согласно методике [3], приближенное полиномиальное представление известных функций уравнения (1) с учетом ортогональности многочленом Чебышева и спектральных соотношений для сингулярных интегралов позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов c_k , решение которой дает приближенное решение задачи:

$$\Gamma(x) \simeq \Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, t) u_n(t) dt = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{k+1} U_k(x).$$

Численные эксперименты показывают высокую точность предложенного метода. В частности, погрешность приближенного решения $\delta \leq 10^{-14}$ достигается уже при $n \leq 20$.

Литература

1. *Габдуллаев Б. Г.* Прямые методы решения уравнения теории крыла. Изв. вузов. Матем., (1974), № 2, 29–44.
2. *Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, (1968).

К анализу свойств согласованности дифференциальной и разностной задач в системном случае В. И. Репников (Минск, Беларусь)

На примере модельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0, \quad A = A^T > 0 \quad (1)$$

обсуждается техника исследования различных уровней согласованности в поведении решений исходной дифференциальной и аппроксимирующей ее разностной задач. Как показано, например, в [1], функцией устойчивости любого линейного одношагового метода является матричная функция $Q(\tau A)$, где $Q(z)$, $z = \tau\lambda$ — функция устойчивости соответствующего метода, примененного к стандартному скалярному модельному уравнению $\dot{u}(t) + \lambda u(t)$, т.е. разностное уравнение в нашем случае имеет вид $\hat{y} = Q(\tau\lambda)y$. Поэтому использование разложения разностных решений по базису из собственных векторов матрицы A (которые в нашем случае образуют ортонормированную систему, что значительно упрощает выкладки) $y = \sum_{i=1}^n C_i \xi^i$, $\hat{y} = \sum_{i=1}^n \hat{C}_i \xi^i$ позволяет получить соотношения, связывающие коэффициенты разложений $\hat{C}_i = Q(z_i)C_i$, $z_i = \tau\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, в которых λ_i — собственные значения матрицы A (считаем их упорядоченными, например, по убыванию).

Теперь легко получается традиционно используемое в качестве условия устойчивости (понимаемой как монотонное убывание квадрата некоторой энергетической нормы решения $\delta_k(y) = (A^k y, y)$) ограничение на величину параметра дискретизации τ (это касается чаще всего явных методов) вида $\tau \leq \frac{a}{\lambda_n}$, где a — некоторая константа, являющаяся решением неравенства $|Q(z)| \leq 1$. Более детальный анализ показывает, что остается диапазон значений τ , имеющий вид $\left(\frac{2}{\lambda_n}, \frac{2}{\lambda_1}\right)$, при котором возможно устойчивое поведение разностного решения. Например, непосредственное решение неравенства $\delta_k(\hat{y}) < \delta_k(y)$ позволяет получить ограничение вида $\tau < \frac{a}{\mu_{k+1}(y)}$, $\mu_{k+1} = \frac{\delta_{k+2}}{\delta_{k+1}}$. В то же время величина μ_k на точном решении модельной системы, отличном от гармоники, также является монотонно убывающей. Поэтому имеет смысл также требовать выполнения этого свойства на разностном решении (в надежде получить максимально слабое

ограничение на величину τ). Обсуждаются также функционалы более сложного вида, правильно ведущие себя на точном решении задачи (1) [2] и их использование в конструкции аппроксимирующих разностных уравнений.

Литература

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир. (1988).

2. Репников В.И. О свойствах некоторых функционалов, связанных с линейными дифференциальными системами. *Вестн. Белорус. ун-та*. Сер. 1. Физ., мат., информ. (2001), № 2. 60–65.

Многочленные асимптотики для функции Грина уравнения переноса излучения Н. Н. Роговцов (Минск, Беларусь)

В статье [1] было получено аналитическое представление для функции Грина $\tilde{G}_\infty(\tau, \mathbf{\Omega}; \tau_1, \mathbf{\Omega}_1; \omega_0)$, которое является решением такой краевой задачи:

$$\mu \frac{\partial \tilde{G}_\infty(\tau, \mathbf{\Omega}; \tau_1, \mathbf{\Omega}_1; \omega_0)}{\partial \tau} = -\tilde{G}_\infty(\tau, \mathbf{\Omega}; \tau_1; \omega_0) +$$

$$+ \frac{\omega_0}{4\pi} \int p(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}') \tilde{G}_\infty(\tau, \mathbf{\Omega}; \tau_1, \mathbf{\Omega}_1; \omega_0) d\mathbf{\Omega}' + \delta(\tau - \tau') \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi') \quad (1)$$

$$(\tau, \tau_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)), \quad \omega_0 \in (0, 1), \quad (\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_1) \in \Omega \times \Omega;$$

$$\lim_{|\tau - \tau_1| \rightarrow +\infty} \tilde{G}_\infty(\tau, \mathbf{\Omega}; \tau_1, \mathbf{\Omega}_1; \omega_0) = 0. \quad (2)$$

При отыскании этого представления считалось, что функция $p(\mu)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $[-1, 1]$, которое не всегда можно использовать при решении прикладных проблем теории переноса излучения (РТТ).

Установлена верность следующих утверждений:

Утверждение 1. Аналитическое представление для $\tilde{G}_\infty(\tau, \mathbf{\Omega}; \tau_1, \mathbf{\Omega}_1; \omega_0)$, полученное в [1] справедливо и тогда, когда $p(\mu) \in L_8(-1, 1)$.

Утверждение 2. Если $p(\mu) \in L_8(-1, 1)$, то многочисленные асимптотики для функции Грина при $|\tau - \tau_1| \rightarrow +\infty$ могут быть записаны в виде аналитических выражений, содержащих собственные значения и собственные функции, соответствующие дискретным спектрам приведенных характеристических уравнений РТТ [1, 2].

Литература

1. Роговцов Н.Н. Конструктивная теория скалярных характеристических уравнений теории переноса излучения. II. Алгоритмы отыскания решений и их аналитические представления. *ДУ*, (2015), 51, N 5, 650–662.

2. Роговцов Н.Н. Конструктивная теория скалярных характеристических уравнений теории переноса излучения. I. Основные утверждения теории и условия применимости метода усечения. *ДУ*, (2015), 51, N 2, 263–276.