Теорема. Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\nu>0$ и функции $u(t_\alpha;x_{\bar\alpha})\in L_{(p,p^2)}(\mathbb{R}_m,\mathbb{R}_{n-m})$, $k(x;t_\alpha)\in L^{(w_1(x_\alpha),\,w_2(x_{\bar\alpha}),\,w_3(t_\alpha))}_{(p,\,pp',\,pp')}(\mathbb{R}_m,\mathbb{R}_{n-m},\mathbb{R}_m)$. Тогда при $\frac{m}{(p')^2}-\nu<\lambda<\frac{m}{(p')^2}$ $\|K_m^{(\lambda)}u\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}_n)}\le A\|u\|_{L_{(p,p^2)}(\mathbb{R}_m,\mathbb{R}_{n-m})}\|k\|_{L^{(w_1(x_\alpha),w_2(x_{\bar\alpha}),w_3(t_\alpha))}_{(p,\,pp',\,pp')}(\mathbb{R}_m,\mathbb{R}_{n-m},\mathbb{R}_m)}$, где $w_2(x_{\bar\alpha})\equiv1$,

$$w_3(t_\alpha)=(|t_\alpha|^2+1)^{\frac{\nu pp'}{2}},\ w_1(x_\alpha)=\begin{cases}(|x_\alpha|^2+1)^{-\frac{\lambda p}{2}}, & \nu(p')^2>m,\\ (|x_\alpha|^2+1)^{-\frac{\lambda p}{2}}(1+\ln(|x_\alpha|^2+1))^{\frac{p}{2(p')^2}}, & \nu(p')^2=m,\\ (|x_\alpha|^2+1)^{-\frac{p(\lambda-\nu+m/(p')^2)}{2(p')^2}}, & \nu(p')^2<m.\end{cases}$$

Литература

1. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука (1975).

2. *Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука (1974).

3. *Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами.* Воронеж: ЦЧКИ (2000).

4. *Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I., Trusova N.I.* About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$. *Jornal of Mathematical Sciences.* Vol. 251. № 6. (2020), 839–849.

Неединственность решений обратной задачи теплопроводности

В. Т. Борухов, Г. М. Заяц (Минск, Беларусь)

Рассмотрена обратная задача теплопроводности

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right),\ \ x\in(0,b),\ t\in(0,t_f), \tag{1}$$

$$T(x,0)=\overline{T}(x),\ \ x\in[0,b],\qquad T(0,t)=g_1(t),\ T(b,t)=g_2(t),\ \ t\in[0,t_f], \tag{2}$$

$$T(x_*,t)=\widetilde{T}(t),\quad x_*\in(0,b),\ t\in[0,t_f], \tag{3}$$

в которой неизвестным, помимо температуры $T(x,t)$, является коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$.

Согласно критерию Фролова [1] задача восстановления луча $\{kc(T),\ k\lambda(T)|k>0\}$ по температурному полю T имеет неединственное решение тогда и только тогда, когда функция T имеет вид бегущей волны

$$T(x,t)=u(f_1),\ \ f_1(x,t)=x+h_1t+h_2,\quad h_1,\ h_2-\mathrm{const},$$

либо имеет автомодельное представление

$$T(x,t)=u(f_2),\ \ f_2(x,t)=\frac{x+h_1}{(h_2-t)^{1/2}}+h_3,\quad h_1,\ h_2,\ h_3-\mathrm{const},\quad h_2-t_f>0.$$

Теорема. Пусть правые части равенств (2), (3) имеют вид

$$\overline{T}(x)=u(f(x,0)),\ \ g_1(t)=u(f(0,t)),\ \ g_2(t)=u(f(b,t)),\ \ \widetilde{T}(t)=u(f(x_*,t)),$$

где $u(f)$ — строго монотонная функция, $f(x,t)=f_1(x,t)$ либо $f(x,t)=f_2(x,t)$. Тогда решение обратной задачи (1)–(3) неединственно и задается формулой

$$\lambda(T)=\frac{1}{u'(u^{-1}(T))}\left(h_1\int_{f_{01}}^{u^{-1}(T)}c(u(s))u'(s)ds+l\right)$$

либо формулой

$$\lambda(T) = \frac{1}{u'(u^{-1}(T))}\left(\frac{1}{2}\int_{f_{02}}^{u^{-1}(T)} c(u(s))u'(s)(s-h_3)ds + l\right),$$

где l — произвольный параметр, $f_{0i} = \min\limits_{(x,t)\in\partial\Omega}\{f_i(x,t)\}, i \in \{1,2\}$, $\partial\Omega$ — граница области определения температурного поля T.

Литература

1. *Frolov V.V.* Uniqueness theorems for the solution of the inverse problem of heat conduction. *J. Eng. Phys. Thermophys.* V. 29 (1) (1975) 923–927.

Влияние геометрических параметров слуховой трубы на аэрацию полостей среднего уха

С. М. Босяков, Е. Л. Малец, Л. Г. Петрова (Минск, Беларусь)

Врожденные расщелины неба являются одним из наиболее распространенных врожденных пороков развития челюстно-лицевой области, характеризующийся множеством патологических симптомокомплексов, среди которых ведущее значение занимает патология среднего уха с нарушением слуховой функции, связанного с возникновением отрицательного давления в барабанной полости. Целью настоящей работы является конечно-элементное моделирование распределения воздуха в евстахиевой трубе, барабанной полости среднего уха, а также в сосцевидном отростке при различных геометрических параметрах, соответствующих патологическим изменениям, связанным с наличием расщелины неба.

Комплексные трехмерные модели, включающие сосцевидный отросток, барабанную полость, колебательную систему среднего уха и евстахиевую трубу, разработаны для детей двух и двенадцати лет на основании томографических данных. При этом учтены анатомически корректные показатели для указанных возрастов, соответствующие состоянию в норме и различным патологическим состояниям [1]. Расчет линий тока и распределений давления воздуха в евстахиевой трубе, барабанной полости и сосцевидном отростке выполнялся в конечно-элементном пакете ANSYS Fluent 2023 R1 при начальной скорости воздуха 15 м/с, подаваемого в евстахиевую трубы в назофарингальной области (направление скорости воздуха перпендикулярно плоскости поперечного сечения). В слуховой трубе, барабанной полости и сосцевидном отростке задавалось начальное давление, равное нормальному атмосферному давлению 760 мм ртутного столба.

Расчет распределения давления и линий тока воздуха в сосцевидном отростке, барабанной полости и евстахиевой трубе осуществлялся для случаев в норме, при патологии проходимости евстахиевой трубы, уменьшающей величины полуосей эллиптических поперечных сечений на трех различных уровнях трубы в два , три и десять раз, патологии сосцевидного отростка, приводящей к уменьшению площади его поверхности на 30% по отношению к площади поверхности в норме. Полученные результаты могут быть использованы при планировании хирургического лечения хронического среднего отита у пациентов детского возраста с врожденной расщелиной неба.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 “Разработка дифференциальных и дробно-дифференциальных методов и их применение к моделированию сложных биомеханических и экономических систем” Государственной программы научных исследований “Конвергенция–2025”.