

помощью применения техники многомерного преобразования Меллина авторами получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1) из одних пространств интегрируемых функций в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для исследуемого преобразования. Настоящая работа обобщает результаты, полученные А.А. Килбасом и М. Сайго ранее, для соответствующего одномерного преобразования [3, §4.1 и 4.2].

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”, задание 1.2.01.

Литература

1. *Sitnik S.M. and Skoromnik O.V.* Multi-Dimensional Integral Transform with Fox Function in Kernel in Lebesgue-Type Spaces. *Mathematics* (2024), 12, 1829.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, (1987).
3. *Kilbas A.A. and Saigo M.* *H-Transforms. Theory and Applications.* Chapman and Hall, Boca Raton, (2004).

Нейронные обыкновенные дифференциальные уравнения и возможность их аналитического решения П. А. Слиняков (Минск, Беларусь)

В теории нейронных сетей рассматриваются сети со скрытыми слоями $\{\mathbf{h}_t\}$, которые удовлетворяют рекуррентному соотношению вида:

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{h}_{t-1} + f(\mathbf{h}_{t-1}, \theta_{t-1}), \quad (1)$$

где f нелинейная, зависящая от некоторых параметров (весов) θ_t .

В работе [1] вводится *нейронное дифференциальное уравнение* как инфинитезимальный аналог уравнения (1):

$$\frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} = f(\mathbf{h}(t), t, \theta), \quad (2)$$

где справа функция, в общем случае зависящая от скрытого слоя $\mathbf{h}(t)$, переменной t и параметра θ . В той же работе [1] приведен алгоритм для численного решения уравнения (2) *методом сопряженных систем*, предложенным Понтрягиным [2]. В настоящей работе исследуется возможность существования аналитического решения уравнения (2).

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы функции $\mathbf{H}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Theta(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, вектор $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^n$ а также скалярная функция $\sigma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} = \sigma(\mathbf{H}(t) \cdot \Theta(t)), \\ \mathbf{H}(t_0) = \mathbf{H}_0 \end{cases} \quad (3)$$

где $\cdot$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Конструкция в правой части уравнения называется *ридж-функцией* и обусловлена употребимостью в приложениях. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, и $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Пусть также функции $\mathbf{H}(t), \Theta(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$, а функция $\sigma(t)$ — липшицева на данном отрезке. Тогда у задачи Коши (3) существует единственное непрерывно дифференцируемое решение, определенное на $[t_0, t_1]$, непрерывно зависящее от начальных данных и устойчивое при малых их возмущениях.

Схема доказательства. Модифицируя метод доказательства теоремы Пикара–Линделёфа [3], получаем соответствующие оценки и сжимаемость соответствующего интегрального оператора в $C^1(\mathbb{R})$.

Литература

1. *Chen R.T.Q., Rubanova Y., Bettencourt J., Duvenaud D.* Neural Ordinary Differential Equations. *Advances in Neural Information Processing Systems* Vol. 31 (2018), 6571–6583.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука (1983).
3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения. Минск: БГУ (2012).

Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с дифференциальными полиномами в граничных условиях И. И. Столярчук (Минск, Беларусь)

Рассмотрим на множестве $\bar{Q} = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, x_0 \in [0; +\infty), x_1 \in [0; l]\}$ следующую смешанную задачу для волнового уравнения

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = 0, \quad (1)$$

с начальными условиями типа Коши

$$u|_{x_0} = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u|_{x_0} = \psi(x_1), x_1 \in [0; l] \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\sum_{|\alpha| \leq n_j} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1}}(x_0, j) = \mu^{(j)}(x_0), j \in \{0, l\}, n_j \in \mathbb{N}, n_j \geq 2. \quad (3)$$

Теорема. Пусть функции $\mu^{(j)}, r_j^{(\alpha)} \in C^{n_j+k\zeta_j}([0; +\infty)), \varphi \in C^{2n_m+k\zeta_j}, \psi \in C^{2n_m-1+k\zeta_j}, j \in \{0, l\}$ где $n_m = \max(n_0, n_l)$, ζ_j - определяет разность порядков производных. Тогда классическое решение u задачи (1)–(3) существует и единственно в классе $C^{n_m}([0; \frac{kl}{a}] \times [0; l])$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^i \beta_{\nu_j}^{(j)}(j) C_{\nu_j}^{(0)} + \sum_{\nu_j=0}^{n_j-1} d^{i+n_0} \left(\beta_{\nu_j}^{(j)}(z) \int_{\xi_j}^z \frac{W_{\nu_j+1}^{(j)}(\tau)}{r_j^{n_j}(\tau) W^{(j)}(\tau)} d\tau \right), i = \overline{0, k\zeta_j},$$

где $\beta_{\nu_j}^{(j)}$ — функции фундаментальной системы решений уравнения (3), $W^{(j)}$ — определитель Вронского данной системы.

Замечание. Если $\zeta_j = 0, j \in \{0, l\}$, то существование и единственность классического решения u задачи (1)–(3) можно доказать для $x_0 \in [0; +\infty)$.

Схема доказательства. Данная теорема доказывается с использованием метода характеристик, описанного в [1, с. 134] и сведений о разрешимости линейных дифференциальных уравнений [2, с. 92].

Литература

1. *Корзюк В.И.* Уравнения математической физики. М.: URSS (2021).
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: Лань (2023).