О дифференцировании многопараметрической функции Ле Руа относительно параметров

С. В. Рогозин, М. В. Дубатовская (Минск, Беларусь)

В [1] предложено следующее обобщение функции типа Ле Руа [2]

$$F^{(\gamma)_m}_{(\alpha,\beta)_m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod_{j=1}^{m}[\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

определенной для всех $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{C}$ вне исключительного множества

$$\mathcal{P}_0 \equiv \{(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2 : \exists k, \alpha_j k + \beta_j = 0, -1, -2, \ldots \,\&\, \mathrm{Re}\,\gamma_j \le 0\}.$$

Следуя идеям работы [3] установлены формулы дифференцирования функции (1) по параметрам

$$\frac{\partial F^{(\gamma)_m}_{(\alpha,\beta)_m}(z)}{\partial \alpha_n} = -\gamma_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\psi(\alpha_n k + \beta_n) z^k}{\prod_{j=1}^{m}[\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}},$$

$$\frac{\partial F^{(\gamma)_m}_{(\alpha,\beta)_m}(z)}{\partial \beta_n} = -\gamma_j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(\alpha_n k + \beta_n) z^k}{\prod_{j=1}^{m}[\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}},$$

$$\frac{\partial F^{(\gamma)_m}_{(\alpha,\beta)_m}(z)}{\partial \gamma_n} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln[\Gamma(\alpha_n k + \beta_n)] z^k}{\prod_{j=1}^{m}[\Gamma(\alpha_j k + \beta_j)]^{\gamma_j}}.$$

Справедливость этих формул вытекает из равномерной по параметрам сходимости рядов в правой части формул, доказаной с помощью неравенств для ψ-функции (дигамма функции) $\psi(s) = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$ [4, Ch. 5] и классической Γ-функции (см. [5]).

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические модели и методы”.

Литература

1. *Rogosin S., Dubatovskaya M.* Multi-parametric Le Roy function revisited. *Fract Calc Appl Anal.* Vol. 27 (2024), 64–81. https://doi.org/10.1007/s13540-023-00221-9

2. *Garrappa R., Rogosin S., Mainardi F.* On a generalized three-parameter Wright function of Le Roy type. *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. 20 (5) (2017), 1196–1215. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0063

3. *Apelblat A.; Mainardi F.* Differentiation of the Wright functions with respect to parameters and other results. *Appl. Sci.*, Vol. 12 (2022), 12825. https://doi.org/10.3390/app122412825

4. *NIST Handbook of Mathematical Functions.* Edited by Frank W.J. Olver (editor-in-chief), D.W. Lozier, R.F. Boisvert, and C.W. Clark. Gaithersburg, Maryland, National Institute of Standards and Technology, and New York, Cambridge University Press, 951 + xv pages and a CD, (2010).

5. *Alzer H.* On some inequalities for the Gamma and Psi functions. *Mathematics of Computation*, Vol. 66 (217) (1997), 373–389. doi:10.1090/S0025-5718-97-00807-7