

Поскольку уравнение (2) имеет 5 независимых параметров, а уравнение (3) содержит 8 параметров, из которых 6 являются независимыми, то представление решений проблемы Римана для двух функций с четырьмя особыми точками через функцию Хейна возможно только в ряде специальных случаев.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Edited by Frank W.J. Olver (editor-in-chief), D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark. Gaithersburg, Maryland, National Institute of Standards and Technology, and New York, Cambridge University Press, 951 + xv pages and a CD, (2010).

2. Rogosin S., Khvoshchinskaya, L. Construction of Fuchsian system with five singular points. *Lobachevskii J. Math.* 42 (2021), 830–849. <https://doi.org/10.1134/S199508022104017X>.

Об асимптотической аппроксимации решений одного класса сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием

О. Б. Цехан (Гродно, Беларусь)

Дана нестационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})y(t) + B_1(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t), \quad t \geq t_0, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad \mu \in (0, \mu^0], \quad \mu^0 \ll 1, \\ \{x(\theta), y(\theta)\} &= \{\phi(\theta), \psi(\theta), \theta \in T_h \triangleq [t_0 - h, t_0]\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь e^{-ph} , $h > 0$, — оператор запаздывания: $e^{-ph}f(t) = f(t - h)$, $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$, $i = 1, 2$, — матричные операторы, $A_{ij}(t)$, $B_i(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_k(t)$, $k = 3, 4$, — непрерывные матричные функции, $u(t)$, $t \geq t_0$, $\phi(\theta)$, $\psi(\theta)$, $\theta \in T_h$ — кусочно-непрерывные вектор-функции подходящих размеров.

Определим систему, параметры которой выражаются через параметры (1):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})\xi(t) + \mathbf{B}_\xi(t, \mu, e^{-ph})u(t) + F_\xi(t, \mu), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \geq t_0, \\ \frac{d}{d\tau}\eta(\tau) &= \tilde{\mathbf{A}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph})\eta(\tau) + \tilde{\mathbf{B}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph})\tilde{u}(\tau) + \tilde{F}_\eta(\tau, \mu), \quad \tau = \frac{t-t_0}{\mu} \geq 0, \\ \xi(\theta, \mu) &= \bar{\xi}(\theta, \mu), \quad \eta(\theta, \mu) = \bar{\eta}(\theta, \mu), \quad \theta < t_0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tilde{u}(\tau) = u(t_0 + \mu\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема. Пусть функции системы (1) продолжены на $[t_0 - 2h, t_0]$ так, что $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -c < 0$, $\forall t$, $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, имеют ограниченные на $T_h \cup T$ производные, функции $\phi(\theta)$, $\psi(\theta)$ дифференцируемы и имеют ограниченные производные на T_h и продолжены влево: $\phi(\theta) \equiv 0$, $\psi(\theta) \equiv 0$, $\theta < t_0 - h$; $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$. Тогда для достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ решение системы (1) равномерно (по t) асимптотически (по μ) аппроксимируется по следующим формулам (где $L_j^m(t)$, $H_j^m(t)$ выражаются через матрицы системы (1)):

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi(t) + \mu H_0^0(t)\eta\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) + \mu H_1^0(t)\eta\left(\frac{t-h-t_0}{\mu}\right) + O(\mu^2), \\ y(t) &= (E_{n_2} - \mu L_0^0(t)H_0^0(t))\eta\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) - \mu L_0^0(t)H_1^0(t)\eta\left(\frac{t-t_0-h}{\mu}\right) - \\ &\quad - (L_0^0(t) + \mu L_0^1(t))\xi(t) - \mu L_1^1(t)\xi(t-h) + O(\mu^2), \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Схема доказательства следует доказательству теоремы из [1] с использованием асимптотической аппроксимации 2-го порядка расщепляющего преобразования, которое для системы (1) строится аналогично [2].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ, проект № Ф22-050.

Литература

1. Цехан, О.Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием. *Веснік Гродз. дзярж. ўн-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Мат. Фіз. Інф., выліч. тэхн. і кіраванне*. Т. 14. № 1. (2024), 37–47.
2. Tsekhan, O. Approximation of the solution based on the decoupling transformation of linear time-varying singularly perturbed system with delay *Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. Springer, Cham. – Vol. 407. (2022), 77–97.

Граничная задача для одного гиперболического уравнения четвертого порядка со смешанными граничными условиями Е. С. Чеб (Минск, Беларусь)

Рассматривается корректно поставленная смешанная задача для линейного нестрого гиперболического уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, в случае наличия у него одной кратной характеристики. Получены условия существования единственного классического решения, непрерывно зависящего от начальных и граничных данных.

Рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + 4a \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} + 6a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + 4a^3 \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, (x, t) \in Q_n, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l]. \quad (2)$$

Пусть коэффициент $a > 0$. Уравнение (1) имеет одну характеристику $x - at$ кратности четыре.

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t \in [0, t_{n+1}], \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^{s+1} u}{\partial x^{s+1}} \right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t \in [t_1, t_{n+1}], \quad s = 0, 1, \quad (4)$$

Здесь $Q_n = \bigcup_{k=0}^n G_k$, $G_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq at, x \in [0, l], t \in [0, t_1]\}$, $G_k = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : (k-1)l \leq at - x \leq kl, x \in [0, l], t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]\}$, $t_k = kl/a$, $k = \overline{0, n}$.

Выбор таких граничных условий гарантирует корректность задачи (1)–(4) в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций [1].

Теорема. Задача (1)–(4) на Q_n имеет единственное классическое решение $u \in C^4(Q_n)$ при выполнении условий гладкости $\varphi_j \in C^{(7-j)}[0, l]$, $j \in \overline{0, 3}$, $\mu_i \in C^{(6-i)}[0, t_{k+1}]$, $\nu_i \in C^{(6-i)}[t_1, t_{n+1}]$, $i = 1, 2$, основных условий согласования $\varphi_j(0) = \mu_1^{(3-j)}(0)$, $\varphi_j'(0) = \mu_2^{(3-j)}(0)$, $j = \overline{0, 3}$, $a^4 \mu_1^{(4)} = -\varphi_0^{(4)}(0) - 4a^3 \varphi_1^{(3)}(0) - 6a^2 \varphi_2^{(2)}(0) - 4a \varphi_3'(0)$ и дополнительных условий согласования по типу [2].