

Об автомодельных решениях задачи Стефана–Дирихле в угле Е. Ю. Панов (Великий Новгород, Россия)

В угле $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, \alpha < x/t < \beta\}$, где $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, рассмотрим многофазную задачу Стефана для уравнения теплопроводности

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad (1)$$

где $u_\alpha = u_0 < u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = u_\beta$, u_i , $i = 1, \dots, m$ — температуры фазовых переходов, $a_i > 0$, $i = 0, \dots, m$, — коэффициенты диффузии i -ой фазы. На неизвестных линиях $x = x_i(t)$ фазовых переходов, где $u = u_i$, должно выполняться условие Стефана

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)-) = 0, \quad (2)$$

в котором $k_i > 0$ — коэффициент теплопроводности i -ой фазы, а $d_i \geq 0$ — скрытая удельная теплота i -го фазового перехода. На неподвижных границах $\{(t, \alpha t) \mid t > 0\}$, $\{(t, \beta t) \mid t > 0\}$ (при $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ они меняются на, соответственно, вертикальные лучи $(0, x)$, $x < 0$, $x > 0$) ставится условие Дирихле

$$u(t, \alpha t) = u_\alpha, \quad u(t, \beta t) = u_\beta. \quad (3)$$

Решение задачи (1)–(3) автомодельно, $u = u(x/\sqrt{t})$, и имеет следующий вид: при $i = 0, \dots, m$

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)} (F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_i < \xi < \xi_{i+1}, \quad (4)$$

где $\xi_0 = \alpha, \xi_{m+1} = \beta$; $F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-s^2/4} ds$. Величины ξ_i , $i = 1, \dots, m$, подлежат определению из условий Стефана (2):

$$d_i \xi_i/2 + \frac{k_i(u_{i+1} - u_i)F'(\xi_i/a_i)}{a_i(F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i))} - \frac{k_{i-1}(u_i - u_{i-1})F'(\xi_i/a_{i-1})}{a_{i-1}(F(\xi_i/a_{i-1}) - F(\xi_{i-1}/a_{i-1}))} = 0.$$

Оказалось, что эта нелинейная алгебраическая система имеет градиентную форму $\nabla E(\bar{\xi}) = 0$, где потенциал

$$E(\bar{\xi}) = - \sum_{i=0}^m k_i(u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)) + \sum_{i=1}^m d_i \xi_i^2/4,$$

$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega$, открытый выпуклый конус $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задан неравенствами $\alpha < \xi_1 < \dots < \xi_m < \beta$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. Функция $E(\bar{\xi})$ коэрцитивна и строго выпукла в Ω . Поэтому, она имеет единственную критическую точку $\bar{\xi}_0 \in \Omega$, которая является точкой её глобального минимума. Координаты этой точки определяют единственное решение (4) задачи (1), (2), (3).