

Как правило [1, сс. 43–49], явные стабилизированные методы для численного решения задачи $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, строятся исходя из условий двух типов: 1) традиционных условий порядка и 2) условий максимизации длины области устойчивости $S = \{z \in \mathbb{C} : |R_s(z)| \leq 1\}$, где R_s — многочлен устойчивости метода, s — число его стадий. Стремление к расширению длины области устойчивости вдоль вещественной оси является вполне естественным: для систем линейных уравнений вида

$$y'(x) = Ay(x) \quad (1)$$

любой явный метод РК дает приближенное решение вида $y_1 = R_s(hA)y_0 \approx e^{hA}y_0 = y(x_0 + h)$, поэтому свойство $R_s(h\lambda) \approx e^{h\lambda} \forall \lambda \in \Lambda$ весьма полезно. Множество Λ здесь — спектр матрицы A , которую считаем диагонализируемой, а соответствующее уравнение (1) — жестким, то есть $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$, $\lambda_n/\lambda_1 \gg 0$.

В дополнение к приведенным выше условиям 1) и 2) мы добавляем требование положительности и монотонности R_s , аналогичное условию спектральной монотонности [2]:

$$R_s(z) > 0, \quad R'_s(z) \geq 0 \quad \forall z \in (-m, 0), \quad m \rightarrow \max.$$

Функции устойчивости, удовлетворяющие данным условиям, определяются с помощью многочленов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ по формулам

$$R'_s(z) = \frac{1 + T_{s-1}(\frac{2z}{m_s} + \delta)}{1 + T_{s-1}(\delta)}, \quad R_s(z) = \int_{-m_s}^z R'_s(\zeta) d\zeta,$$

и по условиям второго порядка $R_s(0) = 1$, $R''_s(0) = 1$ ($R'_s(0) = 1$ по построению).

В докладе обсуждаются вопросы построения соответствующих вычислительных схем и результаты численных экспериментов.

Литература

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, (1999).
2. Бобков В. В. Спектрально-монотонные приближения матричной экспоненты и их приложения. Вестн. БГУ. Сер. 1. (2011). № 3.

О разрешимости частно-интегрального уравнения

со слабой особенностью в $C(D)$

Е. В. Фролова (Липецк, Россия)

Различные задачи математической физики, дифференциальных уравнений в частных производных [1] приводятся к уравнению вида

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi(x) = f(x). \quad (1)$$

Здесь $D = \{x : a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$; m — размерность параллелепипеда D_{x_α} ($1 \leq m \leq n$) и частно-интегральный оператор со слабой особенностью определяется равенством

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha; x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha, \quad (2)$$

с ядром

$$\kappa_\alpha = \frac{k_\alpha(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}, \quad \beta < m.$$

Уравнение (1) обычно называют частно-интегральным уравнением. Различные свойства таких уравнений и соответствующих им операторов в $\mathbb{R}_2$ изучены в [1]. Ранее ЧИ-операторы в пространствах непрерывных функций в $\mathbb{R}_2$ изучались в работе [2], где были получены условия обратимости одномерных частно-интегральных операторов. Аналогичные условия получены в данной работе для m -мерных операторов.

Через $C(\bar{D})$ обозначим пространство непрерывных функций с $\sup$ -нормой, а функцию $k_\alpha(x; t_\alpha)$ будем называть L_1 -непрерывной и L_1 -ограниченной, если она является непрерывной при каждом x функцией со значениями в пространстве L_1 . Соответствующее пространство функций, заданных в параллелепипеде D , с нормой

$$\|k_\alpha\|_{CL_1} = \sup_{x \in \bar{D}} \int_{D_{t_\alpha}} |k_\alpha(x; t_\alpha)| dt_\alpha$$

обозначим $CL_1 = C(D; L_1(D_{t_\alpha}))$.

Заметим, что для L_1 -непрерывной и L_1 -ограниченной функции $k_\alpha(x; t_\alpha)$ функция $\frac{k_\alpha(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}$, $\beta < m$ также L_1 -непрерывна и L_1 -ограничена. Пространство CL_1 является анизотропным пространством функций.

Теорема 1. Пусть функция $k_\alpha(x; t_\alpha)$ L_1 -непрерывна и L_1 -ограничена, тогда уравнение (1) однозначно разрешимо в $C(D)$ при условии обратимости оператора $K_\alpha^{(m)}$ ([2]) и его решение имеет вид исходного оператора.

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. *Partial Differential Operators and Integro-Differential Equations*. CRC Press (2000).
2. Калитвин А.С., Фролова Е.В. *Линейные уравнения с частными интегралами С-теория*. Липецк: ЛГПУ (2004).

К вопросу стабилизации гибридных линейных непрерывно-дискретных систем В. Е. Хартовский, (Гродно, Беларусь)

Пусть объект управления описывается линейной непрерывно-дискретной системой с импульсным управляющим воздействием и известным выходным сигналом, измеряемым в дискретные моменты времени

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{1j}u(t_{k-j}), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \\ x_2(t_{k+1}) &= A_{21}x_1(t_k) + A_{22}x_2(t_k) + \sum_{j=0}^m B_{2j}u(t_{k-j}), \quad k = 0, 1, \dots, \\ y(t_k) &= \sum_{j=0}^m (C_{1j}x_1(t_{k-j}) + C_{2j}x_2(t_{k-j})), \quad k = m, m+1, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $i, j = 1, 2$, $B_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times r}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times n_i}$, $i = 1, 2$, $j = \overline{0, m}$, u — управление, y — наблюдаемый выходной сигнал, $t_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$, $h > 0$ — шаг квантования. Начальное условие для системы (1) является неизвестным имеет вид $x_1(0) = a_1$, $x_2(0) = a_2$, $a_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, $u(t_j) = 0$, $j < 0$.