где D_{0x}^t — дробная производная (интеграл) Римана–Лиувилля порядка t по переменной x с началом в точке $x = 0$, μ — знакопеременная борелевская мера на $\mathbb{R}$.

Оператор (1) относится к классу операторов дифференцирования (интегрирования) распределенного порядка [1].

Запишем (1) в виде

$$D_{0x}^{[\mu]} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(f * \Phi_\mu\right)(x),$$

где

$$\Phi_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{-t-1}}{\Gamma(-t)} \mu_n\left(dt\right), \tag{2}$$

μ_n — сдвиг меры μ на n, $n = \min\{k:\ k \geq \beta,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, $\beta = \sup\operatorname{supp}\mu < \infty$.

В докладе обсуждаются вопросы обращения оператора (1). В частности, используя обобщенное преобразование Станковича [2], для ядра (2) найдена пара Сонина [3, 4], в терминах которой построен обратный оператор и доказаны формулы Ньютона–Лейбница.

Литература

1. *Нахушев А.М.* К теории дробного исчисления. *Дифференц. уравнения.* Т. 24, No. 2 (1988), 313–324.

2. *Pskhu A.* Transmutation operators intertwining first-order and distributed-order derivatives. *Bol. Soc. Mat. Mex.*. V. 29, No. 93 (2003), 1–17.

3. *Сонин Н.Я. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах.* М.: ГИТТЛ (1954).

4. *Рубин Б.С.* Теорема вложения для образов операторов свертки на конечном отрезке и операторы типа потенциала, I. *Изв. вузов. Матем.*. No. 1(236) (1982), 53–63.

Спектральный метод Чебышева для численного решения одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

Г. А. Расолько, В. М. Волков (Минск, Беларусь)

Рассмотрим класс интегро-дифференциальных уравнений, используемых для описания аэродинамики крыла конечной длины [1]:

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt + \int_{-1}^{1} g(x,t)\Gamma'(t)dt + \int_{-1}^{1} v(x,t)\Gamma(t)dt = f(x). \tag{1}$$

Здесь $B(x), v(x,t)$, $g(x,t)$ и $f(x)$ — заданные функции, $-1 < x < 1$, $\Gamma(x)$ — искомая функция, удовлетворяющая граничными условиями $\Gamma(\pm) = 0$.

Выделяя сингулярную часть уравнения (1), $u(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt$, и применяя формулу обращения сингулярного интеграла в классе функций $h(0)$ по Мусхилишвили [2], имеем:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x,t)u(t)dt,\ H(x,t) = \ln\frac{1 - xt + \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}}{|t-x|}.$$

Для приближенного решения задачи используем разложение неизвестной функции $u(x) \simeq u_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k U_k(x)$, где $U_k(x)$ — многочлены Чебышева второго рода. Далее, согласно методике [3], приближенное полиномиальное представление известных функций уравнения (1) с учетом ортогональности многочленом Чебышева и спектральных соотношений для сингулярных интегралов позволяет получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов c_k, решение которой дает приближенное решение задачи:

$$\Gamma(x) \simeq \Gamma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} H(x,t)u_n(t)dt = \sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{k+1} U_k(x).$$

Численные эксперименты показывают высокую точность предложенного метода. В частности, погрешность приближенного решения $\delta \le 10^{-14}$ достигается уже при $n \le 20$.

Литература

1. *Габдулхаев Б. Г.* Прямые методы решения уравнения теории крыла. Изв. вузов. Матем., (1974), № 2, 29–44.

2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, (1968).

К анализу свойств согласованности дифференциальной и разностной задач в системном случае

В. И. Репников (Минск, Беларусь)

На примере модельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0, \quad A = A^T > 0 \tag{1}$$

обсуждается техника исследования различных уровней согласованности в поведении решений исходной дифференциальной и аппроксимирующей ее разностной задач. Как показано, например, в [1], функцией устойчивости любого линейного одношагового метода является матричная функция $Q(\tau A)$, где $Q(z)$, $z = \tau\lambda$ — функция устойчивости соответствующего метода, примененного к стандартному скалярному модельному уравнению $\dot{u}(t) + \lambda u(t)$, т.е. разностное уравнение в нашем случае имеет вид $\hat{y} = Q(\tau\lambda)y$. Поэтому использование разложения разностных решений по базису из собственных векторов матрицы A (которые в нашем случае образуют ортонормированную систему, что значительно упрощает выкладки) $y = \sum_{i=1}^{n} C_i\xi^i$, $\hat{y} = \sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i\xi^i$ позволяет получить соотношения, связывающие коэффициенты разложений $\hat{C}_i = Q(z_i)C_i$, $z_i = \tau\lambda_i$, $i = 1,\ldots,n$, в которых λ_i — собственные значения матрицы A (считаем их упорядоченными, например, по неубыванию).

Теперь легко получается традиционно используемое в качестве условия устойчивости (понимаемой как монотонное убывание квадрата некоторой энергетической нормы решения $\delta_k(y) = (A^k y, y)$) ограничение на величину параметра дискретизации τ (это касается чаще всего явных методов) вида $\tau \le \dfrac{a}{\lambda_n}$, где a – некоторая константа, являющаяся решением неравенства $|Q(z)| \le 1$. Более детальный анализ показывает, что остается диапазон значений τ, имеющий вид $\left(\dfrac{2}{\lambda_n}, \dfrac{2}{\lambda_1}\right)$, при котором возможно устойчивое поведение разностного решения. Например, непосредственное решение неравенства $\delta_k(\hat{y}) < \delta_k(y)$ позволяет получить ограничение вида $\tau < \dfrac{a}{\mu_{k+1}(y)}$, $\mu_{k+1} = \dfrac{\delta_{k+2}}{\delta_{k+1}}$. В то же время величина μ_k на точном решении модельной системы, отличном от гармоники, также является монотонно убывающей. Поэтому имеет смысл также требовать выполнения этого свойства на разностном решении (в надежде получить максимально слабое