

**Применение тождества Гильберта для резольвент
к вычислению некоторых интегралов от специальных функций
С. М. Ситник (Белгород, Россия)**

Рассмотрим два никак не связанных между собой математических факта. Первый из них — это тождество Гильберта для резольвент [1]

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A). \quad (1)$$

Второй факт — формула для резольвенты оператора дробного интегрирования Римана–Лиувилля

$$R_\lambda f(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^x E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-y)^\alpha}{\lambda} \right) (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad (2)$$

где $E_{\alpha,\alpha}(t)$ —функция Миттаг–Леффлера [2]–[5]. Эта формула была впервые выписана в работе Э. Хилле и Я.Д. Тамаркина [4] в 1930 г. без доказательства, первое известное мне опубликованное доказательство приведено в книге М.М. Джрбашяна [5].

Основная идея доклада состоит в подстановке (2) в (1), на этом пути можно получить ряд определённых интегралов со специальными функциями в ядрах. Например:

Теорема. Справедлива формула

$$\begin{aligned} & \int_t^x (y-t)^{\alpha-1} (x-y)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(y-t)^\alpha}{\mu} \right) E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-y)^\alpha}{\lambda} \right) dy = \\ & = \frac{\mu\lambda}{\lambda-\mu} (x-t)^{\alpha-1} \left(E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-t)^\alpha}{\mu} \right) - E_{\alpha,\alpha} \left(\frac{(x-t)^\alpha}{\lambda} \right) \right). \end{aligned}$$

Эта формула содержит частные случаи с гипергеометрическими функциями ${}_0F_m$ со специальными наборами параметров.

При выборе других резольвент со специальными или элементарными функциями в ядрах можно получить дополнительно ряд подобных формул.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука (1981).
2. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. *Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications. Second edition*. Springer (2020).
3. Shishkina E.L., Sitnik S.M. *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*. Elsevier (2020).
4. Hille E., Tamarkin J.D. On the theory of linear integral equations. *Ann. Math.* No. 31 (1930), 479–528.
5. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. М.: Наука (1966).