Нейронная сеть с подкреплением обучалась с помощью данных решения прямой задачи, полученного методом асимптотических разложений [2] на основе программного модуля созданного инструментами фреймворка PyTorch.

Литература

1. *Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.* М.: Наука (1974).

2. *Нифагин В.А. Асимптотические методы в задачах упругопластической теории трещин.* LAP LAMBERT Academic Publishing (2017).

3. *Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения.* М.: Физматлит (2006).

Равномерно сходящиеся последовательности многочленов, имеющих заданные нули в кольце h-комплексных чисел

В. А. Павловский (Минск, Беларусь)

Пусть $\mathbb{C}_h$ — кольцо h-комплексных чисел вида $z = x + jy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$ с делителями нуля вида $z = (1 \pm j)t$, $t \in \mathbb{R}$ [1]. В $\mathbb{C}_h$ норма: $\|z\| = |x| + |y|$.

Определение 1. Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется h-целой, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ и выполняются условия $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$ [2].

Определение 2. Порядком h-целой функции $f(z)$ назовём число $\rho = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$, где $M_f(r) = \max\limits_{\|z\|=r} |f(z)|$. Типом h-целой функции $f(z)$ порядка ρ назовём число $\sigma = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$. Функция $f(z)$ имеет нормальный тип, если $0 < \sigma < +\infty$.

Теорема 1. Пусть $\{c_{k,m}\}$, $m \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, n_m$ — множество h-комплексных чисел, удовлетворяющих условиям:

1) $0 < \delta \le \|c_{1,m}\| \le \|c_{2,m}\| \le \cdots \le \|c_{k-1,m}\| \le \|c_{k,m}\| \le \cdots \le \|c_{n_m,m}\|$,

2) $c_{k,m}$ не являются делителями нуля $\forall m \in \mathbb{N}$.

Последовательность многочленов

$$P_m(z) = \prod_{k=1}^{n_m} \left(1 - \frac{z}{c_{k,m}}\right) = 1 + d_1^m z + d_2^m z^2 + \cdots + d_{n_m}^m z^{n_m} \tag{1}$$

такова, что при некотором $p \in \mathbb{N}$ выполняется $\sum\limits_{k=1}^{n_m} \|c_{k,m}\|^{-(p+1)} \le M$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ и $\|d_k^m\| \le M$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность (1) равномерно ограничена в любом h-круге $\{\|z\| \le r\}$ и верна оценка

$$\|P_m(z)\| \le e^{A_p\, M\, r^{p+1} + \frac{1}{p}\sigma_p r^p + \cdots + \frac{1}{2}\sigma_2 r^2 + \sigma_1 r},$$

где $A_p, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p > 0$ — некоторые константы. Если $\sum\limits_{k=1}^{n_m} \|c_{k,m}\|^{-1} \le M$, то $\|P_m(z)\| \le e^{Mr}$.

Теорема 2. Пусть в (1) все $c_{k,m}$ — вещественные и последовательность $P_m(z)$ равномерно сходится в некоторой окрестности нуля к функции, не равной тождественному нулю. Тогда эта последовательность сходится равномерно в любом h-круге $\{\|z\| \le r\}$. При этом предельная функция — h-целая порядка не выше $p + 1$ и нормального типа.

Литература

1. *Павловский В. А.* Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h-комплексных чисел. *Весцi БДПУ*. Сер. 3. No. 4 (2020), 25–31.

2. *Павловский В. А.* Некоторые оценки роста h-целых функций. *Весцi БДПУ*. Сер. 3. No. 2 (2022), 18–23.

Построение первых интегралов неавтономных полиномиальных многомерных дифференциальных систем по кратным комплекснозначным частным интегралам

П. Б. Павлючик, А. Ф. Проневич (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}(t,x)\, dt_j, \quad i = 1,\ldots,n, \quad t \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n,\ m \le n, \tag{1}$$

где $P_{ij}\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$, суть полиномы по зависимым переменным $x_1,\ldots,x_n$ с голоморфными по независимым переменным $t_1,\ldots,t_m$ на области $T \subset \mathbb{R}^m$ коэффициентами. При $m = 1$ система (1) является неавтономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой n-го порядка.

В данной работе выделены классы неавтономных систем в полных дифференциалах (1), у которых первые интегралы находятся по кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам (см. определение в [1, с. 173]).

Так, например, имеет место следующее утверждение.

Теорема [2]. *Если дифференциальная система* (1) *имеет кратный комплекснозначный полиномиальный частный интеграл* $\mathfrak{w}$ *кратности* $\mathfrak{z} = 1 + \sum_{\zeta=1}^{\mathfrak{e}} \mathfrak{f}_\zeta$ *и существует такое* $\zeta \in \{1,\ldots,\mathfrak{e}\}$, *что при фиксированном* $\mathfrak{g}_\zeta \in \{1,\ldots,\mathfrak{f}_\zeta\}$ *у кофакторов частного интеграла* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}$, $j = 1,\ldots,m$, *вещественные части*

$$\operatorname{Re}\mathfrak{N}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta j}(t,x) = \lambda_j \quad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},\ j = 1,\ldots,m,$$

то скалярная функция

$$F\colon (t,x) \to \ \operatorname{Re}\mathfrak{K}_{\mathfrak{h}_\zeta \mathfrak{g}_\zeta}(t,x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j t_j \quad \forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$$

будет первым интегралом системы уравнений в полных дифференциалах (1).

Литература

1. *Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем.* Гродно: ГрГУ (2006).

2. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б., Проневич А.Ф.* Кратность комплекснозначных полиномиальных частных интегралов неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем. *Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы.* Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Т. 13, № 3 (2023), 33–48.