

Задача R-линейного сопряжения в параболическом случае

С. В. Рогозин, Л. П. Примачук, М. В. Дубатовская (Минск, Беларусь)

Рассмотрена разрешимость задачи R-линейного сопряжения на единичной окружности

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad |t| = 1, \quad (1)$$

в параболическом случае, т.е. когда $|a(t)| \equiv |b(t)|$.

Известно [1], что задача (1) на единичной окружности (т.е. с $\mathcal{L} = \mathbb{T}$) эквивалентна векторно-матричной задаче C-линейного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (2)$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$g(t) = \frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} \overline{a(t)}f(t) - b(t)\overline{f(t)} \\ -\overline{f(t)} \end{pmatrix},$$

и неизвестные аналитические векторы связаны с φ^+, φ^- соотношениями:

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(z) \\ \Phi_2^+(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+(z) \\ \varphi^-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(z) \\ \Phi_2^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^-(z) \\ \varphi^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) \end{pmatrix}.$$

В параболическом случае $G(t) = G_1(t)G_2(t)$, где

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Факторизуя, следуя [2], коэффициент $G(t)$ получаем следующее утверждение

Теорема. (i) Пусть либо $|a(t)| > |b(t)|$, либо $|a(t)| = |b(t)|$, $\varkappa = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ и $\varkappa_b = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} b(t) \geq 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = \max\{0, 2\varkappa\}$, $l' = \max\{0, -2\varkappa\}$.

(ii) Пусть $|a(t)| = |b(t)|$ и $\varkappa_b < 0$, $\lambda = \varkappa + \varkappa_b < 0$, $\mu = \varkappa - \varkappa_b > 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = 2\varkappa - 2\varkappa_b$, $l' = 2\varkappa + 2\varkappa_b$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. Литвинчук, Г.С. Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение. *Изв. вузов. Матем.* No. 12 (1967), 47–57.
2. Primachuk, L., Rogosin, S.V. Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order. *Lobachevsky J. Math.* V. 39 (6) (2018), 809–817. doi 10.1134/S1995080218010213