Утверждение. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, индекс $\chi \in \mathbb{N}$, $r < \chi + 1$. Если $\text{НОД}(\alpha; \beta) = 1$, $a \in \mathbb{N}$ таково, что $a(r - 1) < \chi$, то система (2) имеет решение вида

$$(k_2, \dots, k_r; l_2, \dots, l_r; m_2, \dots, m_r; \alpha_1), \quad (3)$$

где $m_j, j = \overline{2, r}$, — произвольные фиксированные целые числа, числа $l_j, j = \overline{2, r}$, являются решениями сравнений

$$\beta l_j \equiv a - m_j \pmod{\alpha}, \quad j = \overline{2, r}, \quad (4)$$

$k_j, j = \overline{2, r}$, — вычисляются по формулам $k_j = \frac{a - m_j - \beta l_j}{\alpha}$, $j = \overline{2, r}$. Если $\text{НОД}(\alpha, \beta) = d \neq 1$, то система (2) имеет решение вида (3) тогда и только тогда, когда $m_j, j = \overline{2, r}$, зафиксировано так, что $\text{НОД}(a - m_j; \alpha) = d, j = \overline{2, r}$, причём каждое из сравнений (4) имеет d . При этом $\alpha_1 = \chi - a(r - 1)$.

Также получены критерии разрешимости модельной нелинейной краевой задачи (1) в случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+$. Когда же хотя бы один из показателей α, β иррационален найдено одно из решений системы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы “Конвергенция–2025” (ГПНИ на 2021–2025 гг.), задание 1.7.01.04.

Литература

1. Аксентьева Е.П. О порядках граничных нулей решений степенной задачи Римана. *Труды мат. центра им. Н.И. Лобачевского.* (2002). Т. 14, 61–71.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* 3-е изд., М.: Наука (1977).; Engl. Transl. Oxvord-London etc.: Pergamon Press (1966).

Явное решение интегро-дифференциального уравнения первого порядка с коэффициентами в виде некоторых сумм

А. П. Шилин (Минск, Беларусь)

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — два множества, элементы которых упорядочены и могут перемножаться, $n \in \mathbb{N}$. Будем составлять произведения вида $A = c_1 c_2 \dots c_n$, где для каждого $k = \overline{1, n}$ либо $c_k = a_k$, либо $c_k = b_k$. Обозначим $L_s(a_k, b_k; n)$ сумму всевозможных произведений вида A таких, в которых множители a_k встречаются s раз (и, следовательно, множители b_k встречаются $n - s$ раз), $s = \overline{0, n}$.

Пусть L — простая замкнутая гладкая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Зададим H -непрерывную (т.е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $f(t)$ и H -непрерывно дифференцируемые функции $p_k(t), k = \overline{1, n}, t \in L$. Будем искать на этой кривой H -непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \varphi'(t) - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \varphi(t) + \\ & + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} L_{2s-1} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \\ & - \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} L_{2s-1} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (1)$$

Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару; интегралы с $\tau - t$ в знаменателе совпадают при этом с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши. Квадратные скобки означают целую часть числа.

При $n = 1$ и $n = 2$ уравнение (1) записано в развернутой форме и решено в явном виде в работах соответственно [1] и [2]. Теперь дается явное решение уравнения (1) для $n \geq 3$. Случай $n = 3$ проиллюстрирован примером.

Литература

1. Зверович Э.И., Шилин А.П. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида. *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* Т. 54, № 4. (2018), 404–407. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>.

2. Шилин А.П. Решение интегро-дифференциального уравнения с коэффициентами, выражающимися через две заданные функции. Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. Сб. статей по материалам XVIII Всероссийской с международным участием н.-техн. конф. Россия, г. Пенза, 6–10 ноября 2023. В 2-х частях. Ч.1. Пенза: изд-во ПГУ, (2023), 104–107.