигурами в $\mathbf{E}^n$, вычисление расстояния между плоскостями.

30. Некоторые фигуры в $\mathbf{E}^n$: сферы, шары, параллелепипеды, симплексы. Объем параллелепипеда и симплекса.

31. Фигуры второго порядка (квадрики) в вещественных аффинных пространствах. Нормальные и канонические уравнения квадрик.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

4.1. Рекомендуемая литература

Основная

1. *Александров, П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / П. С. Александров. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 512 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/242861.

2. *Кононов, С. Г.* Аналитическая геометрия : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / С. Г. Кононов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2014. - 238 с. - http://elib.bsu.by/handle/123456789/113440.

3. *Клетеник, Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие / Д. В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова. - Изд. 17-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 223 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/187823.

4. *Постников, М. М.* Аналитическая геометрия / Постников М. М. - 3-е изд.,испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 416 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/210347

Дополнительная

5. *Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. – Минск: Университетское, 1999. – 302 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13294

6. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие. – М., Наука, 1976.– 384 с. https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018

7. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1986. – 303 с. http://www.newlibrary.ru/book

8. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1979. – 336 с. https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01

9. *Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 302 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13296

10. *Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 269 с. https://elib.bsu.by/handle/123456789/13296

4.2. Электронные ресурсы

1. Образовательный портал БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://dl.bsu.by. – Дата доступа: 29.09.2024.

2. Электронная библиотека БГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа:

http://elib.bsu.by. – Дата доступа: 29.09.2024.

3. *Кононов, С. Г.* Геометрия: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности: 6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки. Профилизация: математика. № УД-269/б. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/304502. – Дата доступа: 29.09.2024.