

Уравнения равновесия в усилиях для пятислойного стержня К. В. Суслов, (Гомель, Беларусь)

Многослойные конструкции нашли обширное применение в машиностроении, строительстве и транспорте. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей для практического применения слоистых элементов конструкций. Здесь приведены методы расчета и постановка краевых задач для слоистых элементов [1–3]. В данной работе для симметричного по толщине пятислойного стержня с легкими заполнителями приведены уравнения равновесия в усилиях. Вывод уравнений равновесия проведен в линейной системе координат r, z , которая связана со срединной плоскостью центрального несущего слоя. Для тонких несущих слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, для заполнителей справедлива гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости нормали, которая поворачивается на дополнительный угол ψ .

$$\begin{aligned} u_x^{(4)} &= -cw_{,x} + z\psi, \quad (c + h \leq z \leq c + h + h_1), \\ u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z - h)\psi, \quad (h \leq z \leq c + h), \\ u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, \quad (h \leq z \leq h), \\ u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z + h)\psi, \quad (-h - c \leq z \leq -h), \\ u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, \quad (-h - h_1 - c \leq z \leq -h - c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z — расстояние от центрального слоя до рассматриваемого слоя, c — толщина заполнителя, $2h$ — толщина центрального несущего слоя, h_1 — толщина наружного несущего слоя.

Используя вариация работы внешней поверхностной нагрузки, вариация работы контурных усилий, вариация работы сил упругости получим уравнения равновесия в усилиях, используя перемещения (1):

$$H_{,x} - Q = 0,$$

$$M_{,xx} + b_0 p = 0. \quad (2)$$

Литература

1. Журавков М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах. Минск: БГУ (2002).
2. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. Математические модели механики твердого тела. Минск: БГУ (2021).
3. Zhuravkov M.A., Lyu Yongtao, Starovoitov E.I. *Mechanics of Solid Deformable Body*. Singapore: Springer (2023).

Монотонные аппроксимации экспоненты для численного решения жестких задач Б. В. Фалейчик (Минск, Беларусь)

В докладе рассматривается новый класс стабилизированных (чебышевских) явных методов типа Рунге–Кутты (РК) второго порядка точности, обладающих, помимо расширенной вдоль вещественной оси области устойчивости, дополнительным свойством: расширенным интервалом монотонности.

Как правило [1, сс. 43–49], явные стабилизированные методы для численного решения задачи $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, строятся исходя из условий двух типов: 1) традиционных условий порядка и 2) условий максимизации длины области устойчивости $S = \{z \in \mathbb{C} : |R_s(z)| \leq 1\}$, где R_s — многочлен устойчивости метода, s — число его стадий. Стремление к расширению длины области устойчивости вдоль вещественной оси является вполне естественным: для систем линейных уравнений вида

$$y'(x) = Ay(x) \quad (1)$$

любой явный метод РК дает приближенное решение вида $y_1 = R_s(hA)y_0 \approx e^{hA}y_0 = y(x_0 + h)$, поэтому свойство $R_s(h\lambda) \approx e^{h\lambda} \forall \lambda \in \Lambda$ весьма полезно. Множество Λ здесь — спектр матрицы A , которую считаем диагонализируемой, а соответствующее уравнение (1) — жестким, то есть $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$, $\lambda_n/\lambda_1 \gg 0$.

В дополнение к приведенным выше условиям 1) и 2) мы добавляем требование положительности и монотонности R_s , аналогичное условию спектральной монотонности [2]:

$$R_s(z) > 0, \quad R'_s(z) \geq 0 \quad \forall z \in (-m, 0), \quad m \rightarrow \max.$$

Функции устойчивости, удовлетворяющие данным условиям, определяются с помощью многочленов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ по формулам

$$R'_s(z) = \frac{1 + T_{s-1}(\frac{2z}{m_s} + \delta)}{1 + T_{s-1}(\delta)}, \quad R_s(z) = \int_{-m_s}^z R'_s(\zeta) d\zeta,$$

и по условиям второго порядка $R_s(0) = 1$, $R''_s(0) = 1$ ($R'_s(0) = 1$ по построению).

В докладе обсуждаются вопросы построения соответствующих вычислительных схем и результаты численных экспериментов.

Литература

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, (1999).
2. Бобков В. В. Спектрально-монотонные приближения матричной экспоненты и их приложения. Вестн. БГУ. Сер. 1. (2011). № 3.

О разрешимости частно-интегрального уравнения

со слабой особенностью в $C(D)$

Е. В. Фролова (Липецк, Россия)

Различные задачи математической физики, дифференциальных уравнений в частных производных [1] приводятся к уравнению вида

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi(x) = f(x). \quad (1)$$

Здесь $D = \{x : a_i < x_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$; m — размерность параллелепипеда D_{x_α} ($1 \leq m \leq n$) и частно-интегральный оператор со слабой особенностью определяется равенством

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{a_m}^{b_m} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha; x_{\bar{\alpha}}) dt_\alpha, \quad (2)$$

с ядром

$$\kappa_\alpha = \frac{k_\alpha(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}, \quad \beta < m.$$