$$\sum_{j\in I_i^+(U^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, i \in I^k, k \in K; \ \sum_{k\in K_0(i,j)} x_{ij}^k \le d_{ij}^0, (i,j) \in U_0; \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \sum_{k\in K(i,j)} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, p = \overline{1,l}; \ x_{ij}^k \ge 0, k \in K_0(i,j), (i,j) \in U_0; \tag{3}$$

$$0 \le x_{ij}^k \le d_{ij}^k, \in K_1(i,j), (i,j) \in U; \ x_{ij}^k \ge 0, k \in K(i,j) \setminus K_1(i,j), (i,j) \in U \setminus U_0;$$

$$I_i^+(U^k) = \{j \in I^k : (i,j)^k \in U^k\}; \ I_i^-(U^k) = \{j \in I^k : (j,i)^k \in U^k\}. \tag{4}$$

Here K ($|K| < \infty$) is a set of different products (types of flow) transported through the multinetwork G. Without loss of generality, let's put $K = \{1, \ldots, |K|\}$. Let us denote the connected network corresponding to a certain type k of flow with $S^k = (I^k, U^k)$, where I^k is the set of nodes and U^k is the set of arcs which are available for the flow of type k, $k \in K$. Also, we define for each node $i \in I$ the set of types of flows $K(i) = \{k \in K : i \in I^k\}$ and for each multiarc $(i,j) \in U$ the set $K(i,j) = \{k \in K : (i,j)^k \in U^k\}$. We assume that the denominator $q(x)$ of the objective function (1) does not change sign on a set of multiflows X, $x \in X$.

We use constructive decomposition theory [1] for constructing solutions to a class of *mathematical programming problems*: extremal inhomogeneous problems of linear-fractional flow programming on a generalized multinetwork (1)–(4). The work is devoted to methods, algorithms and technologies for constructing *optimal and suboptimal solutions* in synthesis with modern innovative technologies of sparse matrix analysis [2], algorithmic graph theory, theoretical computer science. The presented algorithms and computing technologies make it possible to construct solutions to large sparse linear systems with matrices of full and incomplete rank using parallel computing.

Литература

1. *Pilipchuk L.A. Linear-fractional extremal inhomogeneous problems network flow programming.* Minsk: BSU, (2013). (in Russian).

2. *Pilipchuk L.A. Sparse Linear Systems and Their Applications.* Minsk: BSU, (2013).

Дробные уравнения и численный анализ

С. И. Пискарев (Москва, Россия)

Рассматривается дискретизация уравнений в частных производных разностными схемами. А именно, рассматривается дробное уравнение

$$D^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{1}$$

в банаховом пространстве E с дробной производной $D^\alpha u(t)$ по Капуто и оно аппроксимируются явными и неявными разностными схемами. Такие задачи отличаются от классической ситуации тем, что гладкость исходных данных и скорость сходимости разностных схем имеют [1]–[4] неожиданную связь $O(\tau^\alpha)$. Это касается и схем, предложенных в работах Бажлековой, Ашыралыева, Подлубного, Понче и др. Как выяснилось скорость сходимости в большей степени зависит от показателя производной, а не от схемы, аппроксимирующей (1).

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 23-21-00005.

Литература

1. *Li Liu, Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S.* Convergence Rates of a Finite Difference Method for the Fractional Subdiffusion Equations. *Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms.* Springer Proceedings in Mathe-matics & Statistics, Springer Cham Switzerland. V. 423 (2023), 89–113.

2. *Li Liu, Fan Zhenbin, Li Gang, Piskarev S.* Discrete almost maximal regularity and stability for fractional differential equations in $L_p([0,1],E)$. *Applied Mathematics and Computation.* V. 389 (2021), Article 125574.

3. *Piskarev S., Siegmund S.* Unstable manifolds for fractional differential equations. *Eurasian journal of mathematical and computer applications.* V. 10 (2022), 58–72.

4. *Piskarev S., Ovchinnikov A. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations.* Singapore: World Scientific. (2023).

Обобщенные решения задач сопряжения для уравнения Гельмгольца и уравнений Максвелла

Н. Б. Плещинский (Казань, Россия)

Задачи дифракции электромагнитных волн на тонких проводящих экранах сводятся к задачам сопряжения для уравнений Максвелла или для уравнения Гельмгольца в двумерном случае. Например, нужно найти уходящие на бесконечность решения $u^-(x,z)$ и $u^+(x,z)$ уравнения Гельмгольца в полосе $0<x<a$ при $z<0$ и $z>0$, удовлетворяющие некоторым условиям при $z=0$. Искомые решения можно представить в виде

$$u^\pm(x,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^\pm\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot e^{\pm i\gamma_n z},$$

где $\gamma_n=\sqrt{k^2-(\pi n/a)^2}$, $\operatorname{Re}\gamma_n>0$ или $\operatorname{Im}\gamma_n>0$, k — волновое число. Эти ряды сходятся при $z\neq 0$ при любых наборах чисел $u_n^\pm$, но не ясно, что будет при $z\to 0\pm 0$.

Построены специальные классы обобщенных функций — линейных непрерывных функционалов на пространствах линейных комбинаций некоторых базисных функций, образующих о.н.с. на поперечном сечении волновода. В случае плоского волновода в качестве таких функций берутся $\sin\dfrac{\pi n}{a}x$ или $\cos\dfrac{\pi n}{a}x$, в случае прямоугольного волновода — произведения синусов и косинусов. Для закрытого волновода произвольного сечения — системы собственных функций оператора Лаласа, удовлетворяющих условию Дирихле или условию Неймана на границе сечения. В случае открытого пространства удобно использовать функции Эрмита, если выбраны декартовы координаты, или функции Лагерра, если выбраны цилиндрические координаты.

Операции над обобщенными функциями вводятся так, что значения нового функционала определяются через значения исходного функционала на преобразованных базисных функциях. В отличие от классической теории распределений Шварца, в некоторых случаях существуют не все производные обобщенных функций, а, например, только четного порядка.

В качестве обобщенных решений уравнения Гельмгольца или уравнений Максвелла рассматриваются отображения, которые значения продольной координаты z переводят в обобщенную функцию из пространства, выбранного в соответствии с геометрией задачи. Существенно, что условия обращения в нуль обобщенной функции на части области определения базисных функций позволяют формулировать задачу дифракции на экране как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных u_n^+ или u_n^-.