

является линейной однородной автономной системой нейтрального типа с конечным спектром. В (2) $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ — вспомогательная переменная, $U_{ij}(p, \lambda)$ — полиномиальные матрицы.

Теорема. Для того чтобы для системы (1) существовал регулятор (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\text{rank} [W(p, e^{-ph}), B(e^{-ph})] = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \text{rank} [I_n - D(z), B(z)] = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ C(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(z) \\ C(z) \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где $W(p, z) = p(I_n - D(z)) - A(z)$.

Вопрос построения регулятора (2) в частном случае ($C_0 = E_n$, $C_i = 0_{n \times n}$, $i = \overline{1, m}$) изучен в работе [1].

Литература

1. Метельский, А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И. Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа. *Дифференциальные уравнения*. Т. 52. No. 3 (2016), 391–403.

О представлении решения проблемы Римана в терминах функции Хейна Л. А. Хвоцинская (Минск, Беларусь)

В работе выделены случаи, при которых решения проблемы Римана для двух функций с четырьмя особыми точками выражается в терминах функции Хейна (см., например, [1])

$$H\ell(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad |z| < 1, \quad (1)$$

где коэффициенты определены рекуррентным образом

$$c_0 = 1, \quad a\gamma c_1 - qc_0 = 0, \quad R_j c_{j+1} - (Q_j + q)c_j + P_j c_{j-1} = 0,$$

$$P_j = (j-1-\alpha)(j-1+\beta), \quad Q_j = j((j-1+\gamma)(1+a) + a\delta\varepsilon), \quad R_j = a(j+1)(j+\gamma).$$

Известно, что функция Хейна (1) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} w = 0, \quad (2)$$

четырьмя особыми точками $0, 1, a, \infty$. Дифференциальное уравнение (2) аналогично дифференциальному уравнению класса Фукса, представляющего собой решение проблемы Римана с 4 особыми точками

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^4 \frac{1 - \rho_k - \sigma_k}{z - a_k} - \frac{1}{z - b} \right) y' + \frac{1}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)} \left[\rho\sigma z - \rho b + \sum_{k=1}^3 (\rho_k \sigma_k - \tau_k) a_k + \frac{q}{z - b} + \sum_{k=1}^3 \frac{\rho_k \sigma_k}{z - a_k} \prod_{j=1, j \neq k}^3 (a_j - a_k) \right] y = 0. \quad (3)$$

Поскольку уравнение (2) имеет 5 независимых параметров, а уравнение (3) содержит 8 параметров, из которых 6 являются независимыми, то представление решений проблемы Римана для двух функций с четырьмя особыми точками через функцию Хейна возможно только в ряде специальных случаев.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Edited by Frank W.J. Olver (editor-in-chief), D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark. Gaithersburg, Maryland, National Institute of Standards and Technology, and New York, Cambridge University Press, 951 + xv pages and a CD, (2010).

2. Rogosin S., Khvoshchinskaya, L. Construction of Fuchsian system with five singular points. *Lobachevskii J. Math.* 42 (2021), 830–849. <https://doi.org/10.1134/S199508022104017X>.

Об асимптотической аппроксимации решений одного класса сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием

О. Б. Цехан (Гродно, Беларусь)

Дана нестационарная сингулярно возмущенная система с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}_1(t, e^{-ph})x(t) + \mathbf{A}_2(t, e^{-ph})y(t) + B_1(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu \dot{y}(t) &= A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t) + B_2(t)u(t), \quad t \geq t_0, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad \mu \in (0, \mu^0], \quad \mu^0 \ll 1, \\ \{x(\theta), y(\theta)\} &= \{\phi(\theta), \psi(\theta), \theta \in T_h \triangleq [t_0 - h, t_0]\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь e^{-ph} , $h > 0$, — оператор запаздывания: $e^{-ph}f(t) = f(t - h)$, $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$, $i = 1, 2$, — матричные операторы, $A_{ij}(t)$, $B_i(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_k(t)$, $k = 3, 4$, — непрерывные матричные функции, $u(t)$, $t \geq t_0$, $\phi(\theta)$, $\psi(\theta)$, $\theta \in T_h$ — кусочно-непрерывные вектор-функции подходящих размеров.

Определим систему, параметры которой выражаются через параметры (1):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbf{A}_\xi(t, \mu, e^{-ph})\xi(t) + \mathbf{B}_\xi(t, \mu, e^{-ph})u(t) + F_\xi(t, \mu), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t \geq t_0, \\ \frac{d}{d\tau}\eta(\tau) &= \tilde{\mathbf{A}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph})\eta(\tau) + \tilde{\mathbf{B}}_\eta(t_0, \mu, e^{-ph})\tilde{u}(\tau) + \tilde{F}_\eta(\tau, \mu), \quad \tau = \frac{t-t_0}{\mu} \geq 0, \\ \xi(\theta, \mu) &= \bar{\xi}(\theta, \mu), \quad \eta(\theta, \mu) = \bar{\eta}(\theta, \mu), \quad \theta < t_0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tilde{u}(\tau) = u(t_0 + \mu\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема. Пусть функции системы (1) продолжены на $[t_0 - 2h, t_0]$ так, что $\operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -c < 0$, $\forall t$, $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, имеют ограниченные на $T_h \cup T$ производные, функции $\phi(\theta)$, $\psi(\theta)$ дифференцируемы и имеют ограниченные производные на T_h и продолжены влево: $\phi(\theta) \equiv 0$, $\psi(\theta) \equiv 0$, $\theta < t_0 - h$; $u(t) \equiv 0$, $t < t_0$. Тогда для достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ решение системы (1) равномерно (по t) асимптотически (по μ) аппроксимируется по следующим формулам (где $L_j^m(t)$, $H_j^m(t)$ выражаются через матрицы системы (1)):

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi(t) + \mu H_0^0(t)\eta\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) + \mu H_1^0(t)\eta\left(\frac{t-h-t_0}{\mu}\right) + O(\mu^2), \\ y(t) &= (E_{n_2} - \mu L_0^0(t)H_0^0(t))\eta\left(\frac{t-t_0}{\mu}\right) - \mu L_0^0(t)H_1^0(t)\eta\left(\frac{t-t_0-h}{\mu}\right) - \\ &\quad - (L_0^0(t) + \mu L_0^1(t))\xi(t) - \mu L_1^1(t)\xi(t-h) + O(\mu^2), \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Схема доказательства следует доказательству теоремы из [1] с использованием асимптотической аппроксимации 2-го порядка расщепляющего преобразования, которое для системы (1) строится аналогично [2].