

Литература

1. Чеб Е.С., Симинская Е.С. О классическом решении смешанной задачи для линейного нестроого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой. *Вестник БелГУ. Прикладная математика. Физика.* Т. 1, No. 1 (2020), 11–18.
2. Чеб Е.С. Классическое решение граничной задачи для уравнения четвертого порядка с младшей производной и одной кратной характеристикой. В сб. *Труды 10-го Междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021, (13-17 сентября 2021 г., Минск).* (Редактор Рогозин С.В.) Минск: ИВЦ Минфина. (2022), 127–132.

О разрешимости модельной однородной степенной краевой задачи с допустимыми нулями на контуре Т. А. Чехменок (Минск, Беларусь)

Рассмотрим модельную краевую задачу:

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = t^\chi [\Phi^-(t)]^\beta, \quad t \in L, \quad (1)$$

где контур L — единичная окружность, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\chi \in \mathbb{Z}$, в классе функций $\mathcal{A}_{0,0,r}$ — классе функций однозначных аналитических соответственно в областях $D^\pm$, непрерывно продолжимых на контур L слева и справа, не имеющих нулей в областях $D^\pm$, и r — количество точек контура, в окрестности которых имеет место асимптотика $\Phi^\pm(t) = A(t - \tau_j)^{\alpha_j}$, $t \rightarrow \tau_j$, $j = \overline{1, r}$ ($\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, r}$). Следуя [2] функции $\Phi^\pm(z)$ считаются решениями данной задачи, если существуют однозначные ветви многозначных функций $[\Phi^+(z)]^\alpha$ и $[\Phi^-(z)]^\beta$, предельные значения которых на контуре L удовлетворяют краевому условию (1).

В работе [1] получена структура порядков нулей решений краевой задачи (1) на контуре, доказана ограниченность числа нулей решений в случае α и β рациональных, и неограниченность, когда хотя бы один из показателей α, β иррационален. В отличие от указанной статьи получены критерии разрешимости модельной нелинейной краевой задачи (1).

Теорема. При $\chi < 0$ задача (1) не имеет решений ни в одном из классов вида $\mathcal{A}_{0,0,r}$. При $\chi \geq 0$ и фиксированном $r \geq 1$ критерием разрешимости задачи (1) является существование чисел $k_j, l_j, m_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{2, r}$, $\alpha_1 > 0$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + \sum_{j=2}^r (\alpha k_j + \beta l_j + m_j) = \kappa, \\ \alpha k_j + \beta l_j + m_j > 0, \quad j = \overline{2, r}. \end{cases} \quad (2)$$

При его выполнении все решения определяются формулами:

$$\Phi^+(z) = \left[C \prod_{j=1}^r (z - \tau_j)^{\alpha_j} \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad z \in D^+, \quad \Phi^-(z) = \left[C \prod_{j=1}^r \left(\frac{z - \tau_j}{z} \right)^{\alpha_j} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad z \in D^-,$$

где $\alpha_j = \alpha k_j + \beta l_j + m_j$, $j = \overline{2, r}$, $\alpha_1 = \chi - \sum_{j=2}^r \alpha_j$.

Рассмотрим вопрос о разрешимости системы (2) в целых неотрицательных числах. Пусть все α_j , $j = \overline{2, r}$, постоянны и равны между собой.

Утверждение. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, индекс $\chi \in \mathbb{N}$, $r < \chi + 1$. Если $\text{НОД}(\alpha; \beta) = 1$, $a \in \mathbb{N}$ таково, что $a(r - 1) < \chi$, то система (2) имеет решение вида

$$(k_2, \dots, k_r; l_2, \dots, l_r; m_2, \dots, m_r; \alpha_1), \quad (3)$$

где $m_j, j = \overline{2, r}$, — произвольные фиксированные целые числа, числа $l_j, j = \overline{2, r}$, являются решениями сравнений

$$\beta l_j \equiv a - m_j \pmod{\alpha}, \quad j = \overline{2, r}, \quad (4)$$

$k_j, j = \overline{2, r}$, — вычисляются по формулам $k_j = \frac{a - m_j - \beta l_j}{\alpha}$, $j = \overline{2, r}$. Если $\text{НОД}(\alpha, \beta) = d \neq 1$, то система (2) имеет решение вида (3) тогда и только тогда, когда $m_j, j = \overline{2, r}$, зафиксировано так, что $\text{НОД}(a - m_j; \alpha) = d, j = \overline{2, r}$, причём каждое из сравнений (4) имеет d . При этом $\alpha_1 = \chi - a(r - 1)$.

Также получены критерии разрешимости модельной нелинейной краевой задачи (1) в случае, когда $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_+$. Когда же хотя бы один из показателей α, β иррационален найдено одно из решений системы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы “Конвергенция–2025” (ГПНИ на 2021–2025 гг.), задание 1.7.01.04.

Литература

1. Аксентьева Е.П. О порядках граничных нулей решений степенной задачи Римана. *Труды мат. центра им. Н.И. Лобачевского*. (2002). Т. 14, 61–71.

2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. 3-е изд., М.: Наука (1977).; Engl. Transl. Oxvord-London etc.: Pergamon Press (1966).

Явное решение интегро-дифференциального уравнения первого порядка с коэффициентами в виде некоторых сумм А. П. Шилин (Минск, Беларусь)

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — два множества, элементы которых упорядочены и могут перемножаться, $n \in \mathbb{N}$. Будем составлять произведения вида $A = c_1 c_2 \dots c_n$, где для каждого $k = \overline{1, n}$ либо $c_k = a_k$, либо $c_k = b_k$. Обозначим $L_s(a_k, b_k; n)$ сумму всевозможных произведений вида A таких, в которых множители a_k встречаются s раз (и, следовательно, множители b_k встречаются $n - s$ раз), $s = \overline{0, n}$.

Пусть L — простая замкнутая гладкая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости. Зададим H -непрерывную (т.е. удовлетворяющую условию Гельдера) функцию $f(t)$ и H -непрерывно дифференцируемые функции $p_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, $t \in L$. Будем искать на этой кривой H -непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} L_{2s} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \varphi'(t) - \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} L_{2s} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \varphi(t) + \\ + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} L_{2s-1} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau - t}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} - \\ - \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} L_{2s-1} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (1)$$